UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Campus de Piracicaba
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Ciências Exatas

CÁLCULO I

Samuel Tanaami
Cássio Roberto de Melo Godoi

Piracicaba

ÍNDICE

PREFÁCIO

A presente apostila surgiu da elaboração das notas de aula dos cursos ministrados aos alunos do 1º semestre da ESALQ-USP.

Cabe salientar que ela é um roteiro de estudo. Portanto, para demonstrações rigorosas e mais exercícios, é imperiosa a complementação do texto com algum livro constante da bibliografia.

O texto certamente conterá imperfeições que só serão sanadas à medida que novas edições corrigidas venham a ser publicadas. Para tanto, esperamos a colaboração construtiva sob a forma de sugestões e críticas.

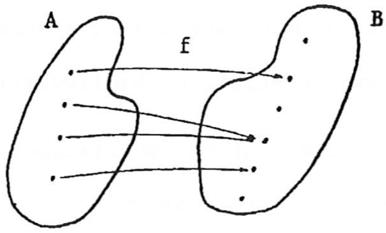
Os autores.

CAPÍTULO 1: FUNÇÕES

A título de revisão, vejamos alguns conceitos básicos a respeito de funções que nos serão úteis posteriormente.

1.1. DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1: Sejam A e B dois conjuntos, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Uma função definida em A com valores em B é uma lei que associa a todo elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.



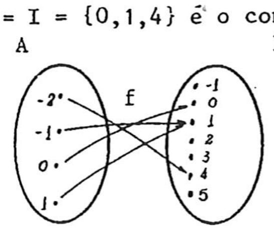
OBSERVAÇÃO: Se $A \subseteq R$ e $B \subseteq R$, a função é dita real de variável real.

NOTAÇÃO: $f: A \to B$; $y = f(x)$

DEFINIÇÃO 2: O conjunto A é chamado domínio da função f, o conjunto B contra-domínio de f e o conjunto $I = \{y \in B \mid y = f(x),\ x \in A\}$ imagem da função f, também denotado por f(A).

EXEMPLO: Seja $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 1\}$ B $= \{y \in Z \mid -1 \leq y \leq 5\}$ e considere a função $f: A \to B$, $f(x) = x^2$.

Temos que:
A é o domínio de f,
B é o contra-domínio de f e
$f(A) = I = \{0,1,4\}$ é o conjunto imagem de f.



OBSERVAÇÃO: Quando não se especificar o domínio de uma dada função, subentende-se que ele seja o conjunto de todos os reais para os quais seja possível.

definir a função. Assim, o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ é;

$D = \{x \in R | x \neq 2\}$, salvo menção contrária.

EXERCÍCIOS 1.1.

1. Se $f(x) = x^4 - 3x + 1$, determine $f(1)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$ e $f(0)$.
2. Se $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2x$, ache $f(1)$, $f(5)$, $f(10)$ e $f(3)$.
3. Se $g(x) = x^2 - 3x + 2$, obtenha:

   a) $g(a)$ b) $g(-a)$ c) $g(\frac{1}{a})$ d) $\dfrac{1}{g(a)}$ e) $g(a + h)$

   f) $\dfrac{g(a + h) - g(a)}{h}$ $h \neq 0$.
4. Encontre o domínio das funções abaixo:

   a) $f(x) = 2x + 1$

   b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}$

   c) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

   d) $f(x) = \sqrt{9 - 5x}$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

   f) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

   g) $f(x) = \dfrac{8x + 3}{x^2 - 5x + 6}$

   h) $f(x) = \dfrac{4x - 3}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$

1.2. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

DEFINIÇÃO: Seja $f: A \to B$. O gráfico de f é o conjunto

$G(f) = \{ (x,y) \in AxB | y = f(x)\}$,

onde $AxB = \{ (x,y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$.

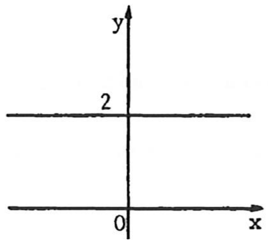
OBSERVAÇÃO: Como, por definição, a todo x do domínio da função corresponde um único valor de y, nenhuma reta vertical pode interceptar o gráfico da função em mais de um ponto.

EXEMPLOS: Nos exemplos abaixo, encontre o domínio e a imagem da função f e faça um esboço de seu gráfico

a) $f(x) = 2$.

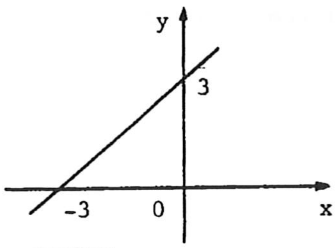
SOLUÇÃO:

O domínio de f é R e a imagem de f é $I = \{ 2 \}$. Um esboço do gráfico de f é mostrado a seguir.



b) $f(x) = x + 3$.

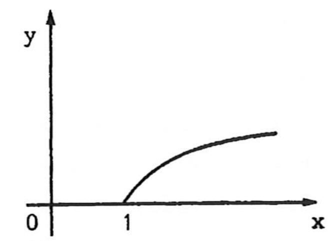
Um esboço do gráfico de f é dado abaixo. O domínio e a imagem de f são todos os números reais.



c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

SOLUÇÃO:

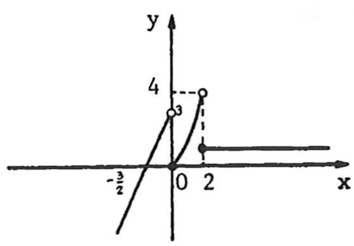
O domínio de f são todos os reais maiores ou iguais a 1, ou seja $D = \{ x \in R \mid x \geq 1 \}$. A imagem de f é $I = \{ y \in R \mid y \geq 0 \}$. Um esboço do gráfico é dado pela figura abaixo:



$$d)\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 0. \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

A figura abaixo mostra o esboço do gráfico de f. O domínio de f é real e a imagem de f é dada por $I = \{ y \in R \mid y < 4 \}$.



e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

SOLUÇÃO:

O domínio de f consiste de todos os reais exceto 3, ou seja,

$D = \{x \in R | x \neq 3\}$

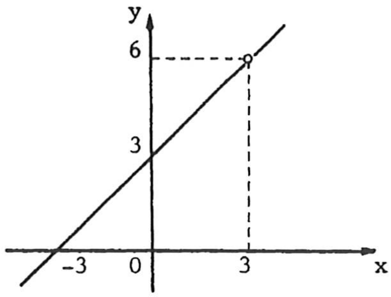
Fatorando o numerador, temos

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}$$

Logo, $f(x) = x + 3$, desde que $x \neq 3$.

A imagem de f é dada por $I = \{y \in R | y \neq 6\}$

Um esboço do gráfico é mostrado abaixo:



EXERCÍCIOS 1.2.

1. Em cada um dos exercícios seguintes, encontre o domínio e a imagem da função e esboce seu gráfico.

   a) $f(x) = -4x + 3$

   b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   c) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

   d) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

   f) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 13x - 3}{x + 3}$

2. Explique por que o gráfico da equação $x^2 + y^2 = 1$ não é gráfico de uma função.

3. a) Defina uma função f cujo gráfico é a semicircunferência superior com centro na origem e raio 1.

   b) Defina uma função f cujo gráfico é a semicircunferência inferior com centro na origem e raio 1.

1.3. MONOTONICIDADE E PARIDADE DE FUNÇÕES.

DEFINIÇÃO 1: A função $f: A \to R$ é dita

i) crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall x,y \in A$.

ii) decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad \forall x,y \in A$.

Se uma função f é crescente ou decrescente em A, dizemos que ela é monótona em A.

DEFINIÇÃO 2: Dizemos que $f: A \to R$ é uma função par se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

i) Para qualquer $x \in A$, tem-se sempre que $-x \in A$.

ii) $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.

EXEMPLOS: Verifique que as funções abaixo são pares:

a) $f(x) = x^2$

SOLUÇÃO:

i) Temos que se $x \in R$, $-x \in R$.

ii) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \quad \forall x \in R$.

Logo, f é par.

b) $f(x) = 3|x|$.

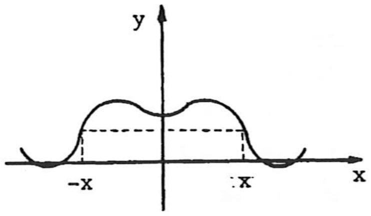
SOLUÇÃO:

i) Verifica-se.

ii) $f(-x) = 3|-x| = 3|x| = f(x), \forall x \in R$.

Logo, f é par.

OBSERVAÇÃO: O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.



DEFINIÇÃO 3: $f: A \to R$ é uma função ímpar se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

i) Para qualquer $x \in A$, temos que $-x \in A$.

ii) $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in A$.

EXEMPLOS: Verifique que as funções abaixo são ímpares:

a) $f(x) = 2x^5 - 9x$.

SOLUÇÃO:

i) Se $x \in R$, $-x \in R$.

ii) $f(-x) = 2(-x)^5 - 9(-x) = -2x^5 + 9x = -(2x^5 - 9x) = -f(x)\ \forall x \in R$.

Logo, f é ímpar.

b) $f(x) = \text{sen } x$

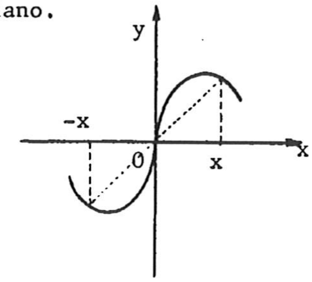
SOLUÇÃO:

i) Ok.

ii) $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)\quad \forall x \in R$.

Logo, f é ímpar.

OBSERVAÇÃO: O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.



EXERCÍCIOS 1.3.

1. Em cada uma das seguintes funções, verifique se f é par, ímpar ou sem paridade.

a) $f(x) = x^4 + 3$

b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$

c) $f(x) = x^4 + x$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = |x| + 5$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

h) $f(x) = \cos x$

i) $f(x) = \text{tg } x$

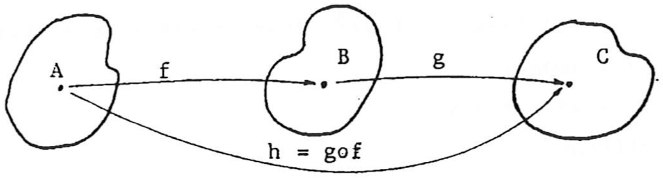
2. Demonstre que se f e g são funções ímpares então $(f + g)$ e $(f - g)$ são também funções ímpares.

3. Demonstre que se f e g são funções ímpares então $f.g$ e $\dfrac{f}{g}$ são funções pares.

4. Ache 2 funções ímpares cuja soma é uma função par.

1.4. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES.

DEFINIÇÃO: Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$. A função composta de g com f, indicada $g \circ f$, é uma função $h: A \to C$ dada por $h(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$.



OBSERVAÇÃO: Para a existência da função composta não é essencial que o domínio de g seja todo B, e sim apenas que contenha a imagem de f. Assim, o **domínio** de $g \circ f$ é o conjunto de todos os elementos x do domínio de f tais que $f(x)$ esteja no domínio de g.

EXEMPLOS: a) Se $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$, ache $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

SOLUÇÃO:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-2x + 3) = 4(-2x + 3) - 1 = -8x + 11$.

O domínio de $g \circ f$ é R.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 1) = -2(4x - 1) + 3 = -8x + 5$.

O domínio de $f \circ g$ é R.

Note que, pelo exemplo, $f \circ g \neq g \circ f$

b) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Encontre $(f \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$, determinando o domínio de cada função composta.

SOLUÇÃO:

O domínio de f é $[0,+\infty) = \{ x \in R \mid x \geq 0\}$ e o domínio de g é R.

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt[4]{x}$

O domínio de $f \circ f$ é $[0,+\infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \in R \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$

O domínio de $g \circ g$ é R.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$.

O domínio de $g \circ f$ é $[0,+\infty)$

c) Sejam f e g definidas pelas relações

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , \text{ se } x < 1 \\ 2 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } x < 1 \\ 1 + x & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Obtenha a função $(f \circ g)(x)$.

SOLUÇÃO:

Temos $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Dividamos o problema em 2 casos:

i) $x < 1$

Se $x < 1$, por definição, $g(x) = 2$

Logo, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2) = 2$

ii) $x \geq 1$

Se $x \geq 1$, por definição, $g(x) = 1 + x$. Mas se $x \geq 1$, $1 + x \geq 2$

Logo, $g(x) = 1 + x \geq 2$.

Portanto, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2$

Então, $(f\circ g)(x) = 2, \quad \forall x$.

EXERCÍCIOS 1.4.

1. Em cada exercício abaixo, determine $(f\circ g)(x)$ e $(g\circ f)(x)$, bem como o domínio de cada função composta.

a) $f(x) = 8 - 3x$, $g(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x + 5}$

c) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

d) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $g(x) = x^2 + 3$

e) $f(x) = x$, $g(x) = 4$

f) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

2. Se $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encontre duas funções g do tipo $ax + b$, para as quais $(f\circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

1.5. ÁLGEBRA DE FUNÇÕES.

DEFINIÇÃO: Sejam f e g duas funções, D a interseção não vazia de seus domínios e λ um número real. Então:

i) a soma de f e g, indicada por $(f + g)$, é a função definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in D$.

ii) a diferença de f e g, indicada por $(f - g)$, é a função definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in D$.

iii) o produto de f por g, indicado por $(f.g)$, é a função definida por $(f.g)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in D$.

iv) o quociente de f por g, indicado por $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, é a função definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall\ x \in D$ com $g(x) \neq 0$.

v) o produto de λ por f, indicando (λf), é a função definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in D$..

EXEMPLOS: Sejam f a função definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$ e g a função definida por $g(x) = \sqrt{x-5}$. Encontre $(f+g)(x)$; $(f-g)(x)$; $(fg)(x)$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Em cada caso, determine o domínio da função resultante.

SOLUÇÃO:

$$(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-5}$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-5}$$
$$(f.g)(x) = \sqrt{x-1}\ \sqrt{x-5}$$
$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-5}}$$

O domínio de f é $[1, +\infty)$ e o domínio de g é $[5, +\infty)$.
Logo, o domínio das três primeiras funções é $[5, +\infty)$. O domínio de (f/g) é $(5, +\infty)$ pois o denominador se anula em $x = 5$.

EXERCÍCIOS 1.5.

1. Nos exercícios abaixo, determine as funções f + g, f − g , f.g e f/g Determine, também, seus domínios.
   a) $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 3$
   b) $f(x) = g(x) = \sqrt{x-8}$
   c) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x-2|$
   d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
   e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$

2. Se f e g são duas funções polinomiais de grau 3, pode-se afirmar que f + g e f.g também são funções de grau 3? Justifique.

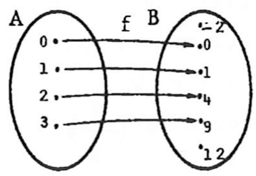
1.6. CLASSIFICAÇÃO DE FUNÇÕES.

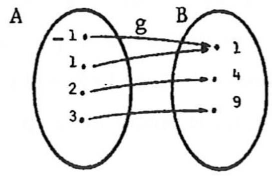
Seja $f: A \to B$

DEFINIÇÃO 1: Dizemos que uma função f é injetora se:

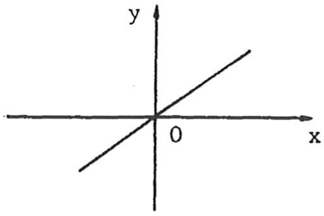
$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \qquad x, y \in A.$$

EXEMPLOS: a) As funções f e g definidas pelos diagramas abaixo são tais que f é injetora e g não é injetora.

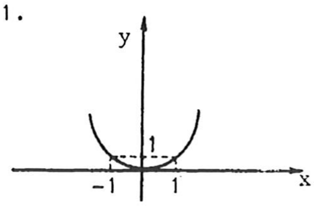




b) A função $f(x) = x$, cujo gráfico é esboçado abaixo, é injetora:



c) A função $g(x) = x^2$ não é injetora, pois, por exemplo, $f(-1) = f(1) = 1$.



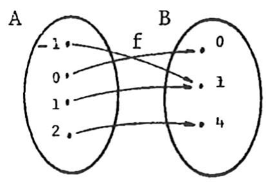
CONSEQÜÊNCIA : Como consequência da definição podemos dizer que uma função f é injetora se:

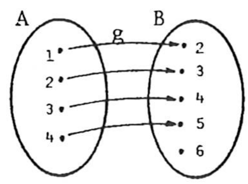
$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, $x, y \in A$.

Dizemos que se estabelece uma correspondência um a um entre o domínio e a imagem de f.

DEFINIÇÃO 2: A função f é sobrejetora se $f(A) = B$, ou seja, para cada $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que, $y = f(x)$.

EXEMPLO: A função f abaixo, definida por meio do diagrama, é uma função sobrejetora. Já a função g não é sobrejetora.





DEFINIÇÃO 3: A função f é dita bijetora se for injetora e sobrejetora, isto é, se para cada $y \in B$ existir um único ponto $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Dizemos que se estabelece uma correspondência um a um entre o domínio e o contradomínio de f.

EXERCÍCIOS 1.6.

1. Nos exercícios abaixo, dados os conjuntos A e B e a função $f: A \to B$, verifique se f é injetora, sobrejetora e bijetora:

   a) $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{1,3,5,9\}$, $f(x) = 2x - 1$.

b) $A = \{-2,-\sqrt{2},-1, 0, 1, \sqrt{2}, 2\}$, $B = \{-1,0,1,2,3\}$, $f(x) = x^2 - 1$.

c) $A = \{-2,-1,0,1\}$, $B = \{0,1,16\}$, $f(x) = x^4$.

2. Seja $f: A \to B$. Mostre, através de exemplos e contra-exemplos, que:

a) $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ se, e só se, f for injetora, quaisquer que sejam os subconjuntos C e D de A.

b) $f(\bar{C}) \supset \overline{f(A)}$ qualquer que seja $C \subset A$ se, e só se, f for sobrejetora.

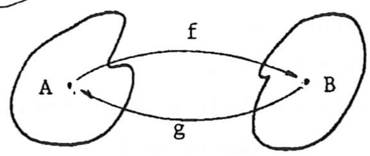
c) $f(\bar{C}) \subset \overline{f(A)}$ qualquer que seja $C \subset A$ se, e só se, f for injetora.

1.7. INVERSÃO DE FUNÇÕES.

DEFINIÇÃO: Dizemos que $f: A \to B$ é inversível se existe $g: B \to A$, tal que

$g \circ f = I_A$, isto é, $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$.

e $f \circ g = I_B$, isto é, $(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in B$.



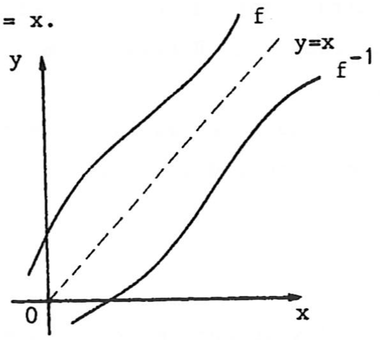
A função g é chamada função inversa de f e é indicada por f^{-1}.

OBSERVAÇÕES:

i) Uma função $f: A \to B$ é inversível se, e somente se, f é bijetora.

ii) Se $f: A \to B$ é uma função bijetora, então o domínio e o contra-domínio de f são, respectivamente, o contra-domínio e o domínio da sua inversa f^{-1}

iii) Os gráficos de f e f^{-1} são curvas simétricas com relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, em relação à reta $y = x$.



EXEMPLOS: a) Sendo $f: R \to R$ tal que $f(x) = 2x - 1$, obtenha $f^{-1}(x)$. Esboce seus gráficos.

SOLUÇÃO:

Não é difícil verificar que f é bijetora, com domínio e contra-domínio R. Logo, a função inversa f^{-1} existe.

Fazendo $y = 2x - 1$, e exprimindo x em funçaõ de y , temos.

$$x = \frac{y + 1}{2}$$

Como é mais comum x designar a variável independente, podemos escrever:

$$y = \frac{x + 1}{2} \text{ , ou seja } f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$$

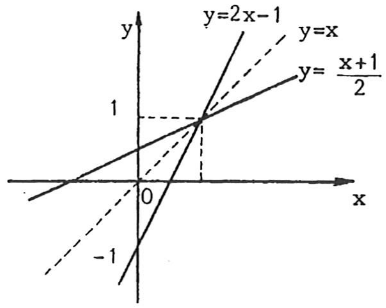
Uma rápida verificação pode ser feita:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 1}{2}\right) = 2.\frac{x + 1}{2} - 1 = x$$

$$\text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 1) = \frac{(2x - 1) + 1}{2} = x$$

Isto prova que f^{-1} é, realmente, a inversa de f.

Os esboços dos gráficos são feitos abaixo:



$\frac{9x}{9} + \frac{36}{9}$

b) Sendo $f: [0, +\infty) \to [-3, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 3$, obtenha $f^{-1}(x)$ e esboce seus gráficos.

SOLUÇÃO:

O domínio natural de f(x) foi restringido de modo a tornar f bijetora.

