PQI - 5783 – ANÁLISE DE PROCESSOS DA INDÚSTRIA QUÍMICA

Análise Qualitativa de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares e Não Lineares e Estabilidade

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

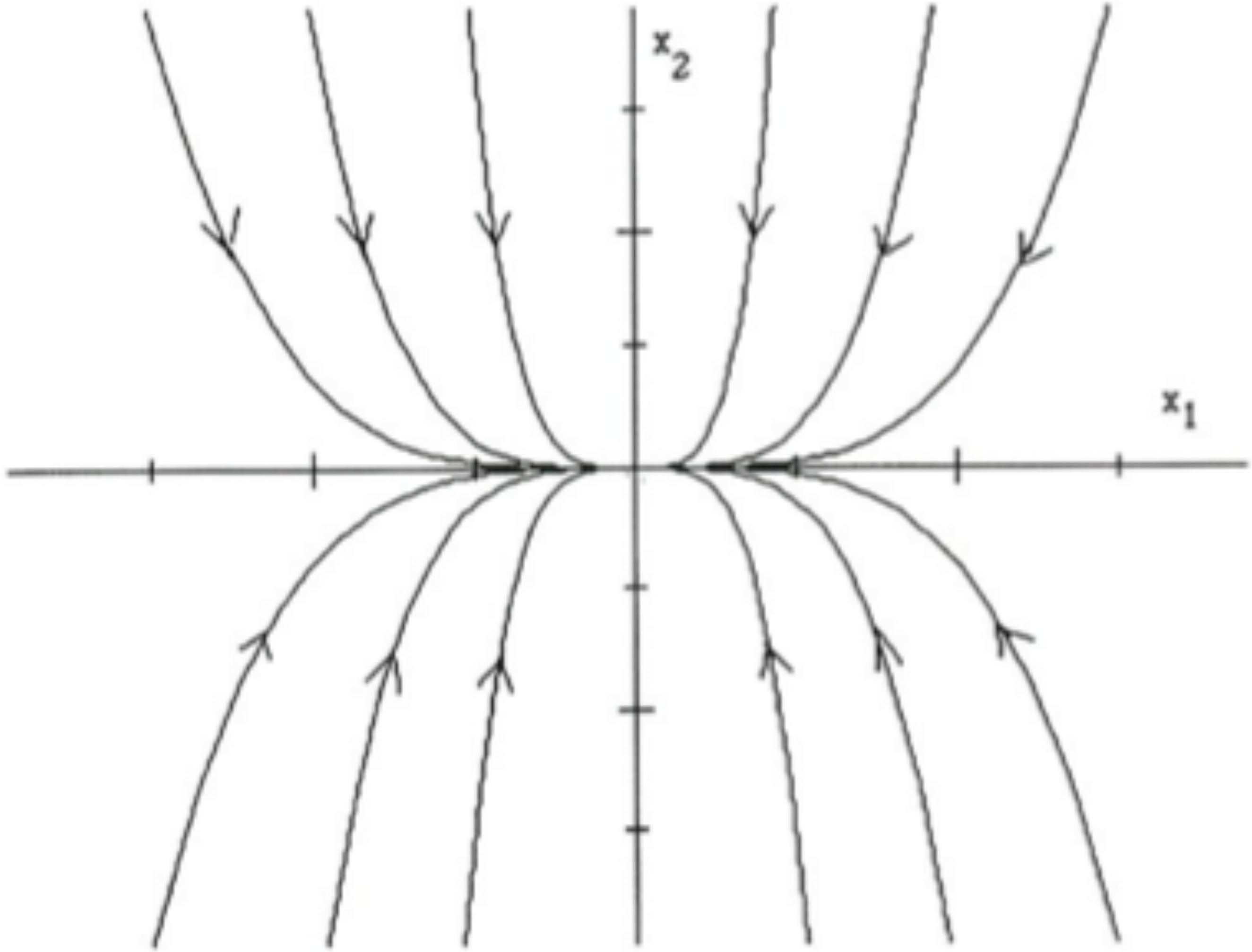
- **Introdução – plano de fases**
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
- Sistemas de EDOs não lineares
  - Exemplo 1 – diagrama de fases
  - Exemplo 2 – diagrama de fases
- Estabilidade