Como no exemplo anterior, consideremos;

$$y = x^2 - 3.$$

Isolando-se x, temos

$$x = \pm\sqrt{y + 3}.$$

Como x é não negativo,

$$x = \sqrt{y + 3}.$$

Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$, $x \geq -3$.

$$y = \frac{2x-3}{3x-2}$$

$x \quad 3$

$x = \frac{2y-3}{3y-2}$

$3xy - 2x = 2y - 3$

$3xy - 2y = 2x - 3$

$y(3x-2) = 2x-3$

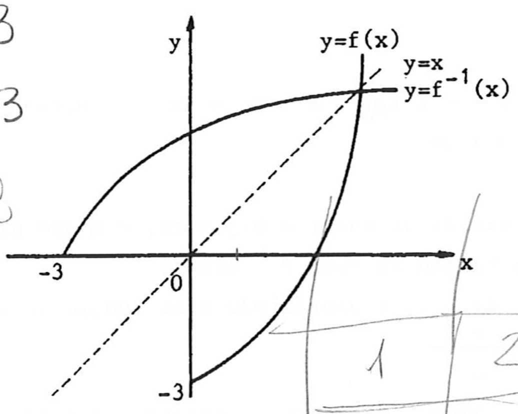
$y(3x-2) = 2x-3$

$3xy - 2y = 2x - 3$

$3xy - 2x = 2y - 3$

$x(3y-2) = 2y-3$

$x = \frac{2y-3}{3x-2}$



1	2*(A181)-3/3*(A181
2	
3	
4	

EXERCÍCIOS 1.7.

1. Nos exercícios abaixo, prove que f e g são inversas.

   a) $f(x) = 9x - 4$, $g(x) = \frac{x+4}{9}$

   b) $f(x) = \frac{2x-1}{5x+2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{2-5x}$

   c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $x \geqslant -\frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $x \geqq 0$.

2. Nos exercícios abaixo, determine a função inversa de f:

   a) $f(x) = x + 4$

   b) $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2}$

   c) $f(x) = 6 - x^2$, $0 \leqq x \leqq \sqrt{6}$

   d) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geqq 2$

   e) $f(x) = x$

   f) $f(x) = \frac{5}{x}$

   g) $f(x) = 2x^3 - 5$

3. Esboçar os gráficos de f e f^{-1} nos exercícios 2a, 2c e 2f.

$5x + 2 = 0$

$5x = -2$

$x = -\frac{2}{5}$

$2 - 5x = 0$

$5x = 2$

$x = \frac{2}{5}$

1.8. FUNÇÕES BÁSICAS.

1.8.1. FUNÇÃO AFIM

São funções do tipo $f(x) = ax + b$, $a,b \in R$, $a \neq 0$

OBSERVAÇÕES:

i) A função afim tem como gráfico uma reta.

ii) O gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0,b)$ e o eixo das abscissas no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$.

$3x - 2 \neq 0$

$3x \neq 2$

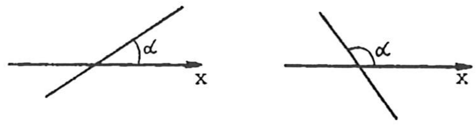
$x \neq \frac{2}{3}$

$\frac{2x}{5x+2} - \frac{1}{5x+2}$ $\quad y = \frac{5}{x}$ $\quad x = \frac{5}{y}$

$5xy + 2y = 2x - 1$

$5xy - 2x = -1 - 2y$

iii) Pode-se mostrar que a tangente do ângulo α (vide figuras abaixo) é igual à constante $\underline{a}$.



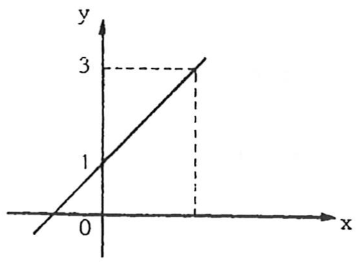
Assim, $a > 0 \Leftrightarrow 0^o < \alpha < 90^o$ e

$a < 0 \Leftrightarrow 90^o < \alpha < 180^o$

EXEMPLOS: Esboce os gráficos de

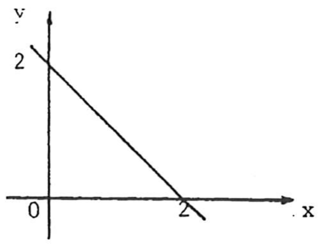
a) $f(x) = 2x + 1$.

SOLUÇÃO:



b) $f(x) = -x + 2$.

SOLUÇÃO:



EXERCÍCIOS 1.8.1.

1. Determine k de modo que a função afim $f(x) = (2k - 1)x + 3$ seja crescente.
2. Esboce os gráficos das seguintes funções:
   a) $f(x) = 3x$
   b) $f(x) = 2x + 5$
   c) $f(x) = -x - 4$

$\frac{20}{15} = \frac{14}{3}$ $\quad \frac{2x}{3}$

~~3~~. Se f é uma função afim tal que $f(1) = 9$ e $f(-2) = 3$, determine o valor de $f(5)$.

~~4~~. Resolver analítica e graficamente as inequações abaixo:

a) $2x + 5 < 0$

b) $-x + 4 > 0$

c) $-3x + 7 \leq 0$

d) $\frac{8 + x}{3} < \frac{5x - 10}{5}$

e) $\frac{x - 1}{3} - \left(\frac{x + 1}{2}\right) \geq 4$

f) $(-x - 1)(x + 1) \leq 0$

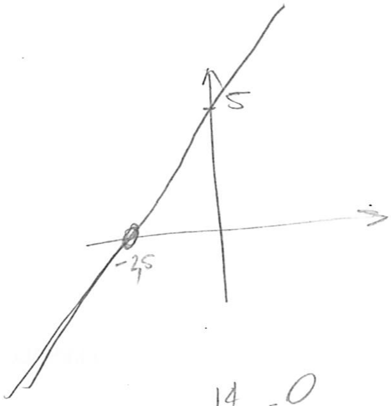
g) $(x - 3)(x - 1)(x + 2) \geq 0$

h) $\frac{4 - x}{2x + 3} \leq 0$

$-\frac{30}{3} + \frac{28}{2} \geq 4$

$-10 + 14 \geq 4$

$4 \geq 4$



$-\frac{2x}{3} + \frac{14}{3} = 0$

$\frac{2x}{3} = \frac{14}{3}$

$x = 7$

1.8.2. FUNÇÃO QUADRÁTICA

É toda função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

OBSERVAÇÕES:

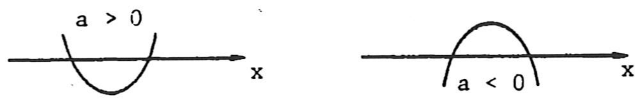
i) Seu gráfico é uma parábola com o eixo de simetria paralelo ao eixo y.

ii) A parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para cima caso $a > 0$. e a concavidade para baixo caso $a < 0$.

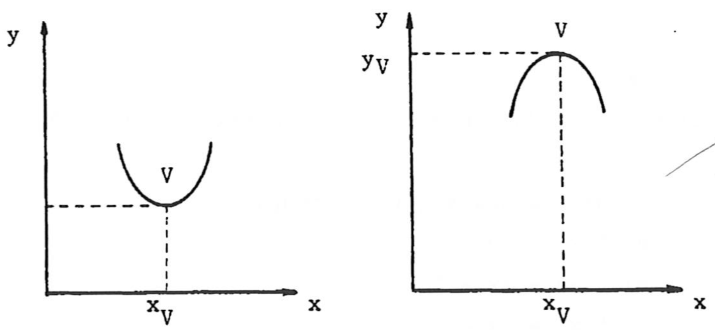
$-\frac{x}{6} - \frac{29}{6} = 0$

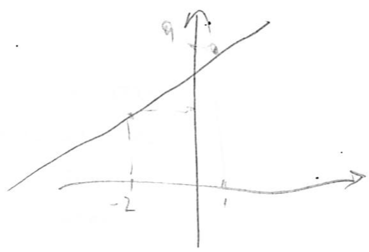
$-\frac{x}{6} = \frac{29}{6}$

$x = -29$



iii) O vértice da parábola tem coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.



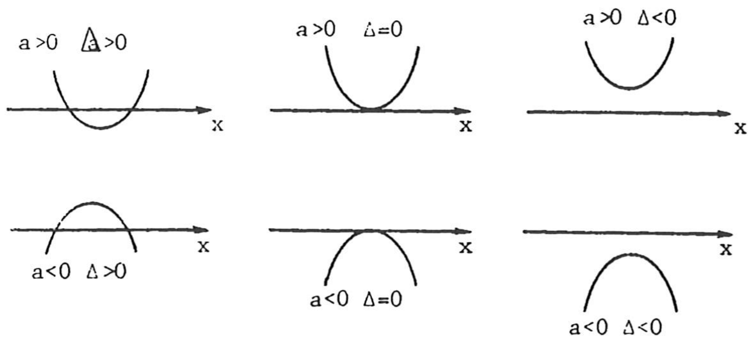


$\frac{13}{10}$

iv) As abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo x, se exitirem, são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

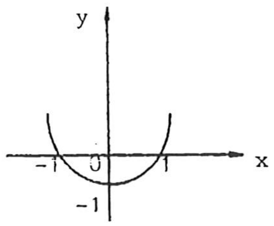
v) Posições características da parábola no plano cartesiano:



EXEMPLOS: 1. Esboçar os gráficos das funções:

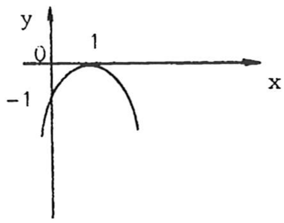
a) $f(x) = x^2 - 1$.

SOLUÇÃO:



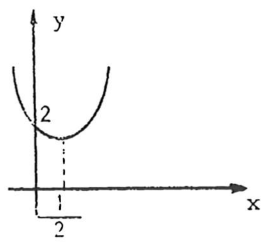
b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

SOLUÇÃO:



c) $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$.

SOLUÇÃO:



EXERCÍCIOS 1.8.2.

1. Esboçar os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 5x$

c) $f(x) = -x^2 + x - 1$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

2. Determine a expressão da função $f(x)$, onde f tem como gráfico uma parábola passando pelos pontos $(-1,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$.

3. Resolver as seguintes inequações:

a) $x^2 - 9x + 18 \geq 0$

b) $-x^2 - 16 < 0$

c) $x^2 + 2x + 14 > 0$

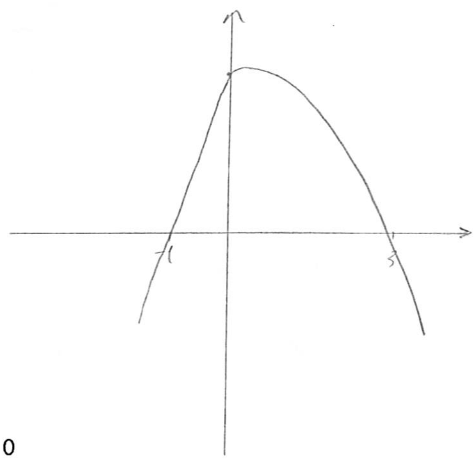
d) $-x^2 + 8x - 15 \geq 0$

e) $-x^2 - x - 1 \geq 0$

f) $(x^2 - 5x + 6)(x + 3) \geq 0$

g) $\dfrac{(2x + 1)(3 - 2x)}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$

h) $\dfrac{x + 1}{2 - x} > \dfrac{x}{3 + x}$



1.8.3. FUNÇÃO MODULAR

É a função $f(x) = |x| = x$, se $x \geq 0$

$= -x$, se $x < 0$

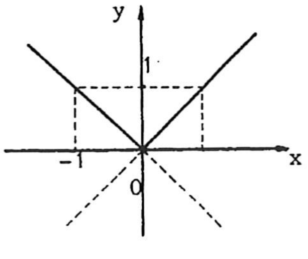
EXEMPLOS: Esboçar os gráficos das funções:

a) $f(x) = |x|$.

SOLUÇÃO:

Temos, por definição,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

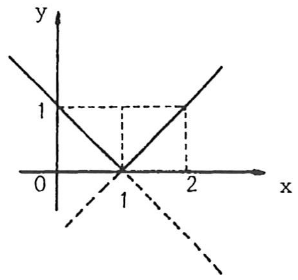


b) $f(x) = |x - 1|$

SOLUÇÃO:

Por definição,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ , & \text{se} \quad x - 1 \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq 1 \\ -x + 1 \ , & \text{se} \quad x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$$

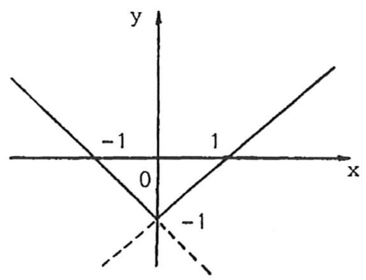


c) $f(x) = |x| - 1$.

SOLUÇÃO:

Por definição,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ , & \text{se } x \geqq 0 \\ -x - 1 \ , & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

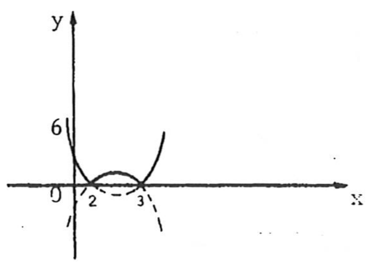


d) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

SOLUÇÃO:

Por definição,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se} \quad x^2 - 5x + 6 \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq 2 \text{ ou } x \geqq 3 \\ -x^2 + 5x - 6, & \text{se} \quad x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3 \end{cases}$$



EXERCÍCIOS 1.8.3.

1. Esboce os gráficos das seguintes funções:

   a) $f(x) = |x + 2|$

   b) $f(x) = |x| + 2$

   c) $f(x) = |x - 1| + 2$

   d) $f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$

   e) $f(x) = |x| + |x - 1|$

   f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

   g) $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$

2. Resolver as equações:

   a) $|x| = 7$

   b) $|x + 3| = 8$

   c) $|2x - 5| = -2$

   d) $|x^2 - 3x| = 4$

   e) $|x|^2 - 4|x| + 3 = 0$

3. Resolver as inequações:

   a) $|x| > 5$

   b) $|x| < 8$

   c) $|x| > -2$

   d) $|x| < -7$

   e) $|2x + 3| \geqq 2$

   f) $|x - 8| < 16$

   g) $|x - 4| + |x - 3| \geqq 1$

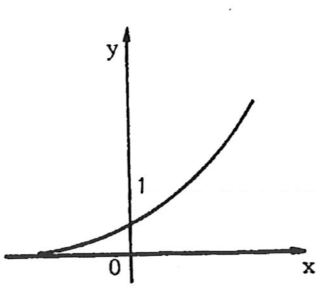
   h) $|-x^2 + x + 6| < 6$

1.84. FUNÇÃO EXPONENCIAL

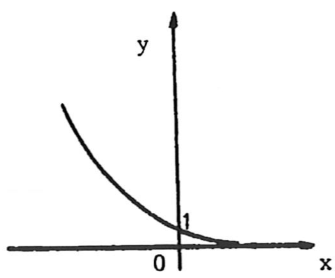
A toda função do tipo $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ chamamos de função exponencial.

OBSERVAÇÕES:

i) O gráfico de uma função exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.



$a > 1$



$0 < a < 1$

ii) Para a resolução de equações exponenciais, valemo-nos da relação:

$$a^x = a^y \iff x = y$$

EXEMPLO: Resolver.

$$(0,5)^{5x-3} = (2^{x-2})^2$$

SOLUÇÃO:

Temos $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-3} = 2^{2(x-2)} \Rightarrow (2^{-1})^{5x-3} = 2^{2x-4}$

Logo, $2^{-5x+3} = 2^{2x-4}$, ou seja,

$-5x + 3 = 2x - 4 \Rightarrow x = 1.$

Portanto; $s = \{1\}$

iii) Pela observação i, temos as seguintes relações que nos auxiliam na resolução de inequações exponenciais:

Se $a > 1$, $a^x < a^y \iff x < y$

Se $0 < a < 1$, $a^x < a^y \iff x > y$

EXERCÍCIOS 1.8.4.

1. Esboce os gráficos das seguintes funções:
   a) $f(x) = 2^x$
   b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
   c) $f(x) = 4^{x-1}$
   d) $f(x) = 3^{-x}$
2. Resolva as equações:
   a) $2^{2x} = 2^{x+4}$
   b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} 2^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+x}$
   c) $2^x = 3^x$
   d) $5^{x-1} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{25}}{5\sqrt{25}}}$
   e) $25^x - 30.5^x + 125 = 0$
3. Resolva as inequações:
   a) $3^x > 9^{2x-3}$
   b) $3^{2x} - 4.3^x + 3 \geq 0$
   c) $(0,5)^{x^2-4x+3} \leq 1$
   d) $(1/8)^{2x} < \sqrt[4]{32}$
   e) $x^{x^2+1} < x^{2x}$

1.8.5. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica, definida de R_+^* em R, é dada por:

$f(x) = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

se e só se; $a^{f(x)} = x$

OBSERVAÇÕES:

i) A função logarítmica é, portanto, a inversa da função exponencial.

ii) Listemos as propriedades básicas do logaritmo:

Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, $c > 0$ e $\alpha \in R$, então:

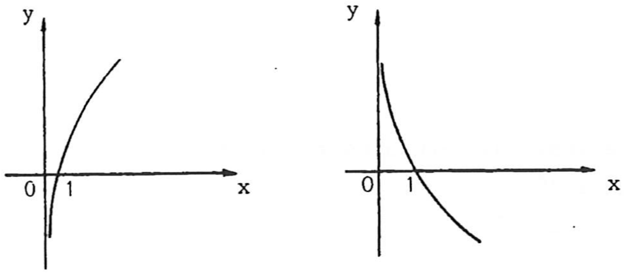
P1) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

P2) $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$

P3) $\log_b(a^\alpha) = \alpha \log_b a$

P4) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ $(c \neq 1)$

iii) O gráfico é crescente se a > 1 e decrescente se 0 < a < 1.



$f(x) = \log_b x$

iv) Para a resolução de equações logarítmicas, usamos a relação seguinte:

Se $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$$

EXEMPLO: Resolva $\log_2(2x - 6) = \log_2(x-1)$

SOLUÇÃO:

Condição de existência:

$2x - 6 > 0$ e $x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > 3$ e $x > 1$

Logo, CE: $\{ x \in R \mid x > 3 \}$

Aplicando a propriedade acima,

$2x - 6 = x - 1 \Rightarrow x = 5$

Portanto, $S = \{ 5 \}$

v) Para a resolução de inequações logarítmicas, temos as relações abaixo:

Se $a > 1$, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, então

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Se $0 < a < 1$, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, então

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

EXEMPLO: Resolver $\log_{1/2}(x^2 - 5x + 6) \leq \log_{1/2}(x^2 - 4)$

SOLUÇÃO:

Condição de existência:

$x^2 - 5x + 6 > 0$ e $x^2 - 4 > 0$

$\Longrightarrow$ $x < 2$ ou $x > 3$ e $x < -2$ ou $x > 2$

Logo, $CE = \{x \in R \mid x < -2$ ou $x > 3\}$

Temos

$x^2 - 5x + 6 \geq x^2 - 4 \Rightarrow -5x \geq -10 \Rightarrow x \leq 2$

Logo, observando a CE,

$S = \{ x \in R \mid x < -2\}$

EXERCÍCIOS 1.8.5.

1. Calcular

a) $\log_2 32$

b) $\log_{\sqrt{2}} 2$

c) $\log_5 1$

d) $\log_{128} 0,25$

2. Esboçar os seguintes gráficos:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = -\log_4 x$

c) $f(x) = \log_{1/5} x$

d) $f(x) = \log_4 (x - 1)$

3. Sendo $\log_{10} 2 = 0,30$ e $\log_{10} 3 = 0,47$, obter:

a) $\log_{10} 6$

b) $\log_{10} 1,5$

c) $\log_{10} 5$

d) $\log_{10} 72$

e) $\log_{27} 40$

4. Resolver as equações:

a) $\log_3(x + 1) + \log_3(x - 1) = \log_3 3$

b) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

c) $\log_2(x - 2) - \log_4(2x - 3) = 1$

d) $3\left[\log_8(x)\right]^2 + 3 = \log_8 x^{10}$

e) $x^{\log x^2} = 100$

5. Resolver as inequações:

a) $\log_3(3x - 2) \geq \log_3(x + 4)$

b) $\log_{1/2}(x + 2) + \log_{1/2}(x + 6) < \log_{1/2} 21$

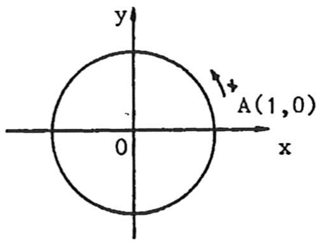
c) $\log_2 x - \log_4(x - \frac{3}{4}) \geq 1$

d) $\log_x 25 > \log_x 16$

e) $(\log x)^2 - 3\log x + 2 > 0$

1.8.6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINIÇÃO 1: Denominamos de circunferência trigonométrica a circunferência de centro na origem do plano cartesiano, de raio unitário e cujos arcos têm origem no ponto A(1,0), com sentido anti-horário positivo.

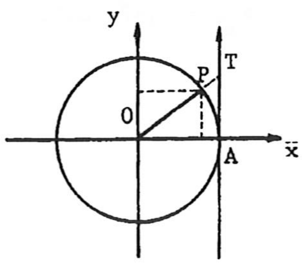


DEFINIÇÃO 2: Considere na circunferência trigonométrica um arco de medida x, com origem em A e extremidade em P. Então, por definição:

i) seno de x é a ordenada do ponto P

ii) cosseno de x é a abscissa do ponto P

iii) tangente de x é a ordenada do ponto T, intersecção da reta OP com o eixo tangente à circunferência pelo ponto A.



DEFINIÇÃO 3: Definimos as principais funções trigonométricas da seguinte forma:

i) Função seno: $f: R \to R$, $f(x) = \text{sen } x$

ii) Função cosseno: $f: R \to R$, $f(x) = \cos x$

iii) Função tangente: $f: R - \{\frac{\pi}{2} + h\pi\ ,\ h \in Z\} \to R$, $f(x) = \text{tg } x$

As outras funções trigonométricas são definidas pelas relações $\text{cotg} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\text{tg } x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

OBSERVAÇÕES:

i) Da definição, concluímos que a imagem das funções seno e cosseno é o intervalo $[-1, 1]$ e a imagem da função tangente é R.

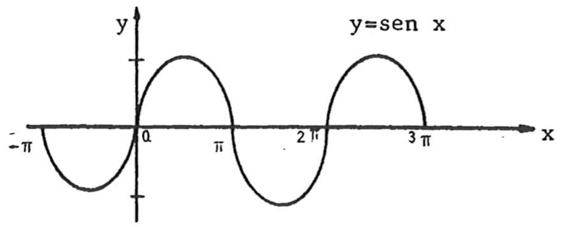
ii) A função cosseno (e, portanto, secante) ê par, enquanto as funções seno ($\Rightarrow$ cossecante) e tangente ($\Rightarrow$ cotangente) são ímpares.

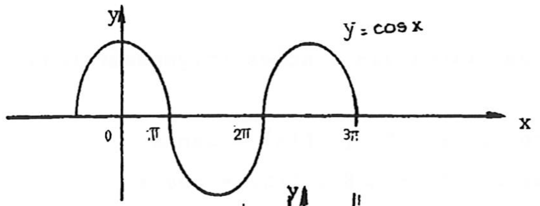
iii) As funções seno, cosseno, tangente são periódicas, de período 2π , 2π e π , respectivamente.

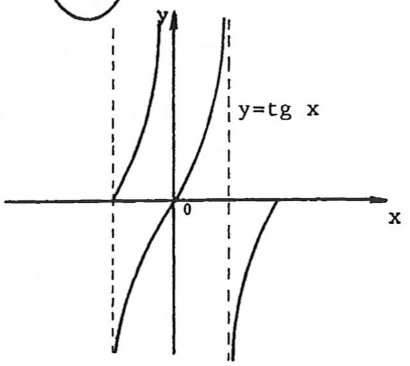
iv) Principais relações trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$
$$\text{sen } (x \pm y) = \text{sen } x \cos y \pm \text{sen } y \cos x$$
$$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen } x \text{ sen } y$$
$$\text{tg } (x \pm y) = \frac{\text{tg } x \pm \text{tg } y}{1 \mp \text{tg } x \text{ tg } y}$$
$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$
$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$$
$$\text{sen } p \pm \text{sen } q = 2 \text{ sen } \left(\frac{p \pm q}{2}\right) \cos \left(\frac{p \mp q}{2}\right)$$
$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2 \text{sen}\left(\frac{p + q}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

v) Gráficos;







EXERCÍCIOS 1.8.6.

1. Esboce os gráficos das funções $f(x) = \text{cotg } x$, $f(x) = \sec x$ e $f(x) = \text{cossec } x$.

2. Esboce os gráficos das funções abaixo, determinando seus períodos:

   a) $f(x) = 3 \text{ sen } x$

   b) $f(x) = 1 + \cos x$

   c) $f(x) = 2 \text{ sen } \dfrac{x}{2}$

   d) $f(x) = -2 \cos 2x$

   e) $f(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

   f) $f(x) = \text{tg } 2x$

   g) $f(x) = 3 \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

3. Resolva as equações:

   a) $\text{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

   b) $\dfrac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$

   c) $\text{sen}^3 x \cos x - \text{sen} x \cos^3 x = \dfrac{1}{4}$

   d) $\text{sen } 3x - \text{sen } 2x + \text{sen } x = 0$

4. Simplifique

$$\frac{\text{sen}(a - 30^{\circ}) + \cos(60^{\circ} - a)}{\text{sen}(a + 60^{\circ}) + \text{sen}(a - 60^{\circ})}$$

5. Mostre que a função

$$f(x) = \frac{\text{sen } 3e^{x}}{\text{sen } e^{x}} - \frac{\cos 3e^{x}}{\cos e^{x}}$$

é igual a 2 , qualquer que seja x pertencente ao domínio da função.

6. Sendo a, b, c ângulos internos de um triângulo não retângulo, prove que:

$$tg\ a + tg\ b + tg\ c = tg\ a.tg\ b.tg\ c.$$

1.8.7. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Seja a função $f(x) = sen\ x$. A fim de definirmos sua função inversa é necessário fazer a seguinte restrição, com o intuito de torná-la bijetora:

$$f:[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = sen\ x$$

Assim, podemos definir a função inversa.

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = arc\ sen\ x \qquad (\Leftrightarrow sen\ y = x)$$

Trabalhamos da mesma forma com as outras funções trigonométricas. Temos, então, a definição:

DEFINIÇÃO: Define-se:

i) Função Arcoseno: $f: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = arc\ sen\ x$$

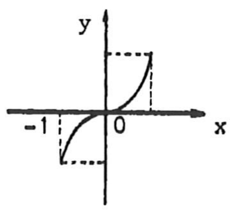
ii) Função Arco-cosseno: $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$f(x) = arc\ cos\ x$$

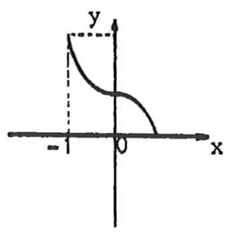
iii) Função Arco-tangente: $f: R \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = arc\ tg\ x$$

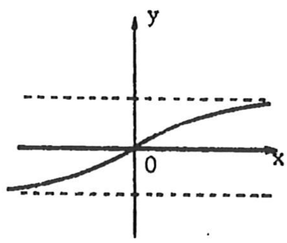
OBSERVAÇÃO: Gráficos:



y = arc sen x



y = arc cos x



y = arc tg x

EXERCÍCIOS 1.8.7.

1. **Calcular:**

a) arc sen 1

b) arc sen 0

c) arc sen (-1)

d) arc cos 0

e) arc cos $\frac{1}{2}$

f) arc cos $\left(-\frac{1}{2}\right)$

g) arc tg 1

h) arc tg 0

i) arc tg $\sqrt{3}$

2. Calcular $y = \text{sen}\left[2 \text{ arc sen } \frac{1}{2}\right]$

3. Resolver a equação sen [arc cos x]

4. Dar o domínio da função $f(x) = \text{arc sen } 3x$

5. Calcular $y = \text{sen}\left[2 \text{ arc sen} \frac{1}{3}\right]$

6. Prove que $\text{arc tg } \frac{1}{3} + \text{arc tg } 3 = \frac{\pi}{2}$

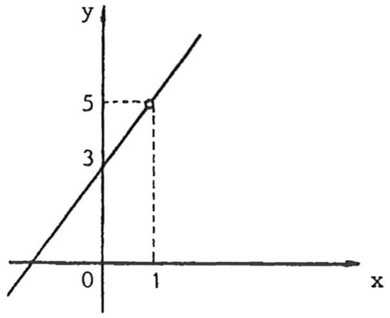
CAPÍTULO 2: LIMITE E CONTINUIDADE

2.1. LIMITE: DEFINIÇÃO

Antes de definirmos formalmente o limite, vejamos um exemplo. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

A função f está definida em $R - \{1\}$. Se $x \neq 1$, a função é dada por $f(x) = 2x + 3$ e temos, então, seu gráfico:



Estudaremos agora os valores de f(x) quando x estiver próximo a 1 mas não igual a 1. Fazendo a variável x aproximar-se de 1 através de valores menores e maiores que 1, podemos construir as tabelas abaixo:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$f(x) = 2x + 3$ $(x \neq 1)$	4,8	4,98	4,998	4,9998	4,99998

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001
$f(x) = 2x + 3$ $(x \neq 1)$	5,2	5,02	5,002	5,0002	5,00002

Vemos, em ambas as tabelas que quando x aproxima-se cada vez mais de 1, f(x) aproxima-se cada vez mais de 5. Ou seja, é possível fazer o valor de f(x) tão próximo de 5 quanto desejarmos, bastando, para isso, fazer o valor de x suficientemente próximo de 1.

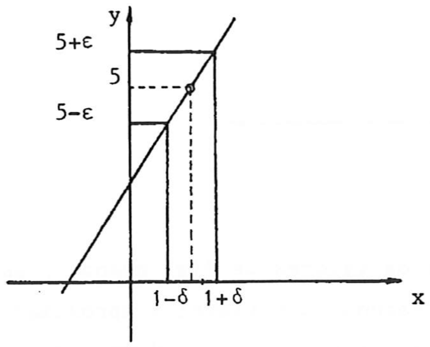
De fato, podemos escrever que

$$4{,}8 < f(x) < 5{,}2 \quad \text{sempre que } 0{,}9 < x < 1{,}1$$
$$4{,}98 < f(x) < 5{,}02 \quad \text{sempre que } 0{,}99 < x < 1{,}01$$
$$4{,}998 < f(x) < 5{,}002 \quad \text{sempre que } 0{,}999 < x < 1{,}001$$
$$4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002 \quad \text{sempre que } 0{,}9999 < x < 1{,}0001$$
$$4{,}99998 < f(x) < 5{,}00002 \quad \text{sempre que } 0{,}99999 < x < 1{,}00001$$

Usualmente, utilizamos as letras gregas ε (épsilon) e δ (delta) para indicar pequenos números reais positivos. Assim

$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$ sempre que $1 - \delta < x < 1 + \delta$, ou, usando notação modular,

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$



Por exemplo, a primeira expressão acima ocorre fazendo-se $\varepsilon = 0{,}2$ e $\delta = 0{,}1$; a segunda corresponde a $\varepsilon = 0{,}02$ e $\delta = 0{,}01$ e assim por diante.

A condição $0 < |x - 1|$ é colocada pois não nos interessa o que ocorre quando $x = 1$.

É importante perceber que o tamanho de δ depende do tamanho de ε. Poderiamos continuar a dar qualquer valor positivo pequeno a ε e encontrar um valor apropriado para δ tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$. Dizemos, então, que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 é igual a 5, ou em símbolos, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

Definamos o limite de uma função em geral.

DEFINIÇÃO: Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo $\underline{a}$ (exceto possivelmente no próprio $\underline{a}$) e seja L um número real. Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Traduzindo-se a definição acima em palavras, diríamos que $f(x)$ pode tornar-se tão próximo de L quanto se deseja, escolhendo-se x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

EXEMPLOS:

a) Seja f a função definida pela equação $f(x) = 3x + 7$. Dado que $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$, encontre um δ para $\varepsilon = 0,03$ tal que

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x + 2| < \delta$$

SOLUÇÃO:

Temos $|f(x) - 1| = |(3x + 7) - 1| = |3x + 6| = 3|x + 2|$

Assim, devemos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$3|x + 2| < 0,03 \text{ seja válido sempre que } 0 < |x + 2| < \delta$$

A condição $3|x + 2| < 0,03$ é equivalente a $|x + 2| < 0,01$. Assim, devemos determinar um $\delta > 0$ tal que $|x + 2| < 0,01$ seja válido sempre que $0 < |x + 2| < \delta$. Obviamente um δ que nos serve é $\delta = 0,01$, bem como qualquer outro valor positivo menor.

b) Usando a definição, demonstre que

$$\lim_{x \to 4} (3x - 1) = 11$$

SOLUÇÃO:

Devemos mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|(3x - 1) - 11| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta$$

Temos:

$$|(3x - 1) - 11| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4|$$

Logo, queremos

$$3|x - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta$$

ou seja,

$$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta$$

Assim, se escolhermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, teremos

$$|(3x - 1) - 11| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta$$

demonstrando, então, que

$$\lim_{x \to 4} (3x - 1) = 11$$

Obviamente, qualquer número positivo menor que $\dfrac{\varepsilon}{3}$ pode ser usado no lugar de δ

c) Usando a definição, demonstre que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

SOLUÇÃO:

Devemos mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |x - 2| < \delta$$

Fatorando, obteremos,

$$|x^2 - 4| = |x - 2|\ |x + 2|$$

Uma vez que estamos considerando valores de x próximos de 2, podemos nos restringir somente a valores de x para os quais $|x - 2| < 1$; isto é, queremos que o δ que procuramos seja menor ou igual a 1.

Temos,

$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow 3 < x + 2 < 5.$

Logo, se $|x - 2| < 1$, então $3 < |x + 2| < 5$.

Portanto,

$|x^2 - 4| = |x - 2|\ |x + 2| < |x - 2| \cdot 5$ sempre que $|x - 2| < 1$.

Queremos

$|x - 2| . 5 < \varepsilon$, ou seja, $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

Portanto, se escolhermos δ como o mínimo entre 1 e $\dfrac{\varepsilon}{5}$, então sempre que $|x - 2| < \delta$, segue que $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ e $|x + 2| < 5$ e, assim, $|x^2 - 4| < \dfrac{\varepsilon}{5} . 5$. Portanto, concluímos que

$|x^2 - 4| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - 2| < \delta$ se

$\delta = \min \left(1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$

TEOREMA (de unicidade): Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

DEM: Supomos que $L_1 \neq L_2$ e mostraremos que esta suposição leva a uma contradição.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, dado $\varepsilon > 0$, exite um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad (1)$$

Também, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad (2)$$

pois $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$

Temos, usandoa desigualdade triangular $|a - b| \leq |a| + |b|$

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|.$$

Logo, por (1) e (2), dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que:

$|L_1 - L_2| < \varepsilon + \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x-a| < \delta_2$ (3)

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; então $\delta \leqq \delta_1$ e $\delta \leqq \delta_2$ e (3) estabelece que:

$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Se tomamos $\varepsilon = \dfrac{1}{2} |L_1 - L_2|$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Mas , isto é uma contradição. Logo, a nossa suposição é falsa e, então, $L_1 = L_2$.

EXERCÍCIOS 2.1.

1. Nos exercícios abaixo, damos f(x), a e L, bem como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Determine um δ para o ε dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

   a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$; $\varepsilon = 0{,}0001$

   b) $\lim\limits_{x \to -1} (1 - 2x) = 3$; $\varepsilon = 0{,}0005$

   c) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$; $\varepsilon = 0{,}0005$

   d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$; $\varepsilon = 0{,}0005$

   e) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 1}{2} = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$

   f) $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$; $\varepsilon = 0{,}01$

2. Nos exercícios abaixo, demonstre os limites, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, encontre um $\delta > 0$ talque $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$:

   a) $\lim\limits_{x \to 4} (2x - 5) = 3$

   b) $\lim\limits_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$

   c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

   d) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$

   e) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{8}{x - 3} = 2$

   f) $\lim\limits_{x \to 3} 8 = 8$

2.2. PROPRIEDADES DOS LIMITES DE FUNÇÕES.

Seria muito trabalhoso se tivéssemos que resolver cada problema de limite utilizando a definição. Assim, nesta seção introduziremos propriedades que nos auxiliarão no cálculo de limites.

PROPRIEDADE 1 (P1) - Se $\underline{m}$ e $\underline{b}$ são constantes quaisquer, então;

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b.$$

DEM:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, devemos demonstrar que existe um $\delta > 0$ tal que

$$|(mx + b) - (ma + b)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Caso 1: $m \neq 0$

Temos

$$|(mx + b) - (ma + b)| = |mx - ma| = |m||x - a|$$

Logo, queremos um $\delta > 0$ tal que

$$|m||x - a| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{, ou, desde que } m \neq 0.$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Isto é válido se tomarmos $= \dfrac{\varepsilon}{|m|}$

Assim,

$$|(mx + b) - (ma + b)| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{, se } \delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$$

Caso 2: $m = 0$

Se $m = 0$, então $|(mx + b) - (ma + b)| = 0 \ \forall x$. Assim, tomamos δ um número positivo qualquer e a propriedade está provada.

CONSEQUÊNCIA 1: Se c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} c = c$$

CONSEQUÊNCIA 2: $\lim\limits_{x \to a} x = a$

EXEMPLOS:

Da propriedade P1, temos

$$\lim_{x \to 1} 8 = 8, \quad \lim_{x \to 8} \sqrt{2} = \sqrt{2}, \quad \lim_{x \to 0} x = 0, \quad \lim_{x \to 4} (3x - 5) = 7,$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} (13x + \sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$$

P2 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M.$$

DEM: Demonstraremos a soma:

Dado $\varepsilon > 0$, devemos provar que existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Como $\lim f(x) = L$, dado $\frac{\varepsilon}{2}$ 0, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L|$ $\frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

Analogamente, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$|g(x) - M|$ $\frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$

Seja δ o mínimo entre δ_1 e δ_2. Logo, $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$

Então,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Portanto,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

CONSEQUÊNCIA: Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

então,

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

P_3 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x) = L.M$$

CONSEQUÊNCIA 1: Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_n$,

então $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x).f_2(x)\ldots f_n(x)] = L_1.L_2\ldots L_n$

CONSEQUÊNCIA 2: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer.

então, $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n = L^n$

P_4 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ e $M \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

P_5 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)^n = L$, então

$$\lim_{x \to a} f(x)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n,$$

Se $L \geqslant 0$ e n for um inteiro positivo qualquer, ou

Se $L \leqslant 0$ e n for um inteiro positivo ímpar qualquer.

P_6- Se g é uma função tal que g(x) = f(x) é válido para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo ao redor de a, exceto x = a, então

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, se os limites existem

EXEMPLOS: Nos exemplos abaixo, ache cada limite e indique quais propriedades foram usadas:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 7x + 8)$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 7x + 8) = \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 7x + \lim_{x \to 2} 8 = \qquad (P_2)$$

$$= (\lim_{x \to 2} x)^2 - \lim_{x \to 2} 7.\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 8 = \qquad (P_3)$$

$$= 2^2 - 7.2 + 8 = -2 \qquad (P_1)$$

b) $$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 + 3\sqrt{x}}{4 - \frac{16}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 8}(x^2 + 3\sqrt{x})}{\lim\limits_{x \to 8} (4 - \frac{16}{x})} = \qquad (P_4)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 8} x^2 + \lim\limits_{x \to 8} 3\sqrt{x}}{\lim\limits_{x \to 8} 4 - \lim\limits_{x \to 8} \frac{16}{x}} = \qquad (P_2)$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x \to 8} x)^2 + \lim\limits_{x \to 8} 3.\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x}}{\lim\limits_{x \to 8} 4 - \frac{\lim\limits_{x \to 8} 16}{\lim\limits_{x \to 8} x}} = \qquad (P_3 - P_4)$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x \to 8} x)^2 + \lim\limits_{x \to 8} 3.\sqrt{\lim\limits_{x \to 8} x}}{\lim\limits_{x \to 8} 4 - \frac{\lim\limits_{x \to 8} 16}{\lim\limits_{x \to 8} x}} = \qquad (P_5)$$

$$= \frac{8^2 + 3.\sqrt{8}}{4 - \frac{16}{8}} = \qquad (P_1)$$

$$= \frac{64 + 6.\sqrt{2}}{2} = 32 + 3\sqrt{2}$$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \sqrt[3]{\dfrac{x - \pi}{x + \pi}}$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to \pi} \sqrt[3]{\frac{x - \pi}{x + \pi}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{x + \pi}} = \qquad (P_5)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \to \pi} (x - \pi)}{\lim_{x \to \pi} (x + \pi)}} = \qquad (P_4)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \to \pi} x - \lim_{x \to \pi} \pi}{\lim_{x \to \pi} x + \lim_{x \to \pi} \pi}} = \qquad (P_2)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\pi - \pi}{\pi \quad \pi}} = \qquad (P_1)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{0}{2\pi}} = 0$$

d) $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$

SOLUÇÃO:

A propriedade 4 não é aplicável aqui, pois, $\lim_{x \to 7} (x - 7) = 0$

Entretanto, $\frac{x^2 - 49}{x - 7} = x + 7$ é válido para todo $x \neq 7$.

Assim, pela propriedade 6,

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} = \lim_{x \to 7} (x + 7) = \qquad (P_6)$$

$$= \lim_{x \to 7} x + \lim_{x \to 7} 7 = \qquad (P_2)$$

$$= 7 + 7 = \qquad (P_1)$$

$$= 14$$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

SOLUÇÃO:

Novamente, não podemos aplicar P_4

O artifício a ser usado é multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{4 + x} + 2$, a fim de racionalizar o numerador.