Caso 1:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_2$$

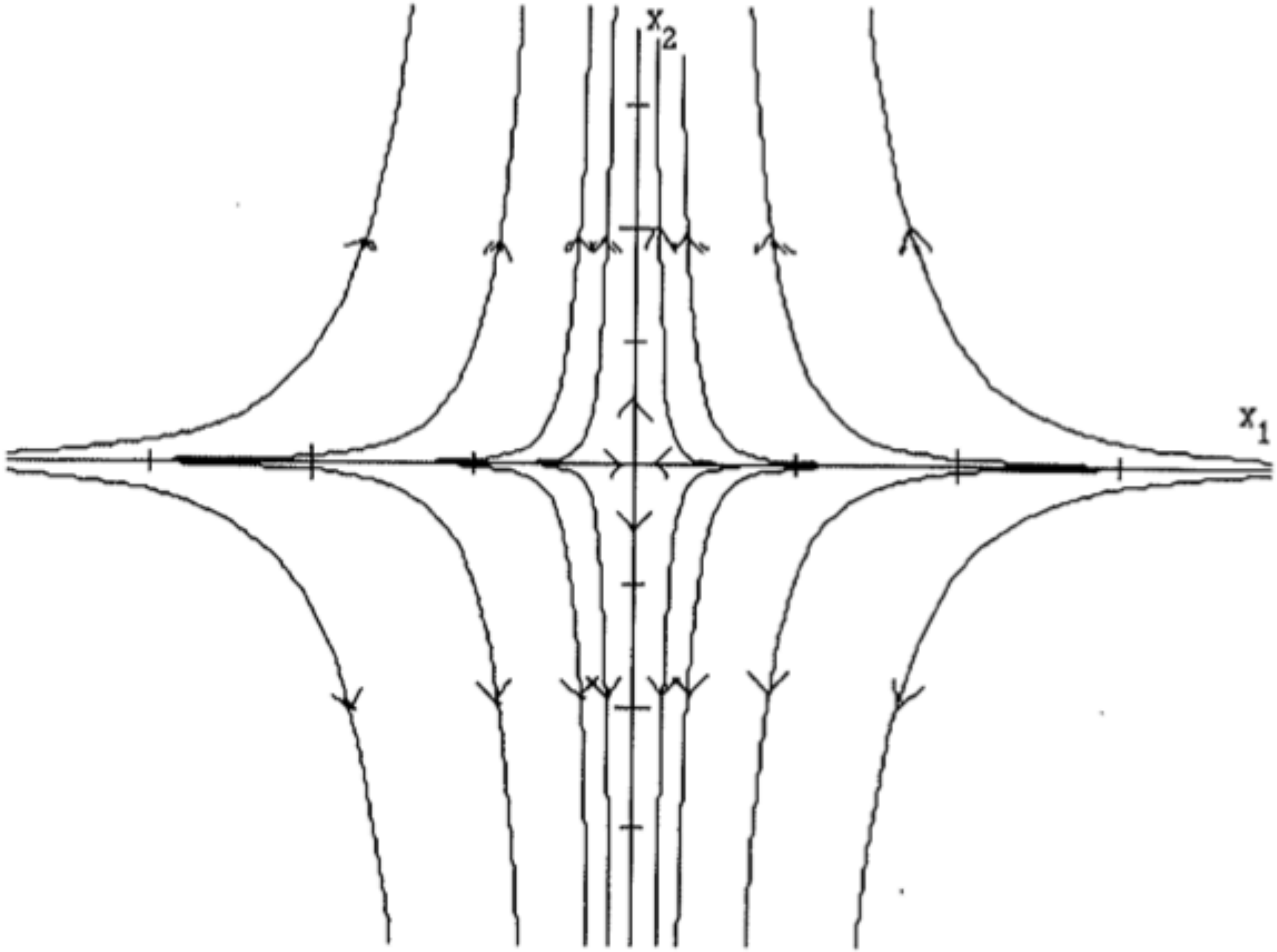
Espaço de fases:



Caso 2:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_2$$


x2
x1

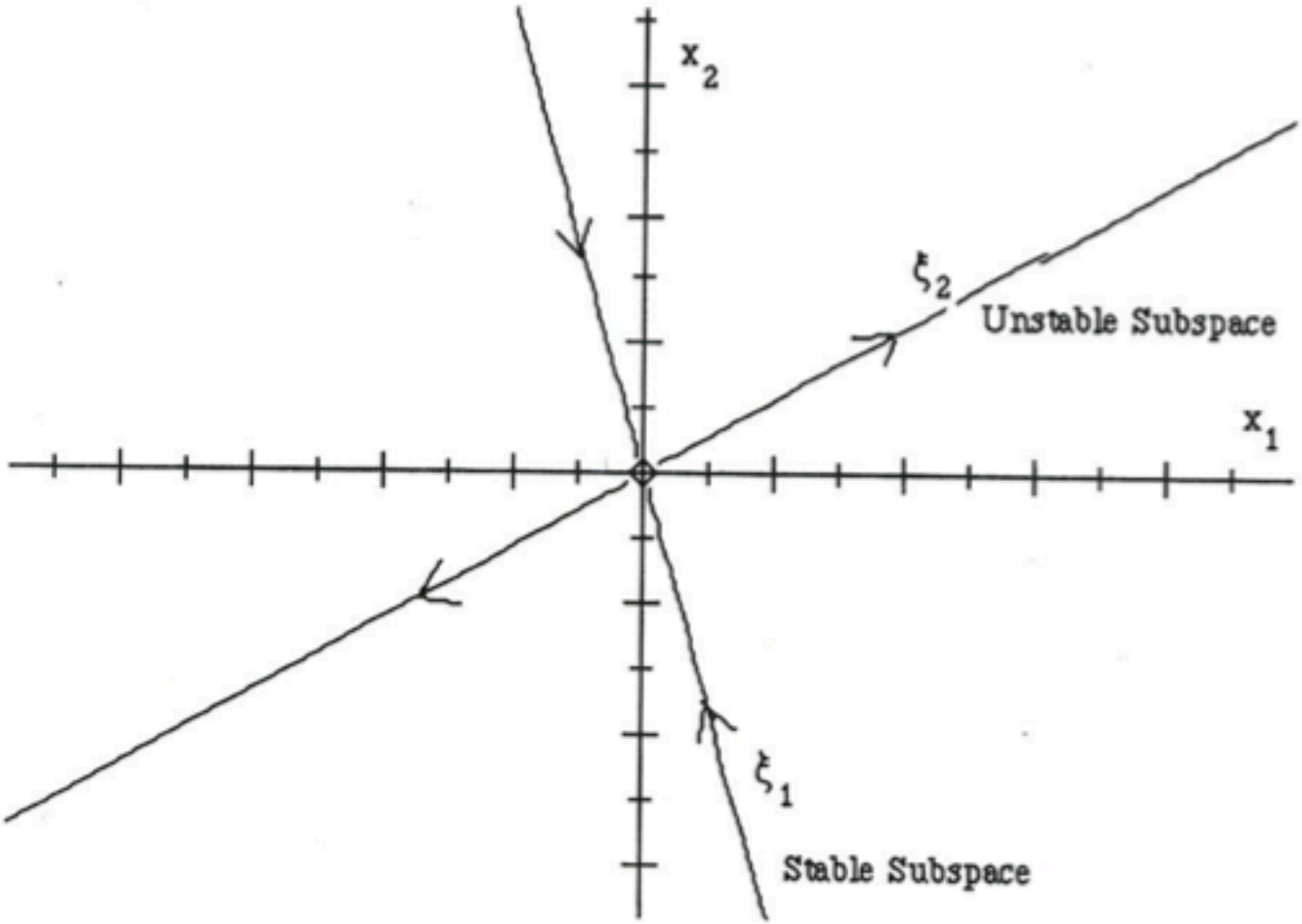
Caso 3:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2$$