Temos:

$$\frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x} = \frac{(\sqrt{4 + x} - 2)(\sqrt{4 + x} + 2)}{x(\sqrt{4 + x} + 2)} = \frac{(4 + x) - 4}{x(\sqrt{4 + x} + 2)} =$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \qquad (P_6)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{4+x}+2} = \qquad (P_4)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4+x} + \lim\limits_{x \to 0} 2} = \qquad (P_2)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 0} 4 + \lim\limits_{x \to 0} x} + \lim\limits_{x \to 0} 2} = (P_5 - P_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \qquad (P_1)$$

$$= \frac{1}{4}$$

EXERCÍCIOS 2.2.

1. Nos exercícios abaixo, encontre os limites, indicando as propriedades usadas:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 6x^2 + 3x - 2)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+3}{2x^2 - 6x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ $(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 2x + 1}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1/\sqrt{x}) - 1}{1 - x}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \sqrt[3]{\dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}}$

2. Seja a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & , \text{ se } x \neq -3 \\ 4 & , \text{ se } x = -3 \end{cases}$$

a) Encontre $\lim_{x \to -3} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$

b) Trace um esboço do gráfico de f.

2.3. LIMITES LATERAIS.

Temos as definições:

DEFINIÇÃO 1: Seja f definida em um intervalo (a,c). Então, o limite de f(x) quando x tende a a pela direita será L, escrito $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < x - a < \delta$$

DEFINIÇÃO 2: Seja f definida em um intervalo (d,a). Então, o limite de f(x) quando x tende a a pela esquerda será L, escrito $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } -\delta < x - a < 0.$$

Então, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a porém maior que a.

Analogamente, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejarmos, fazendo x suficientemente próximo a a porém menor que a.

TEOREMA: $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual a L se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e ambos forem iguais a L.

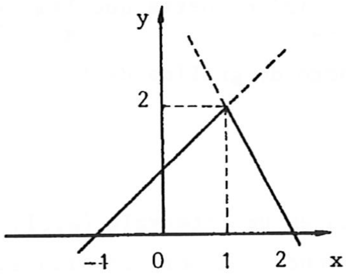
DEM: Exercício.

OBSERVAÇÃO: As propriedades de limite dadas na seção 2.2. permanecem inalteradas quando "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

EXEMPLOS: Em cada exemplo, trace o gráfico da função, ache os limites laterais da função quando $x \to a^-$ e quando $x \to a^+$ e determine o limite da função quando $x \to a$ (se existir).

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 1 \\ -2x + 4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$; $a = 1$.

SOLUÇÃO:



Temos, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$ e

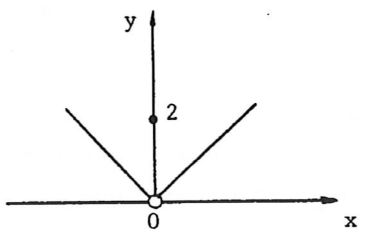
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-2x + 4) = 2.$

Como os limites laterais existem e têm o mesmo valor 2,

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $a = 0$.

SOLUÇÃO:



Pela propriedade 6 da seção anterior,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x|$.

Logo,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = |\lim\limits_{x \to 0} x| = |0| = 0$

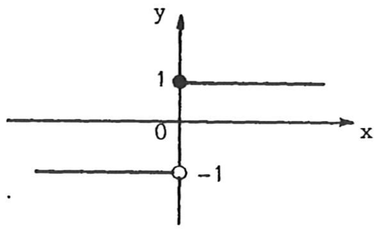
Pelo teorema acima,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad ;\ a = 0$$

Temos que,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{se } x \geqslant 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Temos, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, segue do teorema acima que

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

EXERCÍCIOS 2.3.

1. Nos exercícios abaixo, esboce o gráfico de $f(x)$, calcule $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (se existir).

$$a)\ f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad ;\ a = 2.$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{se } x \neq 4 \\ 5, & \text{se } x = 4 \end{cases} \quad ;\ a = 4.$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 7 - 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad ;\ a = 1.$$

d) $f(x) = 5 + |6x - 3|$; $a = \dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 , & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$; $a = 2$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 10}{|x + 10|}, & \text{se } x \neq -10 \\ 0 , & \text{se } x = -10 \end{cases}$; $a = -10$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} , & \text{se } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \\ 0 , & \text{se } x = -1 \text{ e } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

h) $f(x) = \begin{cases} 5 + x ; & \text{se } x \leq 3 \\ 9 - x ; & \text{se } x > 3 \end{cases}$; $a = 3$

2. Dados.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 , & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1 , & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 , & \text{se } x \leq 1 \\ 2 , & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

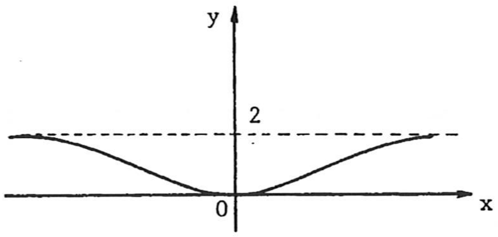
Obtenha $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) . g(x)]$, caso existam.

2.4. LIMITES NO INFINITO.

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Um esboço do gráfico é mostrado abaixo:



Alguns valores da função são colocados na tabela abaixo:

x	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1000
$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$	1,999998	1,9998	1,980198	1	0	1	1,980198	1,9998	1,999998

Percebemos, pelo gráfico e pela tabela, que à medida que x cresce ilimitadamente através de valores positivos ou decresce ilimitadamente através de valores negativos, os valores da função f(x) se aproximam cada vez mais de 2.

Quando uma variável x está crescendo ilimitadamente através de valores positivos, escrevemos "$x \to +\infty$". Da mesma foram, "$x \to -\infty$", indica que a variável x está decrescendo ilimitadamente.

Assim, podemos escrever.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

no sentido de que podemos tornar a diferença entre 2 e f(x) tão pequena quanto desejarmos, tomando x cada vez maior.

De igual modo, podemos escrever

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$$

indicando que posso fazer $|f(x) - 2|$ tão pequeno quanto se queira, ao tomar x cada vez menor negativamente.

Formalmente, temos as definições:

DEFINIÇÃO: Suponha que a função f esteja definida em um intervalo $(a,+\infty)$ [respectivamente, $(-\infty,a)$]. Dizemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \left[\text{respectivamente, } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L\right]$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número positivo N [respectivamente, número negativo N] tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > N \quad [\text{respectivamente}, x < N]$$

EXEMPLO: Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x} = 1$, pela definição.

SOLUÇÃO:

Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um número N (dependendo de ε) tal que

$$\left|\frac{x + 1}{x} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > N$$

Mas $\left|\dfrac{x + 1}{x} - 1\right| = \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

Logo, quero N tal que

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > N,$$

ou seja $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$ sempre que $x > N$.

Tomando $N = \frac{1}{\varepsilon}$ temos

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon \text{ sempre que } x > N, \text{ isto é } \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

TEOREMA : Se r é um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

DEM: Demonstremos a primeira parte:

Devemos mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > N,$$

ou seja,

$$|x^r| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{sempre que } x > N,$$

ou seja,

$$|x| > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{sempre que } x > N.$$

Tomando $N = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}}$, podemos concluir que

$$\left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > N, \text{ ou seja,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

PROPRIEDADES: As propriedades 1,2,3,4 e 5 dadas na seção 2.2. permanecem inalteradas quando "$x \to a$" é substituído por "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$".

EXEMPLOS: Calcule os limites.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{5x-2}$

SOLUÇÃO:

Para utilizarmos o teorema acima, dividamos o numerador e o denominador por x:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{5x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{5 - \frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \to +\infty} \left(5 - \frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 5 - \lim_{x \to +\infty} 2.\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{5-2.0} = \frac{2}{5}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$

SOLUÇÃO:

Dividamos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no numerador ou no denominador. Neste caso é x^3. Então,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{2.0 - 0 + 3.0}{1 - 8.0 + 5.0} = 0$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x}{\sqrt[4]{3x^4 + 5}}$

SOLUÇÃO:

Dividamos o numerador e o denominador por x. No denominador, tomamos $x = \sqrt[4]{x^4}$, uma vez que consideramos valores positivos de x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{\sqrt[4]{3x^4 + 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{\sqrt[4]{3x^4 + 5}/\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{\sqrt[4]{3 + \frac{5}{x^4}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 8}{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[4]{3 + \frac{5}{x^4}}} = \frac{8}{\sqrt[4]{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x^4}}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt[4]{3 + 0}} = \frac{8}{\sqrt[4]{3}}$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

SOLUÇÃO:

A solução é idêntica ao exemplo anterior. Entretanto, como estamos considerando valores negativos de x, $x = -\sqrt{x^2}$.

Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{2x^2 - 5}/-\sqrt{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (3 + \frac{4}{x})}{\lim\limits_{x \to -\infty} (-\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}})} =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

EXERCÍCIOS 2.4.

1. Nos exercícios abaixo, mostre, pela definição, que:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x + 3}{2x - 1} = 4$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x - 1} = 1$

2. Nos exercícios abaixo, calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x^2 - 7x}{7x^2 + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 7}{5x^2 - 8}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2}{2x^4 + 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x}{\sqrt[4]{3x^4 + 5}}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

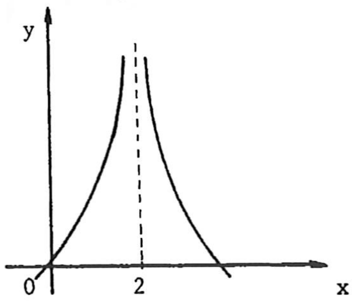
i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 - 7x + 3}{8x^2 + 5x + 1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{100} + x^{99}}{x^{101} - x^{100}}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

2.5. LIMITES INFINITOS

Temos abaixo o gráfico da função $f(x) = \dfrac{3}{(x - 2)^2}$



Observamos que podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando valores de x bastante próximos de 2, seja a aproximação sendo feita por valores menores ou maiores que 2.

Escrevemos,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty \text{, respectivamente.}$$

Portanto, quando x se aproxima de 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escrevemos.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Formalmente, temos a definição:

DEFINIÇÃO 1: Seja f definida num intervalo aberto contendo $\underline{a}$, exceto possivelmente no próprio $\underline{a}$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Se para qualquer $N > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Observação análoga pode ser feita para

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Assim temos:

DEFINIÇÃO 2: Seja f definida num intervalo aberto contendo $\underline{a}$, exceto possivelmente no próprio $\underline{a}$. Dizemos que,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Se para qualquer $N < 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

OBSERVAÇÕES:

i) Definições semelhantes podem ser feitas ao trocarmos, "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

ii) Limites infinitos no infinito podem ser considerados. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se a função é definida no intervalo aberto $(a, +\infty)$ e se para qualquer $N > 0$ existir um $M > 0$, tal que $f(x) > N$ sempre que $x > M$

EXEMPLO: Prove que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ pela definição.

SOLUÇÃO:

Devemos mostrar que para qualquer $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$\dfrac{3}{(x-2)^2} > N$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\frac{3}{(x-2)^2} > N$$

$$(x-2)^2 < \frac{3}{N} \iff |x-2| < \sqrt{\frac{3}{N}}$$

Logo, tomando $\delta = \sqrt{\dfrac{3}{N}}$,

$\dfrac{3}{(x-2)^2} > N$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$

PROPRIEDADES: P_1 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, c constante qualquer, então

i) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$

ii) Se $c > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \pm\infty$

iii) Se $c < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \mp\infty$

iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

P_2 - Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, c constante não nula então:

i) Se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores positivos de $f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

ii) Se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores negativos de $f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iii) Se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ através de valores positivos de $f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iv) Se $c < 0$ se $f(x) \to 0$ através de valores negativos de $f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

As propriedades P_1 e P_2 acima continuam válidas se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$", "$x \to a^-$", $x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$".

EXEMPLOS: Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

SOLUÇÃO:

Inicialmente, notemos que o limite do numerador é $1 > 0$.

Calculemos os limites laterais:

Temos

$\lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x^2) = 0$ e $f(x) = 1 - x^2$ se aproxima de zero por valores negativos.

Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1 - x^2} = -\infty$$

De igual modo,

$\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$ e $f(x) = 1 - x^2$ se aproxima de zero por valores positivos,

Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1 - x^2} = +\infty$$

Portanto, não existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{|x|}$

SOLUÇÃO:

Notemos que o limite do numerador é $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1) = 1 > 0$.

Também,

$\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = 0$ e, em ambos os casos, $|x|$ se aproxima de zero através de valores positivos.

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + 1}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + 1}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{|x|} = +\infty$$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

SOLUÇÃO:

O limite do numerador é $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 + x + 2) = 14 > 0$.

Temos que

$$\lim_{x \to 3^+} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \to 3^+} (x + 1)(x - 3) = 0$$

e a aproximação a zero é feita através de valores positivos.

Portanto,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 4}{5x + 3}$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4}{5x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}}$$

Consideremos os limites do numerador e do denominador separadamente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{4}{x^3}\right) = 2 > 0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = 0$$

Temos, então, o limite de um quociente no qual o limite do numerador é 2 e o limite do denominador é 0, onde o denominador está se aproximando de 0 através de valores positivos.

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4}{5x + 3} = +\infty$$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

SOLUÇÃO:

Como trabalhamos com valores positivos de x, $x = \sqrt{x^2}$. Então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}}$$

Temos,

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 0$ e a aproximação é feita por valores positivos.

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = +\infty$$

EXERCÍCIOS 2.5.

1. Prove, pela definição, que. $\lim_{x \to 4} \frac{-2}{(x-4)^2} = -\infty$

2. Prove, pela definição, que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$

3. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{8x}{(x-3)^2}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{9 - x^2}$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{x - 4}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{x}$

e) $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

f) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{4 + 3x^2}}{5x}$

g) $\lim_{x \to +\infty} (5x^2 - 3x)$

h) $\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2 - 1}\right)$

i) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}$

l) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x^3 - 15x^2}{13x}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

4. Dê exemplos de duas funções f e g com $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ tais que:

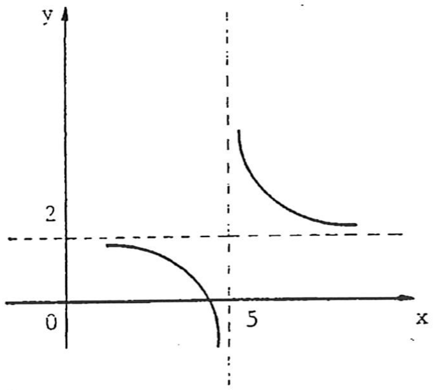
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

2.6. ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Como exemplo, observemos o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x - 5}$



Vemos que o gráfico se aproxima da linha vertical $x = 5$ a medida que a variável x se aproxima da linha, tanto pela esquerda como pela direita. Assim,

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$$

Tal reta vertical é chamada assíntota vertical.

Temos, de modo geral, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1: Diz-se que a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iv) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

De igual modo, no exemplo, a linha horizontal $y = 2$ é chamada assíntota horizontal do gráfico, pois

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Mais genericamente, temos a definição:

DEFINIÇÃO 2: Diz-se que a reta horizontal $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

EXEMPLOS: Nos exemplos abaixo, ache as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f (se houverem) e trace este gráfico.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{2x - 1}$

SOLUÇÃO:

Para achar uma assíntota horizontal, façamos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$$

Assim, $y = \dfrac{5}{2}$ é uma assíntota horizontal.

Também,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{2x - 1} = \frac{5}{2}$$

Pesquisemos as assíntotas verticais:

Como

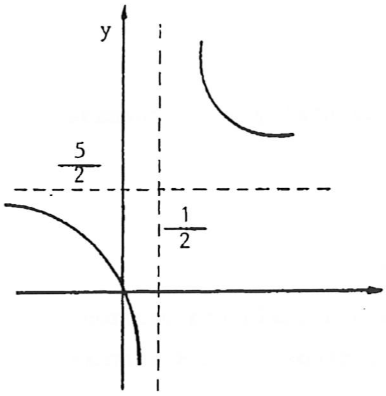
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{5x}{2x - 1} = +\infty \ , \qquad x = \frac{1}{2} \text{ é uma assíntota}$$

vertical.

Note que também temos

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{5x}{2x - 1} = -\infty$$

Esboço do gráfico:



b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

SOLUÇÃO:

Considerando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, temos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1,$$

pois trabalhamos com valores positivos de x e, então $x = \sqrt{x^2}$.

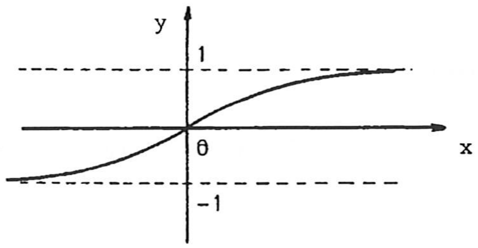
Portanto, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Consideremos agora $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Como trabalhamos com valores negativos de x, $x = -\sqrt{x^2}$ e então,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}/(-\sqrt{x^2})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Logo, $y = -1$ é uma assíntota horizontal.



EXERCÍCIOS 2.6.

1. Nos exercícios abaixo, ache as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de cada função e trace o gráfico:

a) $f(x) = \dfrac{5x}{3x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{3 + 5x}$

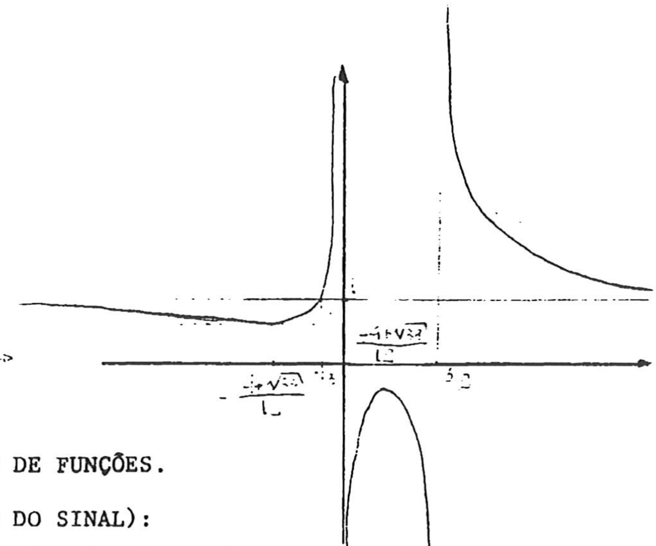
c) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

e) $f(x) = \dfrac{-3}{(x + 2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9 - x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3x}$



2.7. TEOREMAS ADICIONAIS SOBRE LIMITES DE FUNÇÕES.

TEOREMA 1 (TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DO SINAL):

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, então existe um intervalo aberto contendo $\underline{a}$ tal que $f(x)$ tem o mesmo sinal de $\underline{b}$ para todo $x \neq a$ deste intervalo.

DEM: Exercício .

TEOREMA 2 (TEOREMA DA COMPARAÇÃO):

Suponhamos que f e g estejam definidas em um intervalo aberto I contendo $\underline{a}$, exceto possivelmente em $\underline{a}$. Suponhamos, também, que $f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in I$, $x \neq a$. Então, se existirem $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$,

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

DEM: Exercício .

OBSERVAÇÕES: i) Se $\lim f(x) = +\infty$ e $f(x) \leq g(x)$, então $\lim g(x) = +\infty$ (vale para $x \to a$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$).

ii) Se $\lim g(x) = -\infty$ e $f(x) \leq g(x)$, então $\lim f(x) = -\infty$ (vale para $x \to a$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$).

TEOREMA 3 (TEOREMA DO CONFRONTO OU DO "SANDUÍCHE")

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo $\underline{a}$, exceto possivelmente em $\underline{a}$, e se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

DEM: Exercício.

OBSERVAÇÃO: O teorema 3 continua válido se "$x \to a$" for substiuído por "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$".

EXEMPLO: Use o teorema 3 para provar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$$

SOLUÇÃO:

Sabemos que $-1 \leqq \text{sen } x \leqq 1$.

Logo, para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\text{sen } x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

Sejam $f(x) = \frac{-1}{x}$, $g(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, pelo teorema 3

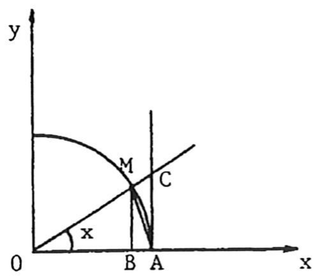
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$$

O teorema abaixo é um exemplo de aplicação do teorema 3

TEOREMA 4 (1º LIMITE FUNDAMENTAL)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

DEM:



Podemos raciocinar no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, já que nos interessam vizinhanças pequenas de 0.