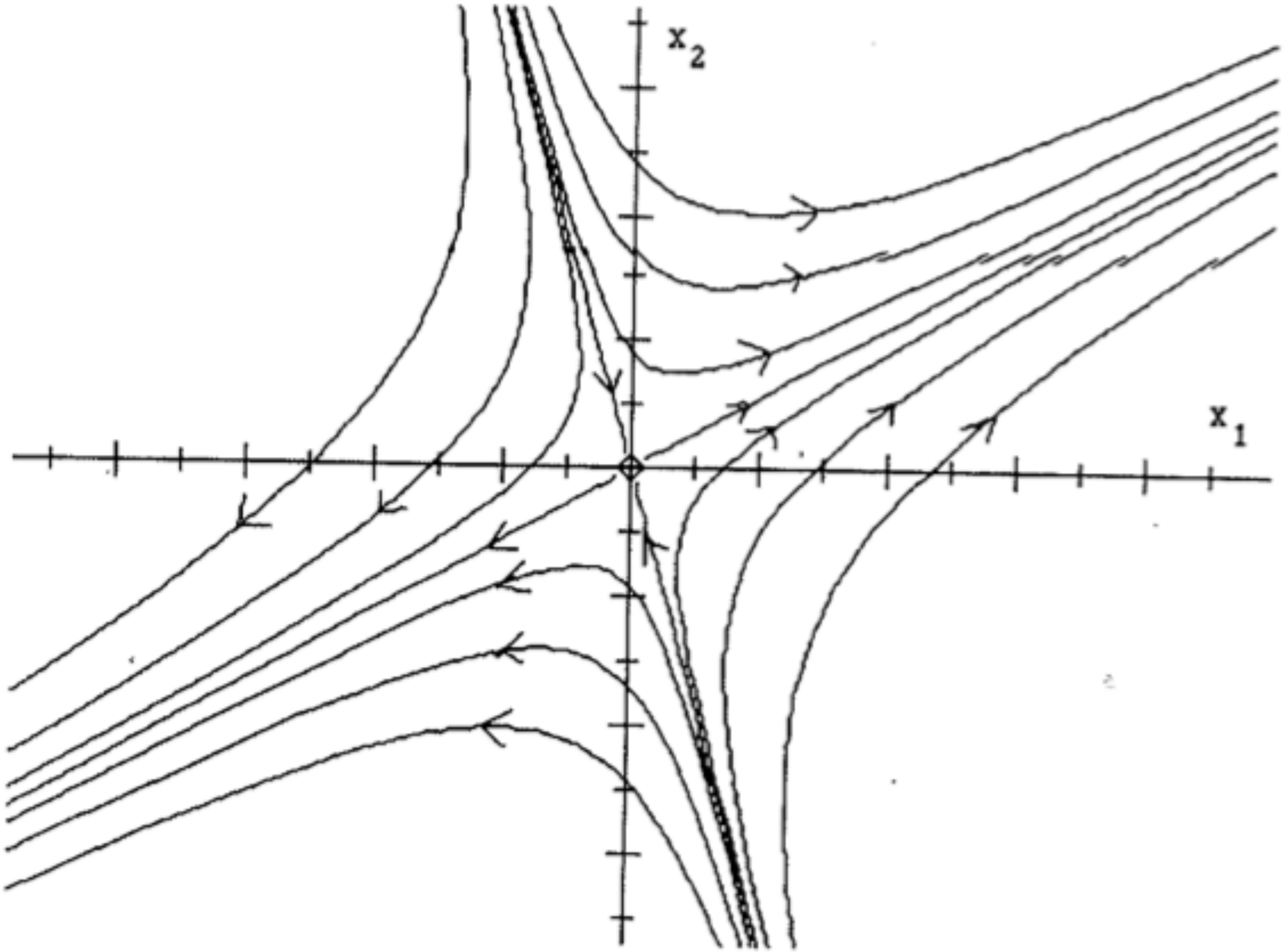
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2$$

$$\lambda_1 = -1.5616 \qquad \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.2703 \\ -0.9628 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2.5616 \qquad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0.8719 \\ 0.4896 \end{bmatrix}$$