Temos:

área do $\triangle$ MOA < área do setor MOA < área do $\triangle$ COA, ou seja,

$$\left|\frac{1}{2} \cdot \overline{OA}.\overline{MB}\right| < \left|\frac{1}{2} \cdot \overline{OA}^2.\widehat{AM}\right| < \left|\frac{1}{2} \cdot \overline{OA}.\overline{AC}\right|$$, ou seja, como

$\overset{\frown}{AM} = x$ rad e $\overline{OA} = 1$,

$$\left|\frac{1}{2} \operatorname{sen} x\right| < \left|\frac{1}{2} x\right| < \left|\frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right|.$$

Logo, $|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$, $x \neq 0$.

Então, $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} < \dfrac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{|\operatorname{sen} x|}$

e, logo, $1 < \dfrac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \dfrac{1}{|\cos x|}$

Portanto, $|\cos x| < \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} < 1$

No intervalo considerado, $\cos x > 0$ e $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > 0$.

Logo, $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$

Mas $\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

Pelo teorema 3, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

EXEMPLOS: Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} .5\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \lim_{x \to 0} 5$$

Pondo $y = 5x$ e observando que $x \to 0$ implica $y \to 0$, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 1.5 = 5$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 2x}$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen } 5x}{5x}}{\dfrac{\text{sen } 2x}{2x}} \frac{5}{2} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{5x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \text{ sen}^2 \dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \cdot \text{sen } \frac{x}{2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 1.0 = 0$$

TEOREMA 5 (2º LIMITE FUNDAMENTAL)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

onde $e = 2,71828 \ldots..$ (irracional).

DEM: Ver Piskunow, N.

OBSERVAÇÃO: Pondo $y = \dfrac{1}{x}$ e observando que $y \to 0$ quando $x \to \pm\infty$,

temos que, $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$

EXEMPLOS: Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

SOLUÇÃO:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^{2y} = e^2$, pois se $y = \dfrac{x}{2}$ então

$y \to +\infty$ quando $x \to +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x . \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 = e.1 = e.$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2} .$$

onde, no numerador, substituímos $-x$ por y.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}$$

Fazendo $y = x - 1$, temos que $y \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

Logo,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^y . \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^4$$

Pondo $y = 4z$ e observando que $y \to +\infty$ implica $z \to +\infty$, temos

$$\lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^y = \lim_{z\to +\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z} = \lim_{z\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^4 =$$

$$= e^4 .$$

Portanto,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = e^4 . 1 = e^4$$

EXERCÍCIOS 2.7.

1. Use o teorema 3 com $f(x) = 0$ e $h(x) = |x|$ para provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$$

2. Se $\underline{c}$ é um número real não negativo e $0 \leq f(x) \leq c$ para todo x, use o teorema 3 para provar que

$$\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$$

3. Use o teorema 3 para provar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \text{sen } x}{x} = 0$

4. Usando o 1º limite fundamental, calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 8x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 7x}{\text{sen } 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 3x}{x \text{ sen} 2 x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x^2}{x^2 + x^3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x - \text{sen } 2x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ cotg } x$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\text{arc sen } x}{3x}$

j) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\text{sen}(1 - x)}{1 - x^2}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc tg } 2x}{\text{sen } 3x}$

5. Usando o 2º limite fundamental, calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2 + x}{3 - x}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{x+3}{x}}$

g) $\lim\limits_{x \to -1} (2 + x)^{\frac{2}{x^2-1}}$. dica: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

2.8. CONTINUIDADE

DEFINIÇÃO 1: Diz-se que f é contínua em um ponto a se são satisfeitas as três condições seguintes:

i) existe f(a)

ii) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se uma ou mais destas três condições não for verificada em a, dizemos que a função f é descontínua em a.

Fica claro que a noção geométrica de salto no gráfico em um determinado ponto coincide com o conceito analítico de uma função que é descontínua em um determinado valor de variável.

Como a noção de continuidade envolve o fato que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, podemos obter o seguinte resultado substituindo L por f(a) na definição da seção 2.1.:

TEOREMA:

Diz-se que a função f é contínua no número a se f for definida em um intervalo aberto contendo a e se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |x - a| < \delta$$

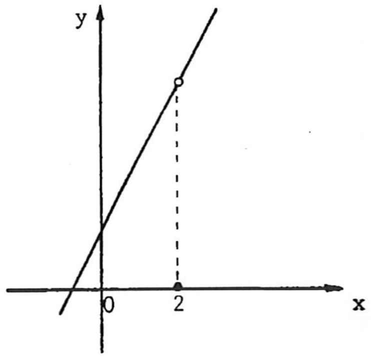
a) Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

Verifique se f é contínua em 2.

SOLUÇÃO:

Temos, abaixo, o esboço do gráfico de f:



A condição i é satisfeita, pois $f(2) = 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, a condição ii é satisfeita.

Mas, $5 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2) = 0$ e, então, a condição iii não é satisfeita.

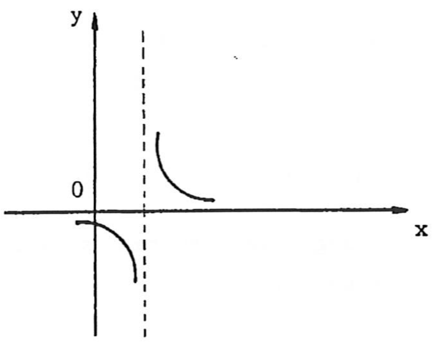
Portanto, f é descontínua em 2.

b) Estude a continuidade da função abaixo no ponto $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2}{x - 1}$$

SOLUÇÃO:

Um esboço do gráfico de f é dado abaixo:



Como $f(1)$ não está definida, falha a condição i.

Portanto, f é descontínua em $x = 1$.

c) Seja definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & , \text{ se } x \leq 1 \\ 3 - x & , \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Estude a continuidade de f em $x = 1$.

SOLUÇÃO:

A condição i é satisfeita, pois, $f(1) = 4$.

Como

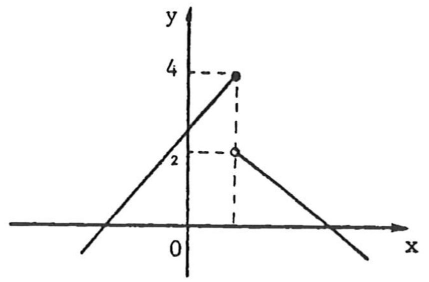
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 + x) = 4 \quad e$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2 \text{ ,}$$

não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$, pois $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$

Logo, a condição ii não é válida e, portanto, f é descontínua em 1.

Um esboço do gráfico é feito abaixo:



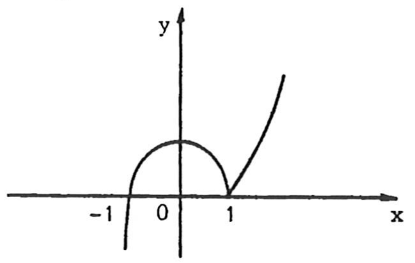
d) Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , \text{ se } x < 1 \\ x^2 + x - 2, & \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Estude a continuidade de f em x = 1.

SOLUÇÃO:

Um esboço do gráfico de f é mostrado abaixo:



Como f(1) = 0, a condição i é válida.

Temos

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \quad e$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x - 2) = 0$$

Como os dois limites laterais existem e têm o mesmo valor,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

e a condição ii está satisfeita.

Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$, a condição iii é válida e, portanto, f é contínua em $x = 1$.

EXERCÍCIOS 2.8.

1. Nos exercícios abaixo, esboce o gráfico da função dada e estude a sua continuidade em $x = a$.

a) $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & , \text{ se } x \neq 3 \\ 2 & , \text{ se } x = 3 \end{cases}$; $a = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 5} & , \text{ se } x \neq -5 \\ 0 & , \text{ se } x = -5 \end{cases}$; $a = -5$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & , \text{ se } x < -1 \\ -5 & , \text{ se } -1 \leq x \leq 10 \\ x - 15 & , \text{ se } x > 10 \end{cases}$; $a = 10$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$; $a = 2$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$; $a = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & , \text{ se } x < -2 \\ 0 & , \text{ se } x = -2 \\ 11 - x^2 & , \text{ se } x > -2 \end{cases}$; $a = -2$

g) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \text{ se } x > 1 \\ x^2 & , \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$; $a = 1$

2. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \text{ se } x < -1 \\ a & , \text{ se } x = -1 \\ -x^2 - 2x & , \text{ se } x > -1 \end{cases}$$

determine o valor de $\underline{a}$ para que f seja contínua em $x = -1$.

2.9. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS.

P_1 - Se f e g são duas funções contínuas em $\underline{a}$, então:

i) $f + g$ é contínua em $\underline{a}$

ii) $f - g$ é contínua em $\underline{a}$

iii) $f.g$ é contínua em $\underline{a}$

iv) f/g é contínua em $\underline{a}$, desde que $g(a) \neq 0$

DEM: i) Se f e g são contínuas em a, então

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) =$$

$$= f(a) + g(a)$$

$$= (f + g)(a)$$

Portanto, f + g é contínua em a .

Demonstra-se os ítens ii, iii e iv de maneira análoga.

P_2 - Uma função polinomial é continua em todo $a \in R$

DEM: Exercício

P_3 - Uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) é contínua em todo o ponto do seu domínio.

DEM: Exercício

P_4 - As funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todo ponto dos seus domínios.

DEM: Exercício

P_5 - Se g é continua em a e f é contínua em g(a), então $f \circ g$ é contínua em a.

DEM: Exercício

EXEMPLOS: Nos exemplos abaixo, mostre que a função f é contínua no ponto a dado:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; $a = 3$

SOLUÇÃO:

As funções $y = x$ e $y = x^2 - 4$ são contínuas em 3, pela propriedade P_2.

Como $(3)^2 - 4 \neq 0$, pela propriedade P_1 - iv, f é contínua em 3.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; $a = 6$

SOLUÇÃO:

Seja $g(x) = x^2 - 16$, contínua em 6, pela propriedade P_2.

Como a função $y = \sqrt{x}$ é contínua em $g(6) = 20$, f é contínua em 6, pela propriedade P_5.

EXERCÍCIOS 2.9.

1. Nos exercícios abaixo, mostre que a função f é contínua no ponto a dado:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 10}{x^4 + x^3 - 2x - 7}$; $a = 0$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$; $a = 1$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 4}}$; $a = 5$

d) $f(x) = \sqrt{2x - 5} + 3x$; $a = 4$

2. Dê um exemplo de 2 funções que sejam descontínuas em $\underline{a}$, mas cuja soma das funções seja contínua em $\underline{a}$.

3. Sejam f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , \text{ se } x < 1 \\ 2 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } x < 1 \\ 1 + x & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Quais das seguintes funções são contínuas em 1?

a) $f + g$

b) $f - g$

c) $f.g$

d) f/g

e) $f \circ g$

2.10. CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

DEFINIÇÃO 1: Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo aberto se f é contínua em todos os pontos deste intervalo.

EXEMPLO:

Se $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, em quais intervalos abertos f é contínua?

SOLUÇÃO:

A função é contínua em todo o número, exceto 1. Logo, f é contínua em todo intervalo aberto que não contenha o ponto 1.

DEFINIÇÃO 2: Uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ se f é contínua no intervalo aberto (a,b) e f satisfaz

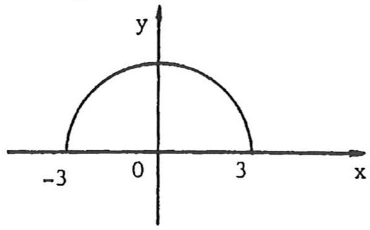
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

EXEMPLOS:

a) Se $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, prove que f é contínua no intervalo fechado $[-3,3]$.

SOLUÇÃO:

Um esboço do gráfico de f é mostrado abaixo:



Se $-3 < c < 3$, então

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - c^2} = f(c)$$

Logo, f é contínua em c.

Verifiquemos os limites laterais:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = 0 = f(3)$$

Portanto, f é contínua em $[-3,3]$.

b) Seja f a função definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 - x}{3 + x}}$$

Determine se f é contínua ou descontínua em $(-3,2)$ e em $[-3,2]$.

SOLUÇÃO:

Temos que o domínio da função f é $D = (-3,2]$.

É fácil verificar que em todo ponto do domínio f é contínua. Logo, f é contínua em $(-3,2)$.

Como f não está definida em $x = -3$, f é descontínua à direita em -3. Portanto, f é descontínua em $(-3,2]$.

EXERCÍCIOS 2.10.

1. Nos exercícios abaixo, determine se a função é contínua ou descontínua em cada um dos intervalos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$; $(3,7)$, $[-6,4]$, $[-10,-5]$.

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4}$; $[0,4]$, $(-2,2)$, $[-4,4]$, $[-2,2]$.

c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $[-2,2]$, $[2,3]$, $(-2,2)$, $(-1,5)$.

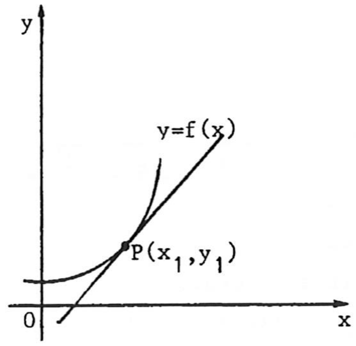
d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$; $(-2,2)$, $[-2,2]$, $(-3,3)$.

CAPÍTULO 3: A DERIVADA

3.1. MOTIVAÇÃO

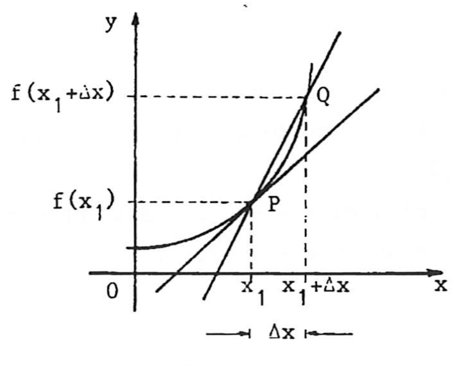
a) RETA TANGENTE

Suponhamos que $P(x_1, f(x_1))$ seja um ponto do gráfico de uma função f e que queiramos obter a reta tangente ao gráfico em P.



Como o ponto P pertence à reta tangente, tal reta fica perfeitamente determinada obtendo-se o seu coeficiente angular.

Seja Q um ponto do gráfico de f, próximo a P. A reta que passa por P e Q é chamada reta secante. Se a abscissa de Q difere da abscissa de P por uma quantidade Δx, então as coordenadas de Q são $Q(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$.



Logo, o coeficiente angular da reta secante passando por P e Q é dado por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Façamos, agora, o ponto Q mover-se ao longo da curva na direção de P. Isto implica em dizer que Δx tende a zero. Com isso, a reta secante gira sobre o ponto P e tenderá para a reta tangente. Assim, quando $\Delta x \to 0$, o coeficiente angular m_{PQ} da reta secante tende para o coeficiente angular m da reta tangente, ou seja,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Temos, então, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Seja f uma função definida pelo menos em um intervalo contendo x_1. Então, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ será a reta que passa por P tendo o coeficiente angular m dado por

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se este limite existir.

Naturalmente, se f é contínua em x_1 e

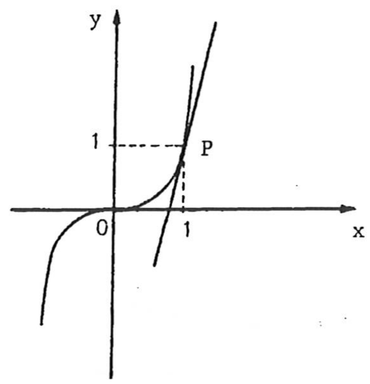
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \right| = +\infty$$

diremos que a reta $x = x_1$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$.

EXEMPLOS: Nos exemplos abaixo, calcule o coeficiente angular e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado:

a) $f(x) = x^3$; $P(1,1)$.

SOLUÇÃO:



Temos

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2] = 3$$

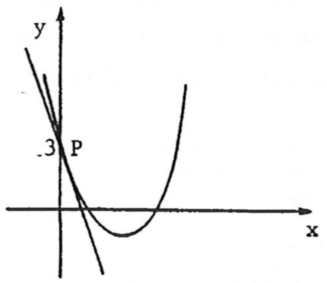
Logo, a equação da reta tangente procurada será

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

ou $y = 3x - 2$.

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $P(0,3)$

SOLUÇÃO:



Temos

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - 4\Delta x + 3 - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x - 4) = -4$$

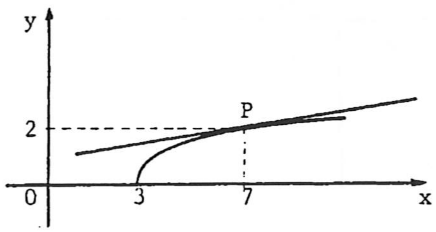
Logo, a reta tangente será dada por

$$y - 3 = -4(x - 0)$$

ou $y = -4x + 3$

c) $f(x) = \sqrt{x - 3}$; $P(7,2)$.

SOLUÇÃO:



Temos

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(7 + \Delta x) - 3} - 2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{4 + \Delta x} - 2)}{\Delta x} \frac{(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}{(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x(\sqrt{4 + x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Logo, a reta tangente ao gráfico por P será

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$$

ou seja $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

b) VELOCIDADE E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA NO MOVIMENTO RETILÍNEO.

Como situação inicial, pensemos num movimento retilíneo, descrito por uma função $s = f(t)$, a qual nos dá a distância orientada de uma partícula ao ponto de origem num determinado instante de tempo.

No tempo t_1, a partícula estará a uma distância $f(t_1)$ da origem Decorrido um intervalo de tempo h, ou seja, no tempo $t_1 + h$, a partícula estará a uma distância $f(t_1 + h)$ da origem. Então, a velocidade média (ou sua taxa de variação média da distância no tempo) durante o intervalo h é dada por

$$V_m = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

Mas, a velocidade média não proporciona informação específica sobre o movimento da partícula num dado instante. Percebemos, no entanto, que quanto menor for o intervalo de tempo h, mais próxima será a velocidade média daquilo que consideraríamos como a velocidade instantânea em t_1.

Podemos dizer, então, que a velocidade instantânea da partícula no instante t, será dada por

$$V(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

EXEMPLOS:

a) Uma partícula se move sobre uma linha reta de modo que a equação de movimento é dada por

$$s = 3t^2 + t.$$

Calcule a velocidade da partícula no instante $t = 2$ s.

SOLUÇÃO:

A velocidade no instante $t = 2$ é dada por

$$V(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(2+h)^2 + (2+h)] - [3(2)^2 + 2]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 2 + h - 12 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{13h + 3h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (13 + 3h) = 13 \text{ m/s} \quad .$$

b) Uma bola é lançada verticalmente para cima, desde o solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s . Se o sentido positivo da distância desde o ponto de partida é para cima, a equação do movimento é

$$s = -5t^2 + 20t$$

Achе:

i) a velocidade instantânea da bola no instante $t = 1$ s.

ii) a velocidade instantânea da bola no instante $t = 3$ s.

iii) quantos segundos leva a bola para chegar ao solo.

iv) a velocidade instantânea da bola quando alcança o solo.

SOLUÇÃO:

Vamos calcular a velocidade instantânea da bola num instante genérico t_1:

$$V(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5(t_1 + h)^2 + 20(t_1 + h) - (-5t_1^2 + 20t_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5t_1^2 - 10t_1 h - 5h^2 + 20t_1 + 20h + 5t_1^2 - 20t_1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-10t_1 h - 5h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \to 0} (-10t_1 - 5h + 20) = -10t_1 + 20$$

Logo,

i) $V(1) = 10$ m/s

ii) $V(3) = -10$ m/s

iii) $s = 0 \iff -5t^2 + 20t = 0 \iff 5t(-t + 4) = 0 \iff t = 0$ s ou $t = 4$ s

iv) $V(4) = -20$ m/s

Analogamente, se a velocidade de uma partícula é descrita por uma equação $V = f(t)$, então a aceleração instantânea da partícula no instante t_1 é dada por

$$a(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

EXEMPLO:

Se a velocidade de uma partícula num movimento retilíneo é dada pela equação

$$v = 3t^2 - 2t - 2,$$

calcule a aceleração instantânea da partícula no instante $t = 4$ s

SOLUÇÃO:

Temos

$$a(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4+h)^2 - 2(4+h) - 2 - (3.4^2 - 2.4 - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{22h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (22 + 3h) = 22 \text{ m/s}^2$$

c) TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA.

Sejam x e y variáveis tais que $y = f(x)$.

Para obtermos a taxa de variação de y por unidade de variação de x, consideremos uma variação em x, de um valor x_1 para um valor $x_1 + \Delta x$. À variável y, corresponderá uma variação.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Definimos, então, a taxa de variação média de y em relação a x por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Além disso, definimos a taxa de variação instantânea de y em relação a x no instante $x = x_1$ por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

EXEMPLO:

Um cubo de metal com aresta $\underline{x}$ é expandido uniformemente como consequência de ter sido aquecido. Calcule:

i) a taxa de variação média de seu volume em relação à aresta quando x aumenta de 2 para 2,01 cm.

ii) a taxa de variação instantânea de seu volume em relação à aresta no instante em que x = 2 cm.