x_2
x_1
ξ_2
Unstable Subspace
ξ_1
Stable Subspace



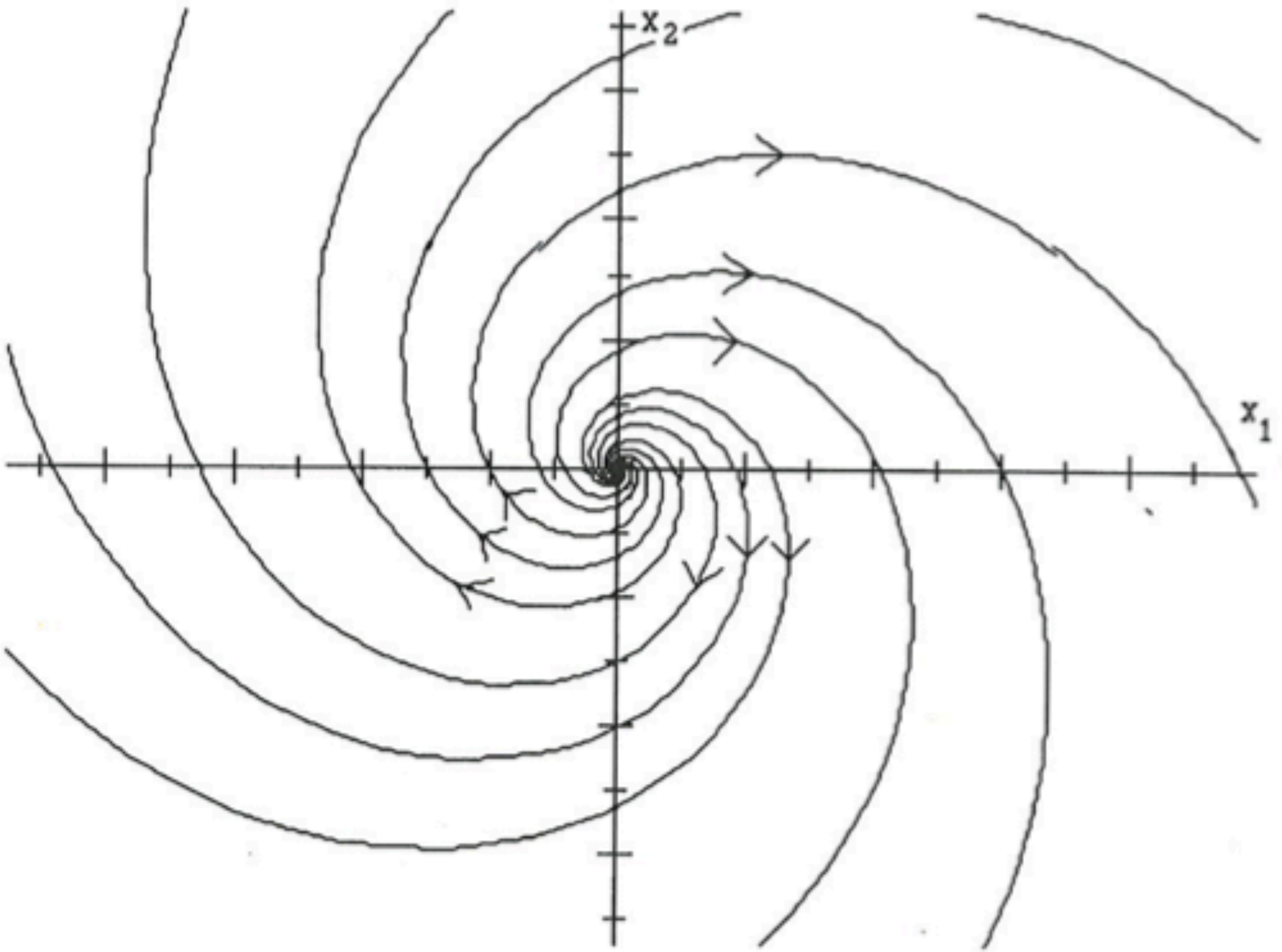
x_2
x_1

Caso 4:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2$$

$$\lambda_1 = 1 \pm 2j$$



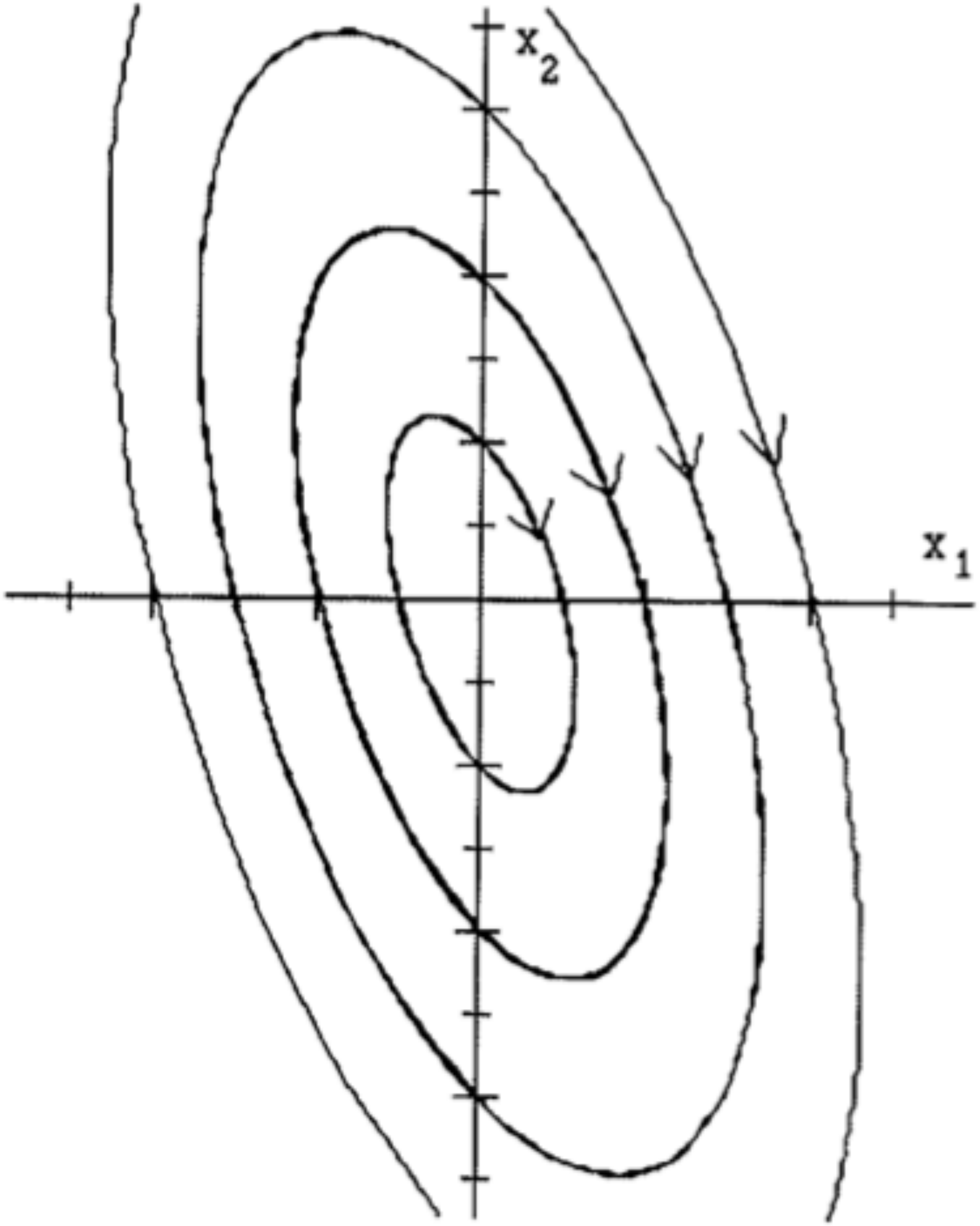
x2
x1

Caso 5:

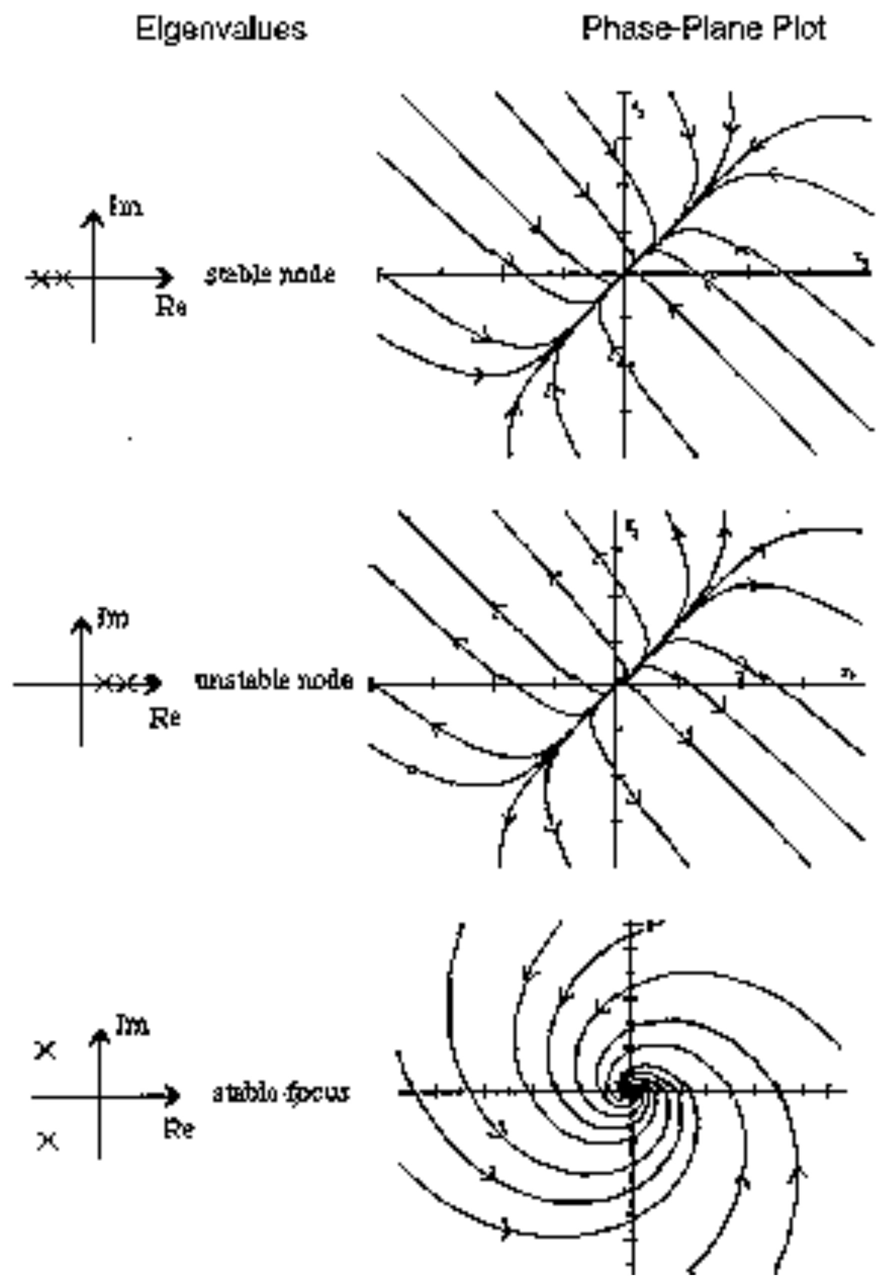
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2$$