SOLUÇÃO:

O volume y do cubo é dado por $y = x^3$ cm³

i) Quando $x = 2$ cm , $y = 8$ cm³

Se x aumenta de $\Delta x = 0{,}01$ cm para $x = 2{,}01$ cm.

y aumenta para $(2{,}01)^3$ cm³ . Assim,

$$\Delta y = (2{,}01)^3 - 8 = 0{,}120601 \text{ cm}^3.$$

Então, a taxa de variação média de y em relação a x sobre o intervalo Δx é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}120601}{0{,}01} = 12{,}0601 \text{ cm}^3$$ por unidade de comprimento de aresta em cm.

ii) A taxa de variação instantânea procurada é

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\,\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [12 + 6\,\Delta x + (\Delta x)^2] = 12 \text{ cm}^3$$ por unidade de comprimento de aresta em cm.

EXERCÍCIOS 3.1.

1. Nos exercícios abaixo, calcule o coeficiente angular e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado:

   a) $f(x) = x^2 - x + 1$; $P(-1,3)$
   b) $f(x) = 2x - x^2$; $P(1,1)$
   c) $f(x) = x^3 + x + 1$; $P(-1,-1)$
   d) $f(x) = 4x - x^3$; $P(2,0)$
   e) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$; $P(1,1)$
   f) $f(x) = \sqrt{3-x}$; $P(-1,2)$
   g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; $P(6,\frac{1}{2})$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $P(8,2)$
   i) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $P(\pi,0)$

2. A equação de movimento de uma partícula sobre uma linha reta é $s = 4t^2 + 3t$, t em segundos e s em centrímetros.

   i) Determine a velocidade média da partícula nos seguintes intervalos de tempo:

   a) $[1;1,2]$ b) $[1;1,1]$ c) $[1;1,01]$ d) $[1;1,001]$.

   ii) Determine a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 1$ s .

3. Um foguete é lançado verticalmente para cima e está a s metros do solo t segundos depois de ter sido lançado, $s = 160t - 5t^2$.

Se o sentido positivo é tomado para cima, determine:

a) a velocidade do foguete 2 segundos depois do lançamento.

b) a velocidade do foguete 10 segundos depois do lançamento.

c) a velocidade do foguete 30 segundos depois do lançamento.

d) quanto tempo leva o foguete para alcançar sua altura máxima.

4. A produção y em toneladas por hectare de uma cultura em função da quantidade de nutriente x adicionada ao solo é dada pela equação.

$$y = -\frac{1}{25000}x^2 + \frac{3}{250}x + 1 , \qquad 0 \leq x \leq 100.$$

Esboce o gráfico da função e calcule:

a) a taxa de variação média entre $x = 0$ e $x = 100$.

b) a taxa de variação média entre $x = 50$ e $x = 100$.

c) a taxa de variação instantânea de y, no isntante em que $x=0$.

d) a taxa de variação instantânea de y, no isntante em que $x=50$.

3.2. A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Vimos, na seção 3.1., problemas distintos resolvidos pelo cálculo de um mesmo tipo de limite. Este tipo de limite aparece, também, em outros problemas e tem um nome específico.

DEFINIÇÃO 1: A derivada de uma função f, indicada f' é uma função definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

se este limite existir e for infinito.

OBSERVAÇOES:

i) Comparando a definição acima com o que foi visto na seção 3.1., podemos dizer que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é a derivada de f calculada em x_1, ou seja, $m = f'(x_1)$. De igual modo, se uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$, então a velocidade instantânea da partícula no instante t_1 é precisamente a derivada de f calculada em t_1, ou seja, $v(t_1) = f'(t_1)$.

ii) Uma fórmula alternativa para $f'(x_1)$ é dada por

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

iii) Se f é definida por $y = f(x)$, sua derivada pode ser indicada por,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = D_x y.$$

DEFINIÇÃO 2: Uma função f é diferenciável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função é diferenciável se for diferenciável em todo ponto do seu domínio.

EXEMPLOS: Calcule f'(x) para a função dada usando diretamente a definição.

a) $f(x) = 2x^2 + 3$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x + \Delta x)^2 + 3] - (2x^2 + 3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x^2 - 3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x) = 4x.$$

b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1 + (x + \Delta x)}{1 - (x + \Delta x)} - \dfrac{1 + x}{1 - x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + x + \Delta x)(1 - x) - (1 + x)(1 - x - \Delta x)}{\Delta x(1 - x)(1 - x - \Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - x + x - x^2 + \Delta x - x\Delta x - 1 + x + \Delta x - x + x^2 + x\Delta x}{\Delta x(1 - x)(1 - x - \Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(1 - x)(1 - x - \Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(1 - x)(1 - x - \Delta x)} =$$

$$= \frac{2}{(1 - x)^2}$$

c) $f(x) = \sqrt{3 - x}$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3 - (x + \Delta x)} - \sqrt{3 - x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3 - (x + \Delta x)} - \sqrt{3 - x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{3 - (x + \Delta x)} + \sqrt{3 - x}}{\sqrt{3 - (x + \Delta x)} + \sqrt{3 - x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 - (x + \Delta x) - (3 - x)}{\Delta x(\sqrt{3 - (x + \Delta x)} + \sqrt{3 - x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(\sqrt{3 - (x + \Delta x)} + \sqrt{3 - x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{3 - (x + \Delta x)} + \sqrt{3 - x}} = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}}$$

EXERCÍCIOS 3.2.

1. Nos exercícios abaixo, determine $f'(x)$ usando a definição:

   a) $f(x) = 9$

   b) $f(x) = x^2 - 2x$

   c) $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$

   d) $f(x) = x^3 - x$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   g) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$

   h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

   j) $f(x) = x\sqrt{x}$

2. Encontre $f'(x_1)$ para o valor dado de x_1.

   a) $f(x) = 1 - 2x^2$; $x_1 = 1$.

   b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $x_1 = 6$.

   c) $f(x) = \dfrac{7}{2x - 1}$; $x_1 = 3$.

3.3. DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

DEFINIÇÃO: Se a função f está definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1 é definida por:

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

caso este limite exista.

De maneira análoga se define $f'_-(x_1)$, a derivada à esquerda de f em x_1:

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Como consequência do teorema da seção 2.3., podemos afirmar que a derivada $f'(x_1)$ existe e tem o valor A se e somente se ambas as derivadas $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ existem e têm o valor comum A.

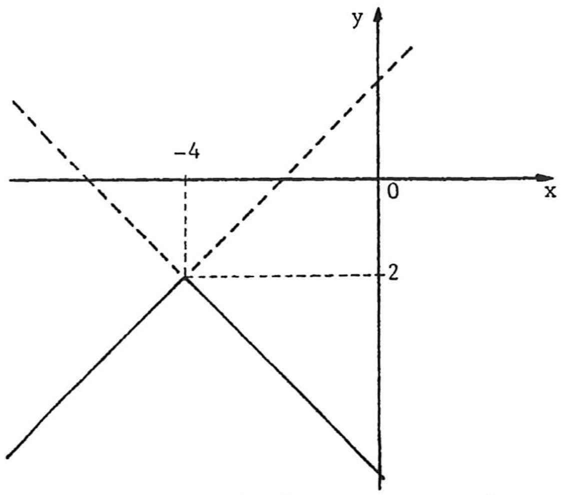
EXEMPLOS:

a) Seja f definida por;

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \text{ se } x \leqq -4 \\ -x - 6 & , \text{ se } x > -4 \end{cases}$$

Demonstre que f é contínua em -4, calcule $f'_-(-4)$ e $f'_+(-4)$ e determine $f'(-4)$, se existir.

SOLUÇÃO:



Para demonstrarmos a continuidade de f em -4, verifiquemos as três condições da definição (seção 2.8.):

i) $f(-4) = -2$

ii) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} (x + 2) = -2$

$\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} (-x - 6) = -2$

Logo, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -2$

iii) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(-4)$

Portanto, f é contínua em -4.

Temos,

$$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(-4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[(-4 + \Delta x) + 2] - (-2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2 + \Delta x + 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} 1 = 1$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(-4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[-(-4 + \Delta x) - 6] - (-2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2 - \Delta x + 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1) = -1$$

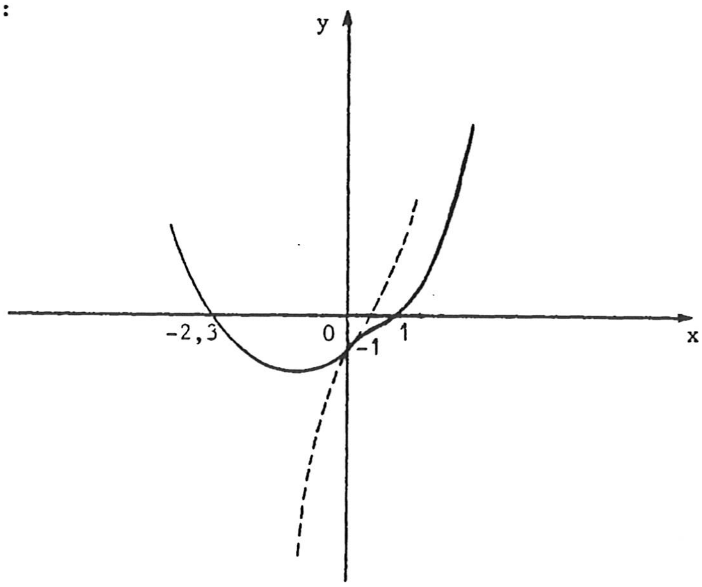
Como $f'_+(-4) \neq f'_-(-4)$, f não é diferenciável em -4.

b) Seja f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & , \text{ se } x > 0 \\ \frac{3}{2} x^2 + 3x - 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estude a continuidade e a diferenciabilidade de f em x = 0.

SOLUÇÃO:



Estudemos a continuidade de f em 0:

i) $f(0) = -1$

ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\frac{3}{2} x^2 + 3x - 1) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)^3 = -1$

Logo, $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Portanto, f é contínua em x = 0.

Temos

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[\frac{3}{2}(\Delta x)^2 + 3\Delta x - 1] - (-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{3}{2}(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (\frac{3}{2} \Delta x + 3) = 3$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x - 1)^3 - (-1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x - 1 + 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} [(\Delta x)^2 - 3\Delta x + 3] = 3$$

Portanto,

f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 3$.

TEOREMA: Se uma função f é diferenciável em x_1, então f é contínua em x_1.

DEM:

Mostremos que f é contínua em x_1:

Como f é diferenciável em x_1, existe $f'(x_1)$.

Mas,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Logo, existe $f(x_1)$, valendo a condição i.

Temos,

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} [(x - x_1).\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}] =$$

$$= \lim_{x \to x_1} (x - x_1). \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0.f'(x_1) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] +$$

$$+ \lim_{x \to x_1} f(x_1) = 0 + f(x_1) = f(x_1).$$

Portanto, estão satisfeitas as condições ii e iii da definição.

OBSERVAÇÕES:

i) A recíproca do teorema não é verdadeira. Existem funções contínuas que não são diferenciáveis (veja exemplo <u>a</u> acima).

ii) Como consequência do teorema, podemos dizer que se f não é contínua em x_1, então f não é diferenciável em x_1.

EXERCÍCIOS 3.3.

1. Nos exercícios abaixo, estude a continuidade e a diferenciabilidade da função f no ponto x_1 dado. Esboce o gráfico de f.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad x_1 = 2$

b) $f(x) = |x - 5| \quad ; \quad x_1 = 5$

c) $f(x) = 1 + |x + 2| \quad ; \quad x_1 = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \text{ se } x \leq 3 \\ 10 - x & , \text{ se } x > 3 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 3$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \leq 1 \\ x & , \text{ se } x > 1 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 1$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \leq 2 \\ 6 - x & , \text{ se } x > 2 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 2$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \leq 0 \\ -x^2 & , \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 0$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ se } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 2$

i) $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & , \text{ se } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & , \text{ se } x > 3 \end{cases} \quad ; \quad x_1 = 3$

2. Encontre os valores de a e b tais que $f'(1)$ existe, se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x < 1 \\ ax + b & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} & , \text{ se } x \neq a \\ g'(a) & , \text{ se } x = a \end{cases}$$

Demonstre que se $g'(a)$ existe, f é contínua em a.

3.4. TEOREMAS BÁSICOS SOBRE DIFERENCIAÇÃO.

TEOREMA 1: Se $f(x) = c$, $\forall x$, c constante qualquer, então $f'(x) = 0$.

DEM:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

EXEMPLOS: a) Dado $y = 8$, calcule y'

SOLUÇÃO:

$y' = 0$

b) Se f é dado por $f(x) = \pi + \sqrt{2}$, encontre $\dfrac{df(x)}{dx}$

SOLUÇÃO:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0.$$

TEOREMA 2: Se $f(x) = x^n$, n inteiro positivo qualquer, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEM:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n(\Delta x)^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}(\Delta x)^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1(\Delta x)^{n-1} + \ldots}{\Delta x}$$

$$\frac{\ldots + \binom{n}{n}x^0(\Delta x)^n - x^n}{} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}] = nx^{n-1}$$

OBSERVAÇÃO: Este teorema se estende quando n for um número real. Assim, se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$, n real qualquer.

EXEMPLOS:

a) Dado $f(x) = x$, encontre $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1.$$

b) Se $y = \frac{1}{x^{13}}$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{13}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-13}) = -13x^{-13-1} = -\frac{13}{x^{14}}$$

c) Dado $y = x^{\frac{3}{2}}$, obtenha $D_x y$

SOLUÇÃO:

$$D_x y = D_x(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

d) Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, calcule $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

Como $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$$

e) Se $f(x) = x^{\sqrt{3}}$, calcule $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \sqrt{3}\ x^{\sqrt{3}-1}$$

TEOREMA 3: Seja f uma função e c uma constante. Se g é uma função definida por

$$g(x) = cf(x),$$

então, se $f'(x)$ existe,

$$g'(x) = cf'(x).$$

DEM:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = c.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x).$$

EXEMPLOS:

a) Se $f(x) = 5x^8$, encontre $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 5.8x^7 = 40x^7$$

b) Se $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, obtenha $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

TEOREMA 4: Se u e v são funções e se f é tal que $f(x) = u(x) + v(x)$, então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, desde que $u'(x)$ e $v'(x)$ existam. (ou seja, a derivada da soma é a soma das derivadas).

DEM:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x) + v'(x).$$

OBSERVAÇÕES:

i) Costuma-se escreve $(u + v)' = u' + v'$

ii) O resultado pode ser estendido a qualquer número **finito de funções**.

EXEMPLOS:

a) Dado que $f(x) = 4x^2 + 8$, obtenha $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 8x + 0 = 8x$$

b) Se $y = 4x^4 + 7x^2 - x + 16$, calcule y'.

SOLUÇÃO:

$$y' = 16x^3 + 14x - 1 + 0 = 16x^3 + 14x - 1.$$

c) Calcule $\frac{dy}{dx}$ se $y = \sqrt{5x} + \frac{16}{x^2} - \pi$

SOLUÇÃO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{5x}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{16}{x^2}\right) - \frac{d}{dx}(\pi) =$$

$$= \frac{d}{dx}(\sqrt{5}\, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(16x^{-2}) - 0 =$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} - 32x^{-3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{32}{x^3}$$

TEOREMA 5: Se u e v são funções e se f é tal que

$f(x) = u(x).v(x)$, então

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$, desde que $u'(x)$ e $v'(x)$ **existam.**

DEM:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Somando e subtraindo $u(x + \Delta x)v(x)$ no numerador, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x+\Delta x) - u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v(x).$$

$$.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Como f é diferenciável em x, f é contínua em x e, então,

$$\lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) = u(x).$$

Também $\lim_{\Delta x \to 0} v(x) = v(x)$

Portanto, $f'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$.

OBSERVAÇÃO: Costuma-se escrever $(uv)' = u'v + uv'$.

EXEMPLOS:

a) Se $f(x)\ (x^3 - 4x)(3x^4 + 8x^3)$, obtenha $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 4x)'(3x^4 + 8x^3) + (x^3 - 4x)(3x^4 + 8x^3)' = \\ &= (3x^2 - 4)(3x^4 + 8x^3) + (x^3 - 4x)(12x^3 + 24x^2) = \\ &= 21x^6 + 48x^5 - 60x^4 - 128x^3. \end{aligned}$$

b) Sendo $u(x) = (\frac{2}{x} - 3)(\frac{1}{x^3} + 7)$, obter $D_x u$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} D_x u &= D_x(\frac{2}{x} - 3).(\frac{1}{x^3} + 7) + (\frac{2}{x} - 3).D_x(\frac{1}{x^3} + 7) = \\ &= D_x(2x^{-1} - 3)(\frac{1}{x^3} + 7) + (\frac{2}{x} - 3).\ D_x(x^{-3} + 7) = \\ &= (-2x^{-2} - 0)(\frac{1}{x^3} + 7) + (\frac{2}{x} - 3).(-3x^{-4} + 0) = \\ &= -\frac{2}{x^5} - \frac{14}{x^2} - \frac{6}{x^5} + \frac{9}{x^4} = -\frac{8}{x^5} + \frac{9}{x^4} - \frac{14}{x^2} \end{aligned}$$

TEOREMA 6: Se f é uma função, $f(x) \neq 0$, então,

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$, desde que $f'(x)$ exista.

DEM:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{f(x + \Delta x)} - \frac{1}{f(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x\ f(x).f(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[- \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.\frac{1}{f(x).f(x + \Delta x)}\right] \\ &= - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x).f(x + \Delta x)} = \\ &= -f'(x).\frac{1}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \end{aligned}$$

EXEMPLOS: a) Seja f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Obtenha $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

Como $(x)' = 1$, pelo teorema acima,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

b) Seja f definida por $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}}$. Obtenha $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = -\frac{(3x^{\frac{1}{2}})'}{[3\sqrt{x}]^2} = -\frac{3.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{9x} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

c) Se f é tal que $f(x) = \frac{1}{4x^4 + 7x^2 - x + 16}$, calcule $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

Observando o exemplo b do teorema 4 e usando o teorema 6, temos que:

$$f'(x) = -\frac{16x^3 + 14x - 1}{(4x^4 + 7x^2 - x + 16)^2}$$

TEOREMA 7: Se u e v são funções e se f é tal que

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ onde } v(x) \neq 0, \text{ então}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}, \text{ desde que } u'(x) \text{ e } v'(x) \text{ existam.}$$

DEM:

Temos $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x).\frac{1}{v(x)}$

Pela regra do produto (teorema 5),

$$f'(x) = u'(x).\left(\frac{1}{v(x)}\right) + u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'.$$

Pelo teorema 6,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x)\left(-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}\right) =$$

$$= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x).v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

OBSERVAÇÃO: Costuma-se escrever $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

EXEMPLOS: a) Se $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, calcule $\frac{df}{dx}(x)$

SOLUÇÃO:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(1+x).(1-x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1.(1 - x) - (1 + x)(-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \frac{2}{(1 - x)^2}$$

b) Se $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$, obtenha $f'(x)$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 4x + 1) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

EXERCÍCIOS 3.4.

1. Nos exercícos abaixo, encontre a derivada das funções dadas:

a) $f(x) = 2x^7$

b) $f(x) = 3x^8 - 4x^3 + x^2 - 1$

c) $g(x) = (2x - x^2)^3$

d) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 - 2x^{-1} + 4x^{-2}$

e) $h(x) = 2x^4 - 3x + \dfrac{5}{8x^3}$

f) $h(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}} + 5$

i) $g(x) = (x^2 + 2x)(3x + 1)$.

j) $g(x) = (x^4 + 2x - 3)(x^6 - 7x^5 + 9x^2 + 1)$

l) $h(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + 4}{x}$

m) $h(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$

n) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 3}$

o) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 5}(3x - 1)$

p) $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 3}\left(x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

2. Se f e g são funções diferenciáveis no ponto 1 e se $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $g(1) = \dfrac{1}{2}$ e $g'(1) = -3$, calcule:

a) $(f + g)'(1)$

b) $(f - g)'(1)$

c) $(2f + 3g)'(1)$

d) $(f.g)'(1)$

e) $(f/g)'(1)$

f) $(g/f)'(1)$

3. Se f,g e h são diferenciáveis em 1 e se $f(1) = 3$, $f'(x) = 2$, $g(1) = 5$, $g'(1) = 10$, $h(1) = 1$ e $h'(1) = 7$, obtenha $\left(\frac{fg}{h}\right)'(1)$.

4. Se u, v e w são funções, prove que
$$(u(x).v(x).w(x))' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x),$$
desde que $u'(x)$, $v'(x)$ e $w'(x)$ existam.

5. Use o resultado do exercício 4 e calcule as derivadas das seguintes funções:

   a) $f(x) = (8x - 1)(x^2 + 4x + 7)(x^3 - 5)$

   b) $f(x) = (1 - 3x)^2(2x + 5)$

   c) $f(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

6. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{5}{1 + x^2}$ no ponto $(-2,1)$.

7. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 + 4x - 6$ paralela à reta $y = \dfrac{5x - 1}{2}$

8. Um objeto move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento $s = \dfrac{3t}{t^2 + 9}$, $t \geq 0$.

   a) Qual é a velocidade instantânea em 1 s ?

   b) Em que tempo a velocidade instantânea é igual a zero?

9. Uma partícula executa um movimento retilíneo segundo equação de movimento $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + at - 8$, t em segundos e s em metros. Sabendo-se que a velocidade instantânea no móvel aos 4 s. é de 60m/s , pede-se:

   a) obtenha o valor de a.

   b) obtenha a aceleração instantânea da partícula no instante $t = 1$ s.

3.5. A REGRA DA CADEIA

TEOREMA: Se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem,

então a função composta $y = f(g(x))$ tem derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ [ou seja, } f'(x) = f'(u).g'(x)]$$

DEM: Exercício.

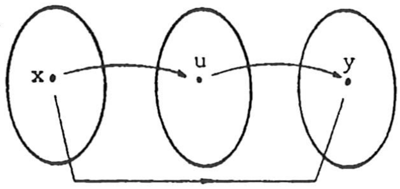
OBSERVAÇÃO: O teorema se estende para a composta de um número finito de funções.

EXEMPLOS:

a) Se $y = (x^2 - 3x + 8)^3$, encontre $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO:

Se $u = x^2 - 3x + 8$, temos $y = u^3$



Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 3u^2.(2x - 3) = 3(x^2 - 3x + 8)^2. (2x - 3)$$

b) Dado que $y = \sqrt{x^2 + 1}$, calcule $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO:

Se $u = x^2 + 1$, então $y = \sqrt{u}$ e , pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} . (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

c) Se $y = (\frac{2x + 1}{4x - 5})^8$, calcule y'

SOLUÇÃO:

Se $u = \frac{2x + 1}{4x - 5}$, $y = u^8$

Logo, pela regra de cadeia,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 8u^7 . \frac{2(4x - 5) - (2x + 1).4}{(4x - 5)^2} =$$

$$= 8 \left(\frac{2x + 1}{4x - 5}\right)^7 . \frac{8x - 10 - 8x - 4}{(4x - 5)^2} = \frac{8(2x + 1)^7.(-14)}{(4x - 5)^9} =$$

$$= - \frac{112(2x + 1)^7}{(4x - 5)^9}$$

d) Calcule $\frac{dy}{dx}$, se $y = (4x^2 + 1)^2(3x^3 - 4)^3$

SOLUÇÃO:

Usando a regra do produto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^2 + 1)^2.(3x^3 - 4)^3 + (4x^2 + 1)^2.\frac{d}{dx}(3x^3 - 4)^3$$

Usando a regra da cadeia nas duas parcelas,

$$\frac{dy}{dx} = 2(4x^2 + 1).8x.(3x^3 - 4)^3 + (4x^2 + 1)^2.3(3x^3 - 4)^2.9x^2 =$$

$$= x(4x^2 + 1)(3x^3 - 4)^2[27x(4x^2 + 1) + 16.(3x^3 - 4)] =$$

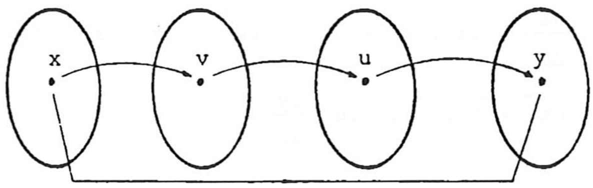
$$= x(4x^2 + 1)(3x^3 - 4)^2(108x^3 + 27x + 48x^3 - 64) =$$

$$= x(4x^2 + 1)(3x^3 - 4)^2(156x^3 + 27x - 64).$$

e) Se $y = (\sqrt{x^2 + 4})^5$, obtenha $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO:

Se $u = \sqrt{x^2 + 4}$, $y = u^5$. Também, se $v = x^2 + 4$, $u = \sqrt{v}$.



Logo, pela regra da cadeia aplicada para a composta de três funções,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = 5u^4.\frac{1}{2\sqrt{v}}.2x = 5(\sqrt{x^2 + 4})^4.\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.x =$$

$$= 5x(\sqrt{x^2 + 4})^3$$

EXERCÍCIOS 3.5.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $f(x) = (3x + 5)^{10}$

b) $f(x) = (x^2 - 2x + 6)^5$

c) $f(x) = (x + 5)^{-3}$

d) $g(x) = (17x - 5)^{1000}$

e) $g(x) = (x^4 + 5x + \frac{1}{6x})^3$

f) $g(x) = (x^2 + 1)^2(x^3 - 2x)^2$

g) $h(x) = (x^3 + 2x - 6)^3(x^2 - 4x + 5)^7$

h) $h(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$

i) $h(x) = \dfrac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 2)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{7x \div \frac{1}{x}}{x^2 + 2x - 1}$

l) $f(x) = \dfrac{(4x - 1)^3(x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2}\,\sqrt{x - 1}$

n) $g(x) = (\sqrt{5x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{\pi})^8$

0) $g(x) = \sqrt{\dfrac{3x - 2}{2x + 3}}$

p) $g(x) = \sqrt{x^{14} + x^2 + \sqrt{3}}$

q) $h(x) = \sqrt{x^3 - x + \sqrt{x}}$

r) $h(x) = \sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}$

s) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$

2. Use a regra da cadeia para demonstrar que:

   a) a derivada de uma função par é uma função ímpar.

   b) a derivada de uma função ímpar é uma função par.

3. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = (\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^2$ no ponto $(0,-1)$.

3.6. DERIVADA DE FUNÇÕES BÁSICAS

TEOREMA 1 : Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$

DEM:

Antes de demonstrarmos o teorema, façamos alguns cálculos:

$$\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = -\frac{1 - \cos\Delta x}{\Delta x} = -\frac{(1 - \cos\Delta x)(1 + \cos\Delta x)}{\Delta x(1 + \cos\Delta x)} =$$

$$= -\frac{\text{sen}^2\Delta x}{\Delta x(1 + \cos\Delta x)} = -\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{\text{sen}\Delta x}{1 + \cos\Delta x}$$

Logo, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x} . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\text{sen}\Delta x}{1 + \cos\Delta x} =$

$= -1.0 = 0.$

Ainda,

$\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}x = \text{sen}x \cos\Delta x + \text{sen}\Delta x \cos x - \text{sen}x =$

$= \text{sen}x\,(\cos \Delta x - 1) + \text{sen}\,\Delta x \cos x.$

Então,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}x\left(\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x} \cos x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos x =$$

$$= \text{sen}x . 0 + 1 . \cos x = \cos x.$$

TEOREMA 2: Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$.

DEM:

Seja $y = \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Se $u = \frac{\pi}{2} - x$, $y = \text{sen}\,u$ e, pela regra de cadeia,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \cos u . (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}x.$$

TEOREMA 3: Se $f(x) = \text{tg}x$, então $f'(x) = \sec^2 x$

DEM:

Lembrando que $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$ e utilizando a regra do quociente,

temos

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - \text{sen}x(-\text{sen}x)}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

TEOREMA 4: Se $f(x) = \text{cotg}x$, então $f'(x) = -\text{cossec}^2 x$.

DEM: Exercício.

TEOREMA 5: Se $f(x) = \sec x$, então $f'(x) = \sec x\,\text{tg}x$

DEM: Como $\sec x = 1/\cos x$, pela regra do quociente

$$f'(x) = -\frac{(-\text{sen}x)}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} = \sec x\,\text{tg}x$$

TEOREMA 6: Se $f(x) = \text{cossec}x$, então $f'(x) = -\text{cossec}x \ \text{cotg}x$.

DEM: Exercício.

EXEMPLOS: Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{2 + \cos x}$

SOLUÇÃO:

Pela regra de quociente,

$$f'(x) = \frac{(\text{sen}x)'(2 + \cos x) - \text{sen}x(2 + \cos x)'}{(2 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(2 + \cos x) - \text{sen}x(-\text{sen}x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(2 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

b) $f(x) = \text{tg}3x$

SOLUÇÃO:

Se $u = 3x$, $y = \text{tg}3x = \text{tg}u$ e, logo, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \sec^2 u.3 = 3\sec^2 3x.$$

c) $y = \text{sen}^2 4x$

SOLUÇÃO:

Se $u = \text{sen}4x$, $y = u^2$. Também, se $v = 4x$, $u = \text{sen}v$. Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = 2u.\cos v.4 = 8\text{sen}4x.\cos 4x.$$

d) $y = \sec \dfrac{x}{x + 2}$

SOLUÇÃO:

Se $u = \dfrac{x}{x + 2}$, $y = \sec u$ e, pela regra da cadeia,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \sec u \ \text{tg}u.\frac{x + 2 - x}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{2}{(x + 2)^2}.\sec\frac{x}{x + 2}.\text{tg}\frac{x}{x + 2}$$

e) $y = \text{sen}(\cos x)$

SOLUÇÃO:

Se $u = \cos x$, $y = \text{sen}u$ e, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \cos u.(-\text{sen}x) = -\text{sen}x\cos(\cos x)$$

f) $y = x^3.\sec^2 3x$

SOLUÇÃO:

Usando a regra do produto,

$y' = (x^3)' \sec^2 3x + x^3(\sec^2 3x)' =$

$= 3x^2\sec^2 3x(1 + 2x\text{tg}3x)$

g) $y = \sqrt{\text{tg}3x}$

SOLUÇÃO:

Se $u = \text{tg}3x$, $y = \sqrt{u}$. Pela regra da cadeia,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.3\sec^2 3x = \frac{3}{2}\,\frac{\sec^2 3x}{\sqrt{\text{tg}3x}}$$

h) $y = \text{cossec}\sqrt{x^2 + 1}$

SOLUÇÃO:

Se $u = \sqrt{x^2 + 1}$, $y = \text{cossec}\, u$ Também, se $v = x^2 + 1$, $u = \sqrt{v}$.

Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = -\text{cossec}u\ \text{cotg}u.\frac{1}{2\sqrt{v}}.2x =$$

$$= -\frac{x\ \text{cossec}\sqrt{x^2 + 1}\ .\ \text{cotg}\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

EXERCÍCIOS 3.6.1.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $y = 3\ \text{sen}7x$

b) $Y = \cos(5x^3 + x)$

c) $y = \text{sen}3x.\cos 3x$

d) $y = \dfrac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x - \cos x}$

e) $y = \dfrac{\text{sen}2x}{x^5}$

f) $y = \text{sen}^4 5x$

g) $y = \text{cotg}\ x^2$

h) $y = 3\sec(5x^2 + 1)$

i) $y = \sec\sqrt{x - 1}$

j) $y = \text{tg}^2 x.\sec^3 x$

l) $y = \text{sen}\sqrt{x} + \sqrt{\text{sen}x}$

m) $y = 5\text{cossec}\ 9x^2$

n) $y = \sqrt{\text{cotg}2x}$

o) $y = (1 - 2\cos x)^{5/2}$

p) $y = \text{cossec}(\text{cotg}\ 4x)$

q) $y = \text{sen}\,(\text{tg}\,4x^3)$

r) $y = \sec\,(\text{cossec}^2\sqrt{x})$

s) $y = \left(\dfrac{x}{\text{tg}x}\right)^3$

t) $y = \sec\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

u) $y = \text{sen}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$

v) $y = \sqrt{1+\text{sen}^2 3x}$

w) $y = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2 3x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

x) $y = \text{tg}(x^3\text{sen}3x)$

y) $y = \sqrt{\dfrac{3\text{sen}x - 2\cos x}{5}}$

z) $y = 4x^3 - x^2\text{cotg}^3\left(\dfrac{1}{x}\right)$

TEOREMA 7: Suponha que f seja contínua e monótona sobre um intervalo I e seja $y = f(x)$. Se f é diferenciável e $f'(x) \neq 0$ para todo x em I, então a derivada da função inversa $x = f^{-1}(y)$ é dada por:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

DEM: Exercício.

EXÉMPLOS: 1) Para as funções abaixo, calcule $\dfrac{dx}{dy}$

i) resolvendo para x em função de y e depois diferenciando.

ii) usando o teorema acima.

a) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

SOLUÇÃO:

i) Se $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$, então $y(x-1) = 2x+3$,

ou seja $(y-2)x = y+3$.

Logo, $x = \dfrac{y+3}{y-2}$

Pela regra do quociente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1(y-2)-(y+3).1}{(y-2)^2} = -\frac{5}{(y-2)^2},$$

Se deixarmos $\dfrac{dx}{dy}$ em função de x, pela substituição $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$,

obtemos:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{\left(\frac{2x+3}{x-1} - 2\right)^2} = -\frac{5(x-1)^2}{[2x+3-2(x-1)]^2} = -\frac{5(x-1)^2}{5^2} =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-1)^2$$

ii) Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(x-1) - (2x+3).1}{(x-1)^2} = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$

Pelo teorema 7,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{5}(x-1)^2$$

b) $y = x^3$

SOLUÇÃO:

i) Se $y = x^3$, então $x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$

Logo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

Deixando em função de x, pela substituição $y = x^3$, obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3)^2}} = \frac{1}{3x^2}$$

ii) Como

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

Pelo teorema 7, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{3x^2}$

c) $y = x^2 + 2x + 1$, $x > -1$

SOLUÇÃO:

i) Temos, $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Logo, $x + 1 = \sqrt{y}$, ou seja, $x = \sqrt{y} - 1$.

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2(x+1)}$$

ii) Uma vez que

$$\frac{dx}{dy} = 2x + 2,$$

Pelo teorema 7, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{2x+2}$

2) Seja f a função definida por $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$, $x > 0$. Uma vez que $f(1)=0$, $f^{-1}(0) = 1$. Use o teorema 7 para determinar $(f^{-1})'(0)$.

SOLUÇÃO:

Como $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - (x^3-1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2+1)^2}$,

$f'(1) = \dfrac{3}{2}$

Pelo Teorema 7,

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{2}{3}$

EXERCÍCIOS 3.6.2.

1. Nos exercícios abaixo, para cada função y, calcule $\dfrac{dx}{dy}$

   i) colocando x em função de y e diferenciando

   ii) usando o teorema 7.

a) $y = \dfrac{x-1}{2}$

b) $y = x^5$

c) $y = 2x^2 - x + 1$, $x > \dfrac{1}{4}$

d) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$

2. Seja f a função definida pela equação $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $x > \dfrac{2}{3}$.

   Use o teorema 7 para determinar $(f^{-1})'(5)$ (Note que $f(2) = 5$, ou seja, $f^{-1}(5) = 2$).

TEOREMA 8: Se $f(x) = \text{arc sen } x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

DEM:

Temos,

$y = \text{arc sen} x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Logo, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = +\sqrt{1-\text{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

Portanto, pelo teorema 7,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

TEOREMA 9: Se $f(x) = \text{arc cos}x$, então $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

DEM: Exercício.

TEOREMA 10: Se $f(x) = \text{arc tg}x$, então $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $\forall x \in R$.

DEM:

Temos,

$$y = \text{arc tg}x \Longleftrightarrow x = \text{tg}y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Portanto, pelo teorema 7,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

TEOREMA 11: Se $f(x) = \text{arccotg}x$, , então $f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$, $\forall x \in R$.

DEM: Exercício.

TEOREMA 12: Se $f(x) = \text{arc sec}x$, então $f'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

DEM: Temos,

$$y = \text{arc sec}x \Longleftrightarrow x = \sec y,\ 0 < y < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < y < \pi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{\cos y} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \cos y \Longleftrightarrow y = \text{arc cos}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Logo, se $u = \frac{1}{x}$, $y = \text{arc cos}u$ e, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{x^2}{|x|}\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

TEOREMA 13: Se $f(x) = \text{arc cossec}x$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

DEM: Exercício.

EXEMPLOS: Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $y = \text{arc sen } \dfrac{5}{3} x$.

SOLUÇÃO:

Se $u = \dfrac{5}{3}.x$, $y = \text{arc sen}u$. Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}.\frac{5}{3} = \frac{5}{3\sqrt{1 - \frac{25}{9}x^2}} = \frac{5}{\sqrt{9 - 25x^2}}$$

b) $y = x \text{ arc tg}x^2$

SOLUÇÃO:

Pela regra do produto,

$$\frac{dy}{dx} = 1.\text{arc tg}x^2 + x.\frac{d}{dx}(\text{arc tg}x^2)$$

Mas, $\dfrac{d}{dx}(\text{arc tg}x^2) = \dfrac{1}{1 + (x^2)^2}.2x = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

Portanto,

$$f'(x) = \text{arc tg}x^2 + \frac{2x^2}{1 + x^4}$$

c) $y = \dfrac{\text{arc cos } 2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

SOLUÇÃO:

Temos

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } 2x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}}.2 = -\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \quad \text{e}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{1 + 4x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1 + 4x^2}}.8x = \frac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Logo, pela regra do quociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}.\sqrt{1 + 4x^2} - \text{arc cos}2x.\dfrac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}}}{1 + 4x^2} =$$

$$= \frac{-2(1 + 4x^2) - 4x\text{arc cos}2x\sqrt{1 - 4x^2}}{\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}$$

d) $y = \text{arc cotg } \dfrac{1 - x}{1 + x}$

SOLUÇÃO:

SOLUÇÃO:

Se $u = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $y = \text{arc cotg } u$,

Como,

$$\frac{du}{dx} = \frac{-(1 + x) - (1 - x).1}{(1 + x)^2} = -\frac{2}{(1 + x)^2},$$

pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = -\frac{1}{1 + u^2}.\left(-\frac{2}{(1 + x)^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\left[1 + \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2\right](1 + x)^2} = \frac{2}{(1 + x)^2 + (1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

EXERCÍCIOS 3.6.3.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $y = \text{arc sen } \dfrac{x}{2}$

b) $y = \text{arc cos } \sqrt{x}$

c) $y = \text{arc tg} x^2$

d) $y = \text{arc sec}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $y = x \cdot \text{arc cossec}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $y = \sqrt{x} \text{ arc sec } \sqrt{x}$

g) $y = x \text{ arc cos} x$

h) $y = x^2 \text{arc sen} 2x$

i) $y = \text{arc cotg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$

j) $y = \dfrac{\text{arc cotg} 3x}{1 + x^2}$

k) $y = \text{arc sec}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$

l) $y = x \text{ arc sen} x + \sqrt{1 - x^2}$

m) $y = \text{arc tg } \dfrac{x \text{sen} x}{1 - x \cos x}$

n) $y = \text{arc tg } \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

o) $y = \text{arc sen } \sqrt{\text{sen} x}$

p) $y = \text{arc cos}(\text{sen} x)$

q) $y = \text{arc tg}(3\text{tg} x)$

r) $y = \dfrac{\text{arc sec}\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

SUGESTÃO: Considere

s) $y = \displaystyle\int_0^{\text{arcsen}x} \frac{dt}{5 + t^4}$

t) $y = \displaystyle\int_0^{\text{arctg}2x} (5 + t^2)^{20} dt$

$$\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt\right)' = f[g(x)]\, g'(x)$$

u) $y = \sqrt{\text{arc sec}3x}$

v) $y = x\text{arc cos}2x - \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2}$

w) $y = 4\text{arc sen}\,\dfrac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2}$

x) $y = -\sqrt{2}\,\text{arc cotg}\,\dfrac{\text{tg}x}{\sqrt{2}} - x$

y) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}$

z) $y = \text{arc sec}\sqrt{x^2 + 4}$

TEOREMA 14: Se $f(x) = \log_a x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{La}$,

$x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

DEM:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Multiplicando e dividindo por x,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}.\frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Se, $\alpha = \dfrac{\Delta x}{x}$, $\alpha \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{\alpha \to 0} \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$= \log_a e$, pelo 2º limite fundamental (teorema 5 - seção 2.7.) e pela continuidade da função logarítmica.

Portanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log e$$

CONSEQUÊNCIA: Se $f(x) = L|x|$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

DEM:

Se $x > 0$, $L|x| = Lx$ e o resultado é imediato.