$$\lambda_1 = \pm 1.7321j$$

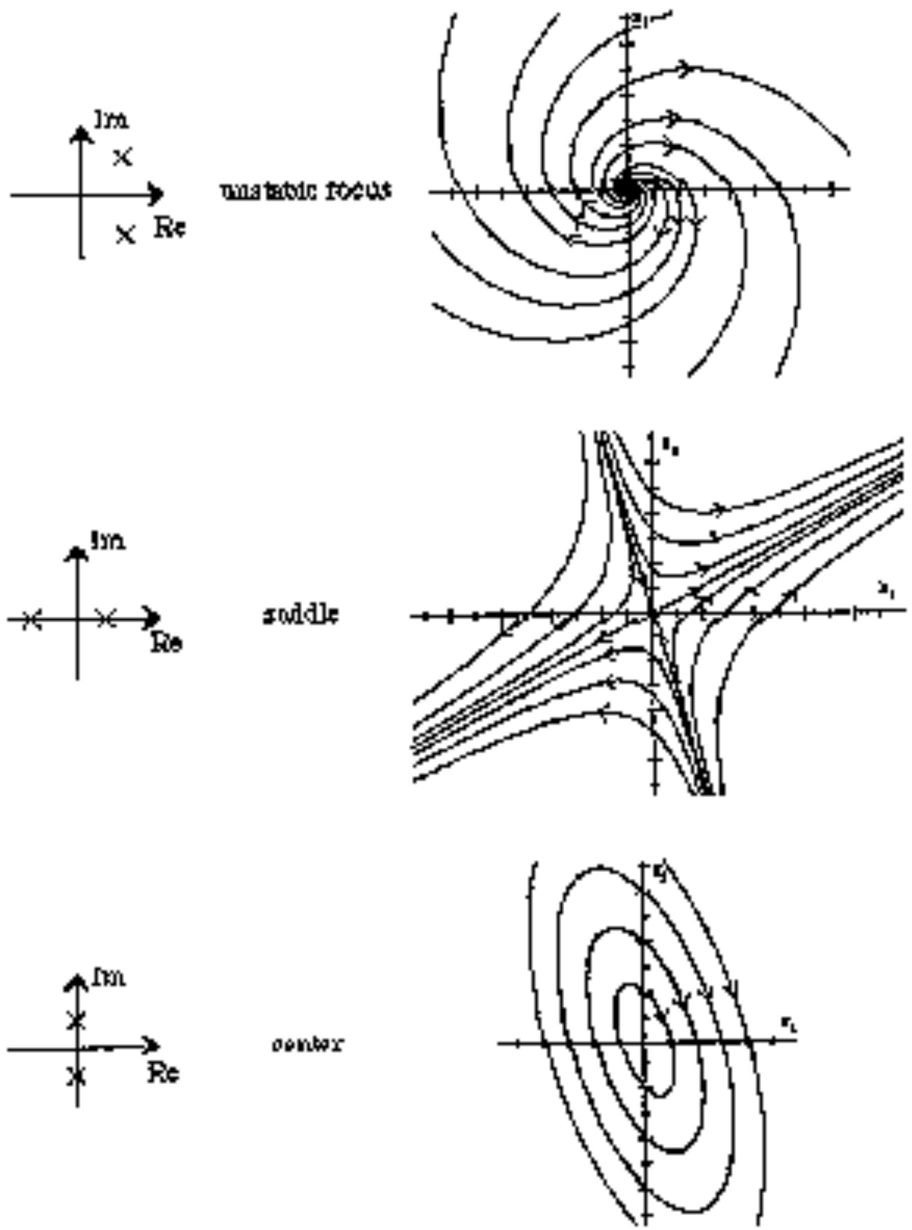

x 2
x 1

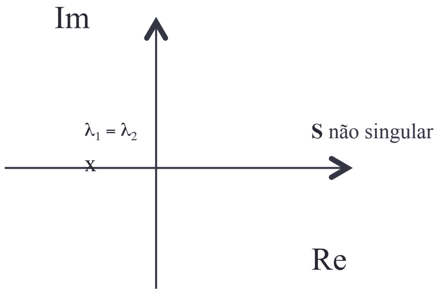
Relação entre trajetórias e autovalores para sistemas 2 x 2

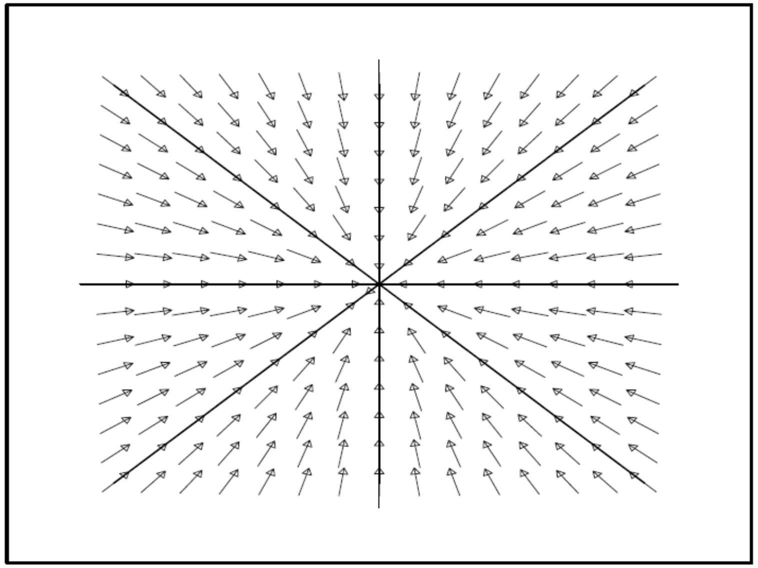


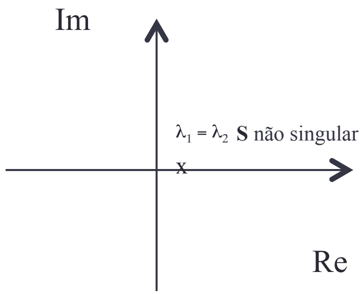
Eigenvalues
Phase-Plane Plot
Im
Re
stable node
Im
Re
unstable node
Im
Re
stable focus

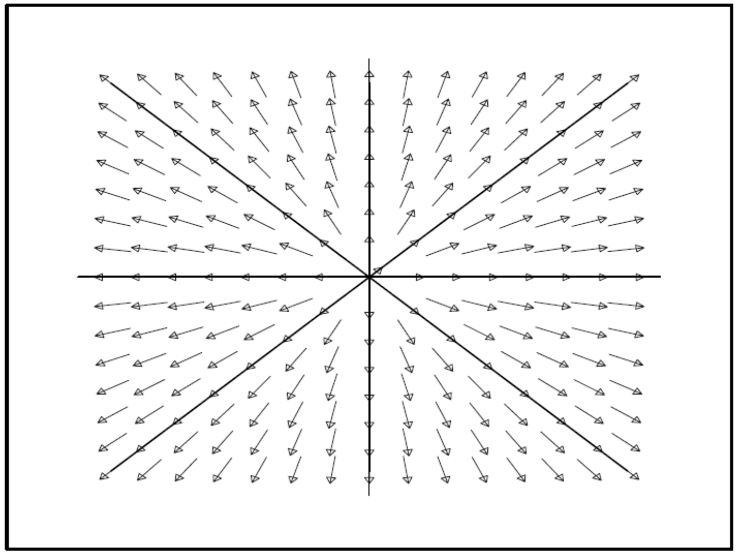
Eigenvalues　　Phase-Plane Plot

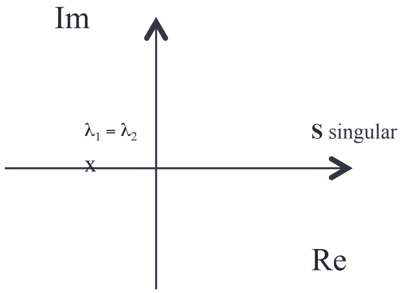


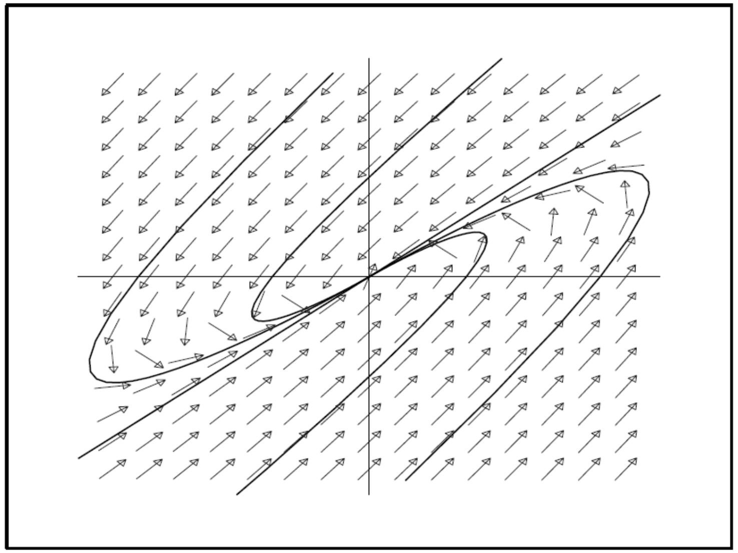

Im
$\lambda_1 = \lambda_2$
x
S não singular
Re

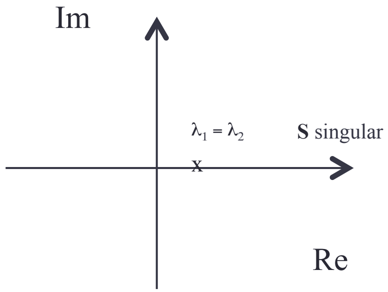


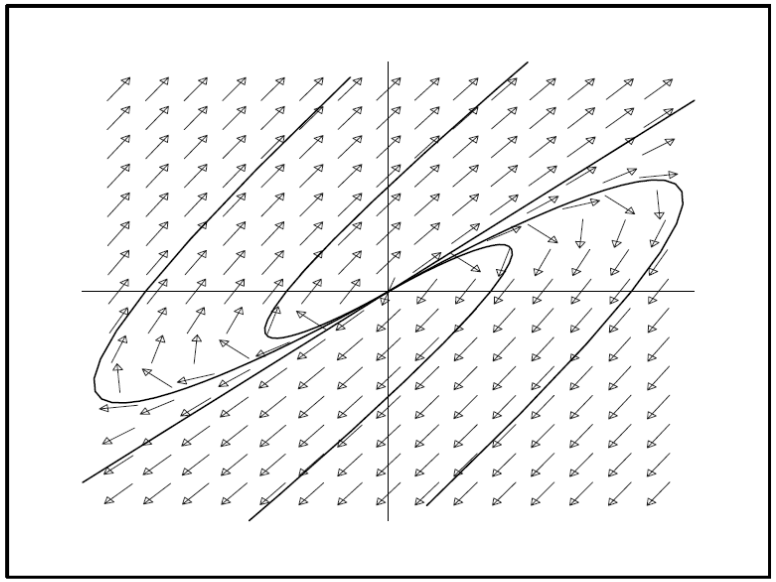

Im
$\lambda_1 = \lambda_2$ **S** não singular
x
Re




Im
$\lambda_1 = \lambda_2$
x
S singular
Re




Im
$\lambda_1 = \lambda_2$
x
S singular
Re



Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução – plano de fases
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
- **Sistemas de EDOs não lineares**
  - Exemplo 1 – diagrama de fases
  - Exemplo 2 – diagrama de fases
- Estabilidade

Sistemas de EDOs não lineares

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$$

Aproximação em $\mathbf{x}_S$: $$\mathbf{0} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_S\right)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \approx J\Big|_{x=x_S} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\right)$$

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução – plano de fases
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
- Sistemas de EDOs não lineares
  - **Exemplo 1 – diagrama de fases**
  - Exemplo 2 – diagrama de fases
- Estabilidade

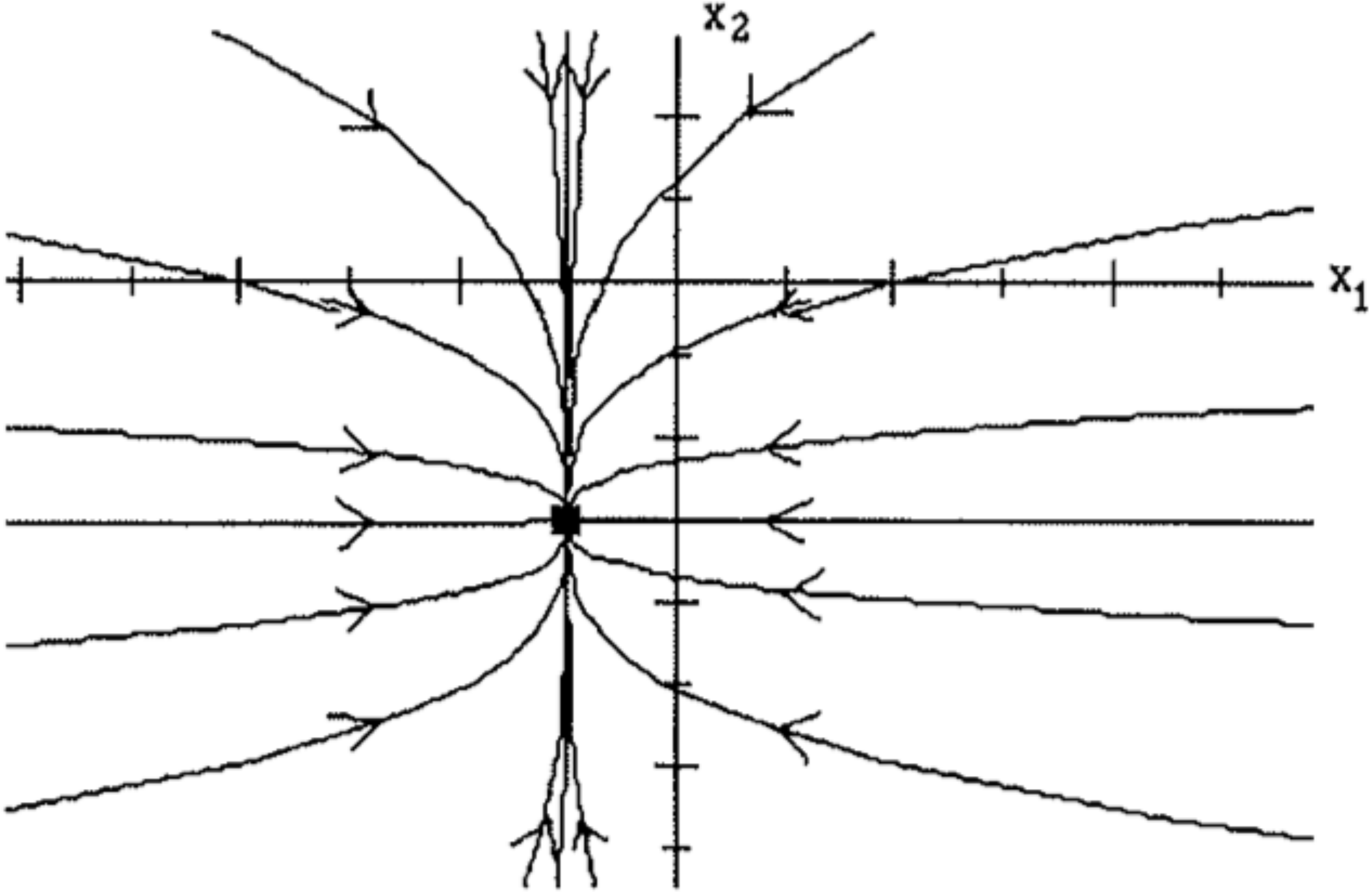
Exemplo 1

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\left(x_1 + 1\right)$$

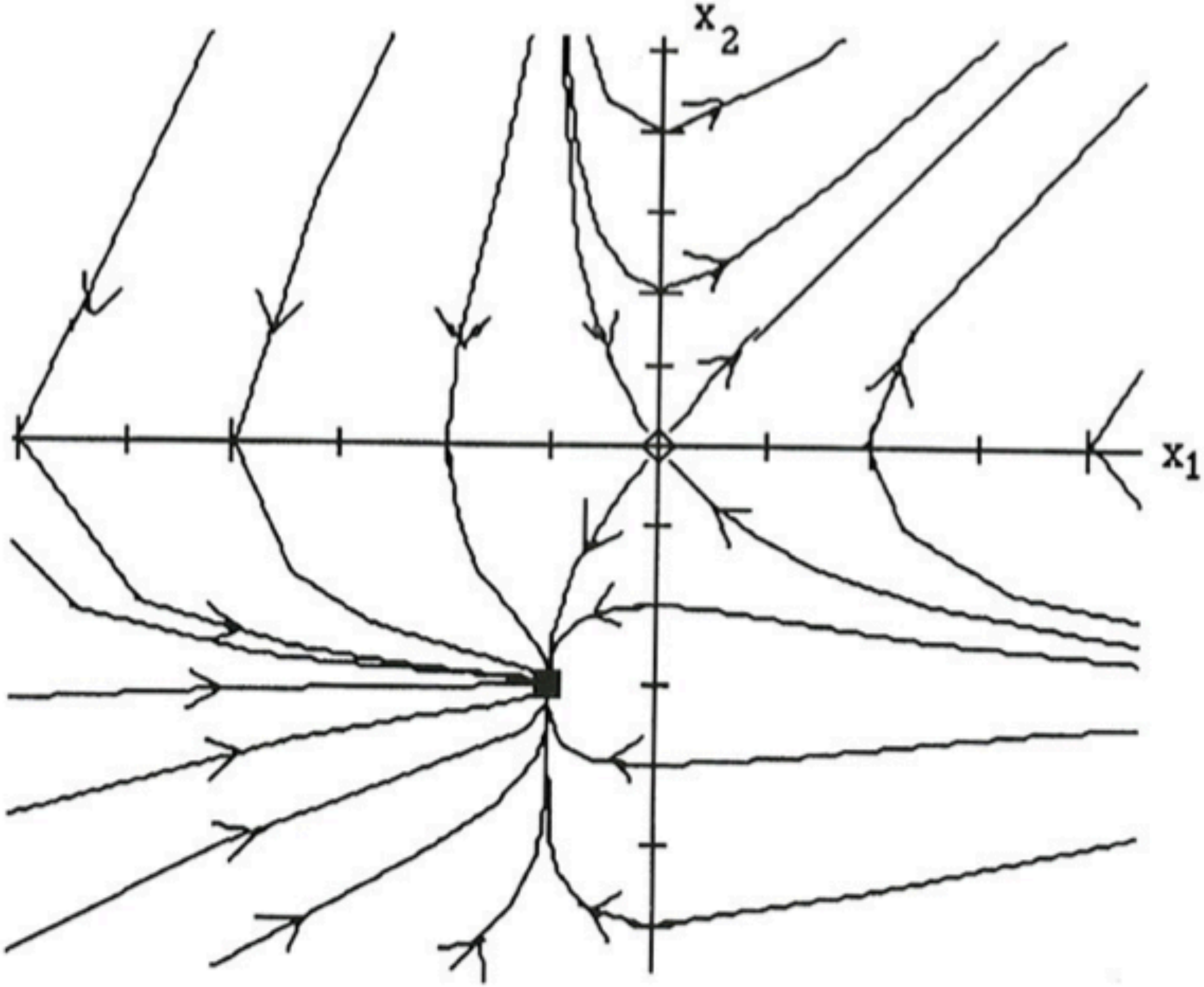
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1\left(x_2 + 3\right)$$

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução – plano de fases
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
- Sistemas de EDOs não lineares
  - Exemplo 1 – diagrama de fases
  - **Exemplo 2 – diagrama de fases**
- Estabilidade



x_2
x_1


x2
x1

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução – plano de fases
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
- Sistemas de EDOs não lineares
  - Exemplo 1 – diagrama de fases
  - Exemplo 2 – diagrama de fases
- **Estabilidade**

Estabilidade

- Se $Re(\lambda_i) < 0$ para todo $i = 1, ..., n$

  o sistema é assintoticamente estável em torno a $\mathbf{x}_S$