Se $x < 0$, então $-x > 0$ e

$$\frac{d}{dx} L(-x) = \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{1}{x}, \text{ pela regra da cadeia.}$$

Portanto, $\dfrac{d}{dx} L|x| = \dfrac{1}{x}$

EXEMPLOS: Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $y = \log_a (x^2 + 1)$

SOLUÇÃO:

Se $u = x^2 + 1$, $y = \log_a u$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{1}{La}.2x = \frac{2x}{(x^2 + 1)La}$$

b) $y = \log_3(x^2 \operatorname{sen}x)$

SOLUÇÃO:

Se $u = x^2 \operatorname{sen}x$, $y = \log_3 u$. Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{1}{L3}(2x\operatorname{sen}x + x^2\cos x) = \frac{2x\operatorname{sen}x + x^2\cos x}{x^2\operatorname{sen}x L3}$$

c) $y = L|\operatorname{sen}x|$

SOLUÇÃO:

Se $u = \operatorname{sen}x$, $y = L|u|$ e, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \cot$$

d) $y = L(x + \sqrt{1 + x^2})$

SOLUÇÃO:

Se $u = x + \sqrt{1 + x^2}$, $y = Lu$ e, como,

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}}.2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \text{ pela regra da cadeia,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}.$$

$$.\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

EXERCÍCIOS 3.6.4.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $y=\log_3(x^3+1)$

b) $y = \log \dfrac{2x}{1+x}$

c) $y = L(2x+3)$

d) $y = L(x^2+2x+3)$

e) $y = Lx^4$

f) $y = L\sqrt{x} + \sqrt{Lx}$

g) $y = L(2-3x)^5$

h) $y = L\sqrt[3]{6x+7}$

i) $y = L^3x$

j) $y = L(x^2\sqrt{x^2+1})$

k) $y = L(Lx)$

l) $y = \dfrac{L^2x}{1+x^2}$

m) $y = Lx\log x - La\log_a x$

n) $y = \log(\mathrm{sen}x)$

o) $y = L(\cos x^2)$

p) $y = \mathrm{sen}(Lx)$

q) $y = \mathrm{arc\ tg}(Lx)$

r) $y = L\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

s) $y = L(5\mathrm{sen}\,x - 4\mathrm{arc\ sen}x)$

t) $y = \mathrm{arc\ tg}(Lx) - L(\mathrm{arc\ tg}x)$

u) $y = \sqrt{Lx+1} + L(\sqrt{x}+1)$

v) $y = L(\mathrm{arc\ sen}x) + \dfrac{1}{2}L^2x + \mathrm{arc\ sen}Lx$

w) $y = L\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

x) $y = L\dfrac{1+\sqrt{\mathrm{sen}x}}{1-\sqrt{\mathrm{sen}x}} + 2\,\mathrm{arc\ tg}\sqrt{\mathrm{sen}x}$

y) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,L\,\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$

z) $y = \mathrm{arc\ tg}\,L\dfrac{1}{x}$

TEOREMA 15: Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^xLa$.

DEM: Temos

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y \text{ e, então,}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.\frac{1}{La} = \frac{1}{a^x La}$$

Pelo teorema 7,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = a^x La.$$

CONSEQUÊNCIA: Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$

DEM:

Pelo teorema anterior,

$$f'(x) = e^x Le = e^x$$

EXEMPLOS: Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $y = 3^{5x}$

SOLUÇÃO:

Se $u = 5x$, $y = 3^u$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 3^u L3.5 = 5.3^{5x}L3.$$

b) $y = 2^{-5x}.3^{4x^2}$

SOLUÇÃO:

Pela regra do produto,

$$y' = (2^{-5x})'.3^{4x^2} + 2^{-5x}.(3^{4x^2})' =$$

$$= -5.2^{-5x}.L2.3^{4x^2} + 2^{-5x}.8x.3^{4x^2}.L3$$

$$= 2^{-5x}.3^{4x^2}(-5L2 + 8xL3).$$

c) $y = e^{x^2 - 3x + 7}$

SOLUÇÃO:

Se $u = x^2 - 3x + 7$, $y = e^u$ e, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(2x - 3) = (2x - 3)\, e^{x^2-3x+7}$$

d) $y = L(e^x + e^{-x})$

SOLUÇÃO:

Se $u = e^x + e^{-x}$, $y = Lu$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}.(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e) $y = e^{tgx}$

SOLUÇÃO:

Se $u = tgx$, $y = e^u$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u . sec^2 x = sec^2 x . e^{tgx}$$

EXERCÍCIOS 3.6.5.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $y = 3^{5x}$

b) $y = 4^{-2x}$

c) $y = 2^{7x^2}$

d) $y = (x^3 + 3).2^{-7x}$

e) $y = 2^{tgx^2}$

f) $y = 5^{secx}$

g) $y = 7^{\sqrt{x^4+9}}$

h) $y = x^{\pi}\pi^{x}$

i) $y = e^{2x}.Lx$

j) $y = e^{xLx}$

l) $y = e^{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}$

m) $y = 3e^{\sqrt{x}}$

n) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

o) $y = \sqrt{xe^x + x}$

p) $y = e^{sen^2 x}$

q) $y = e^{arc\ cotgx}$

r) $y = e^x.L(senx)$

s) $y = e^{-x}arcsec\ e^{-x}$

t) $y = L\left(\dfrac{e^{4x-1}}{e^{4x+1}}\right)$

u) $y = L\left(\dfrac{e^x}{1 + e^x}\right)$

v) $y = \dfrac{e^{2x}}{arc\ sen5x}$

w) $y = e^{\log_4 x}$

x) $y = \log_7 \dfrac{3^x}{1 + 5^x}$

y) $y = \text{arc cos } e^x$

z) $y = L(\sqrt{1 + e^x} - 1) - L(\sqrt{1 + e^x} + 1)$

TEOREMA 16: Se $y = [f(x)]^{g(x)}$ (dupla exponencial), então $y' = e^{g(x)Lf(x)}$.
$\cdot\ [g'(x)Lf(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}]$

DEM:

Se $y = [f(x)]^{g(x)}$, então

$Ly = L[f(x)]^{g(x)}$, ou seja,

$Ly = g(x)\ L[f(x)]$

Logo,

$y = e^{g(x)L[f(x)]}$

Chamando de $u = g(x)L[f(x)]$, temos $y = e^u$. Pela regra da cadeia,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.[g'(x)Lf(x) + g(x)\ \frac{f'(x)}{f(x)}] =$$

$$= e^{g(x)Lf(x)}[g'(x)Lf(x) + g(x)\ \frac{f'(x)}{f(x)}]$$

OBSERVAÇÃO: Costuma-se escrever $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v.v'Lu$.

EXEMPLOS: Calcular as derivadas das seguintes funções:

a) $y = x^x$

SOLUÇÃO:

Temos,

$Ly = Lx^x$ e, logo,

$Ly = xLx$.

Então,

$y = e^{xLx}$

Se $u = xLx$, $y = e^u$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(Lx + x.\frac{1}{x}) = e^{xLx}(Lx + 1) =$$

$$= x^x(Lx + 1).$$

b) $y = (\text{sen}x)^x$

SOLUÇÃO:

Temos,

$Ly = L(\text{sen}x)^x \Leftrightarrow Ly = xL\text{sen}x \Leftrightarrow y = e^{xL\text{sen}x}$

Se $u = xLsenx$, $y = e^u$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(Lsenx + x\frac{1}{sen\ x}\cos x) =$$

$$= e^{xLsenx}(Lsen\ x + xcotg\ x) = (senx)^x(Lsenx + cotgx).$$

Ou, usando a observação acima, $[(senx)^x]' = x(senx)^{x-1}cosx + (senx)^x L\ senx$

c) $y = senx^{tgx}$

SOLUÇÃO:

Temos $y = e^{tgxLsenx}$

Se $u = tg\ xLsen\ x$, $y = e^u$ e, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(sec^2Lsen\ x + tgx.\frac{1}{sen\ x}cosx) =$$

$$= e^{tgxLsenx}(sec^2xLsenx + 1) = senx^{tgx}(sec^2xLsenx + 1).$$

EXERCÍCIOS 3.6.6.

1. Nos exercícios abaixo, encontre a derivada da função dada:

a) $y = (x + 1)^x$

b) $y = x^{\sqrt{x}}$

c) $y = x^{e^x}$

d) $y = x^{senx}$

e) $y = (x^2 + 4)^{Lx}$

f) $y = x^{x^2}$

g) $y = \sqrt[x]{x}$

h) $y = (\frac{3}{x})^x$

i) $y = (Lx)^x$

j) $y = (Lx)^{Lx}$

l) $y = (4e^x)^{3x}$

m) $y = (cosx)^{senx}$

n) $y = (arc\ tgx)^x$

3.7. DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR.

Se f' é a derivada de uma função f, f' também é uma função de x, chamada primeira derivada de f.

A derivada de f', se existir, é chamada segunda derivada de f, denotada por,

$$y'' = f''(x) = D^2_x y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Generalizando, a n-ésima derivada da função f é a derivada da (n-1)-ésima derivada de f. Indicamos por

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = D^n_x y = \frac{d^ny}{dx^n}$$

OBSERVAÇÃO: Se uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de moviemento $s = f(t)$, já vimos que a velocidade e a aceleração da partícula são dadas por $v(t) = f'(t)$ e $a(t)=v'(t)$, respectivamente. Portanto, podemos dizer que a aceleração instantânea é a segunda derivada de s em relação a t, isto é,

$$a(t) = f''(t).$$

EXEMPLOS:

a) Encontrar todas as derivadas da função f definida por

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 10.$$

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x$$
$$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$$
$$f'''(x) = 72x - 12$$
$$f^{(4)}(x) = 72$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \ \forall n \geq 5.$$

b) Dada a função $y = e^{kx}$(k = constante), encontre a expressão da sua derivada de ordem n.

SOLUÇÃO:

Temos

$$y' = ke^{kx}$$
$$y'' = k^2e^{kx}$$
$$y''' = k^3e^{kx}$$

Observando a lei de formação, podemos afirmar que,

$$y^{(n)} = k^ne^{kx}$$

c) Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento,

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

onde s é dado em metros e t em segundos. Encontre o tempo, a distância à origem e a velocidade instantânea quando a aceleração instantânea for nula.

SOLUÇÃO:

Temos

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t + \frac{4.(t + 1) - 4t}{(t + 1)^2} = t + \frac{4}{(t + 1)^2} \quad e$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 1 + \frac{0.(t + 1)^2 - 4.2(t + 1)}{(t + 1)^4} =$$

$$= 1 - \frac{8}{(t + 1)^3}$$

Temos

$$a(t) = 0 \iff 1 - \frac{8}{(t + 1)^3} = 0 \iff (t + 1)^3 = 8 \iff t + 1 = 2 \iff$$

$$\iff t = 1 \text{ s}.$$

Quando $t = 1$ s ,

$$v(1) = 1 + \frac{4}{(1 + 1)^2} = 2\text{m/s} \quad e$$

$$s(1) = \frac{1}{2}.1^2 + \frac{4.1}{1 + 1} = \frac{5}{2} \text{ m}$$

EXERCÍCIOS 3.7.

1. Nos exercícios abaixo, encontre as primeira e segunda derivadas da função dada:

a) $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3.$

b) $f(x) = 3x^8 + 5x^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $f(x) = \sqrt[5]{10x + 7}$

g) $f(x) = e^{x^2}$

h) $f(x) = \text{sen}^2 x$

i) $f(x) = (1 + x^2).\text{arc tg}x$

j) $f(x) = L(x + \sqrt{4 + x^2})$

2. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento dada. Encontre t, s e v quando a aceleração for nula:

a) $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 1 \quad , \; t \geq 0$

b) $s(t) = 9t^2 + 2\sqrt{2t + 1} \quad , \; t \geq 0$

c) $s(t) = 5t + \dfrac{2}{t + 1} \quad , \; t \geq 0$

d) $s(t) = \dfrac{4}{9} t^{3/2} + 2t^{1/2} \quad , \; t \geq 0$

3. Nos exercícios abaixo, encontre fórmulas para f'(x) e f''(x) e estabeleça os seus domínios:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \text{ se } x < 0 \\ x^2 & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{|x|} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$

4. Seja g uma função duas vezes diferenciável tal que $g(2) = 3$, $g'(2) = \dfrac{1}{3}$ e $g''(2) = 5$. Define-se a função f por $f(x) = x^4 g(x)$. Calcule $f''(2)$.

5. Nos exercícios abaixo, encontre a expressão para $f^{(n)}(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = e^{-3x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

f) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

5. Seja f uma função duas vezes diferenciável. Prove que:

a) Se f é par, então f'' é par.

b) Se f é impar , então f'' é impar.

3.8. A DIFERENCIAL.

Seja f definida por $y = f(x)$. Sua derivada é determinada por :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Uma vez que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0,$$

podemos tornar $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right|$ ou $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeno.

Assim,

$\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ se $|\Delta x|$ for suficientemente pequeno.

Temos, então, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1: Seja $y = f(x)$. Então a diferencial de y, demonstrada por dy, é dada por,

$$dy = f'(x)\Delta x,$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário em x.

Se trabalharmos com a função $y = x$, temos

$y' = 1$ e, consequentemente,

$dy = dx = \Delta x$, ou seja, $dx = \Delta x$

Temos, então, a definição:

DEFINIÇÃO 2: Seja $y = f(x)$. Então a diferencial de x, denotada por dx, é dada por,

$$dx = \Delta x.$$

Podemos, então, escrever

$$dy = f'(x)dx.$$

OBSERVAÇÕES:

i) Da última relação segue-se que

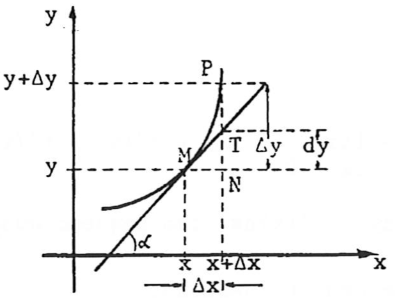
$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

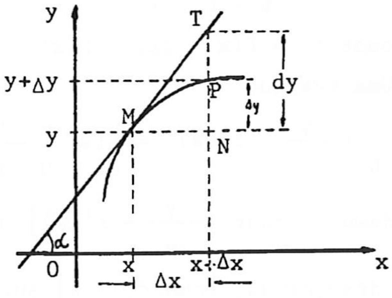
isto é, $f'(x)$ pode ser visto como a razão da diferencial de uma função pela diferencial da variável independente.

ii) Como $dy \approx \Delta y$ quando $\Delta x = dx$ é suficientemente pequeno, concluímos que a diferencial de y, dy, e o incremento de y, Δy, são aproximadamente iguais quando dx é suficientemente pequeno.

iii) Geometricamente, temos o seguinte:

Sobre a curva $y = f(x)$, tome um ponto arbitrário $M(x,y)$ e trace a reta tangente à curva neste ponto. Denote por α o ângulo que a reta tangente faz com o eixo x.





Dê um incremento Δx à variável x. Logo, a função mudará de $\Delta y = PN$.

Temos, então, os pontos $N(x + \Delta x, y)$ e $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Do ΔMNT, temos,

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha$$

Como $MN = \Delta x$ e $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, temos $NT = f'(x)\ \Delta x = dy$

Logo, $PT = \Delta y - dy$

Note que quanto menor for o valor de $dx = \Delta x$, menor será o valor de $\Delta y - dy$.

EXEMPLOS:

a) Encontre dy e Δy para a função $y = x^2$ e determine o erro $\Delta y - dy$ cometido na aproximação para:

i) x e Δx arbitrários

ii) $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$

iii) $x = 20$, $\Delta x = 0{,}001$

SOLUÇÃO:

i) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$dy = y'\Delta x = 2x\Delta x$

$\text{Erro} = \Delta y - dy = \Delta x^2$

ii) $\Delta y = 2.20.0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$ e

$dy = 4{,}00$

$\text{Erro} = \Delta y - dy = 0{,}01$

iii) $\Delta y = 2.20.0{,}001 + (0{,}0001)^2 = 0{,}040001$ e

$dy = 0{,}04$

$\text{Erro} = \Delta y - dy = 0{,}000001$

b) Usando diferenciais, estime $\sqrt[3]{28}$.

SOLUÇÃO:

Consideremos a função $y = \sqrt[3]{x}$.

Temos $y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x}$ e $dy = y'dx = (x^{1/3})'\,dx = \dfrac{1}{3x^{2/3}} \cdot dx$.

Como o cubo perfeito mais próximo de 28 é 27, tomamos

$x = 27$ e $\Delta x = 1$.

Portanto, $x + \Delta x = 28$, $dx = \Delta x = 1$ e

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(27)^2}} \cdot (1) = \frac{1}{27}$$

Então $\sqrt[3]{28} = y + \Delta y$ e, como $\Delta y \cong dy$, temos

$$\sqrt[3]{28} \approx y + dy = 3 + \frac{1}{27} = 3,037$$

O valor de $\sqrt[3]{28}$ com três casas decimais é 3,036.

c) Uma caixa de forma cúbica tem 40 cm de aresta, sendo que esta medida é dada a menos de um erro de $\pm 0,5$ cm. Dar uma estimativa para o erro cometido quando se calcula o volume do cubo por $V = (40)^3 cm^3$.

SOLUÇÃO:

Sabemos que o volume de um cubo de aresta x é dado por

$$V(x) = x^3$$

Quando x é modificado para $x + dx$, o acréscimo no volume é

$$\Delta V = V(x + dx) - V(x).$$

Mas, $\Delta V \cong dV = V'(x)dx = 3x^2dx$.

Quando $x = 40$ e $dx = \pm 0,5$, temos

$$dV = 3.1600.(\pm 0,5) = \pm 2400 \text{ e}$$

o erro cometido é aproximadamente $\pm 2400 cm^3$

PROPRIEDADES: Temos as seguintes fórmulas diferenciais:

i) $d(c) = 0$

ii) $d(cu) = cdu$

iii) $d(u + v) = du + dv$

iv) $d(uv) = udv + vdu$

v) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

vi) $d(u^n) = nu^{n-1}du$

vii) $d(x^n) = nx^{n-1}dx$

onde u e v são funções de x diferenciáveis, c é constante e n é um expoente racional.

EXEMPLOS:

a) Se $y = 2x^3 + 4x + 9$, ache dy.

SOLUÇÃO:

$$dy = 6x^2dx + 4dx = (6x^2 + 4)dx$$

b) Se $y = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$, encontre dy.

SOLUÇÃO:

$$dy = \frac{(x^2 + 2)d(3x) - 3xd(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{(x^2 + 2)3dx - 3x2xdx}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 6 - 6x^2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{6 - 3x^2}{(x^2+2)^2}dx$$

c) Se $y = \sqrt{3 - x^5}$, ache dy.

SOLUÇÃO:

$$dy = \frac{d(3 - x^5)}{2\sqrt{3 - x^5}} = \frac{-5x^4}{2\sqrt{3 - x^5}}dx$$

DEFINIÇÃO 3: Seja $y = f(x)$, já vimos que

$$dy = f'(x)dx$$

A diferencial da diferencial de uma função é chamada diferencial de segunda ordem desta função e é denotado por d^2y:

$$d(dy) = d^2y, \text{ ou seja,}$$

$$d^2y = (dy)'\,dx = (f'(x)dx)'\,dx =$$

$$= f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

A diferencial de ordem 3 de uma função é a diferencial da diferencial de segunda ordem, ou seja,

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'\,dx = f'''(x)dx^3.$$

Generalizando, a diferencial de ordem n é a diferencial da diferencial de ordem $(n - 1)$, ou seja,

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$$

EXEMPLOS:

a) Se $y = 9x^5 - 7x^4 + x - \dfrac{2}{x}$, ache d^2y

SOLUÇÃO:

Temos $y' = 45x^4 - 28x^3 + 1 + \dfrac{2}{x^2}$. Logo,

$$d^2y = y''\,dx^2 = (180x^3 - 84x^2 - \frac{4}{x^3})dx^2$$

b) Se $y = \cos 5x$, ache d^2y.

SOLUÇÃO:

Temos $y' = -5\operatorname{sen}5x$

Logo,

$$d^2y = y''\,dx^2 = (-25\cos 5x)dx^2$$

EXERCÍCIOS 3,8.

1. Nos exercícios abaixo, encontre dy:

a) $y = 8 - 3x^2 + x^5$

b) $y = \sqrt{16 - x^2}$

c) $y = x^3 \sqrt[3]{x^3 + 9}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 3}}$

f) $y = \sqrt{3x + 4} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$

g) $y = e^{-x^2}$

h) $y = \text{cotg}x + \text{cossec } x$

i) $y = L \dfrac{1 - x}{1 + x}$

j) $y = xLx - x$

l) $y = \text{arc sen } \dfrac{x}{8}$

2. Nos exercícios abaixo, use diferenciais para encontrar um valor aproximado para a quantidade dada:

a) $\sqrt{101}$

b) $\sqrt[4]{82}$

c) $\sqrt[3]{7,5}$

d) $\sqrt[4]{17}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}}$

f) $\sqrt{0,042}$

g) $\cos 61^o$

h) $\text{tg} 44^o$

i) $e^{0,2}$

j) $L\ 0,9$

l) $\text{arc tg} 1,05$

3) Nos exercícios abaixo, encontre dy e Δy para as funções dadas, usando os valores x e Δx indicados. Determine o erro $\Delta y - dy$:

a) $y = 3x^2 + 1$, $x = 1$, $\Delta x = 0,1$

b) $y = x^3 + 1$, $x = -1$, $\Delta x = 0,1$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 2$, $\Delta x = 0,01$

d) $y = \dfrac{x + 2}{x + 3}$, $x = 0$, $\Delta x = -0,03$

e) $y = \dfrac{9}{\sqrt{x}}$, $x = 9$, $\Delta x = 0,1$

4) A altura de um cone circular reto é constante e igual a 2m. Se o raio da base é aumentado de 100 cm para 105 cm, ache o crescimento aproximado do volume do cone.

5) A medida de um lado de um cubo é 15 cm, com uma possibilida de de erro de 0,01cm. Usando diferencial, encontre o erro a proximado no cálculo do : a) volume b) área de uma das faces.

6) A força atrativa entre partículas elétricas de cargas opostas é dada por $F(x) = \dfrac{k}{x^2}$, onde x é a distância entre as partículas e k é uma constante. Se x cresce de 2%, ache a porcentagem aproximada de decréscimo de F.

7) Nos exercícios abaixo, calcule d^2y:

a) $y = 8x^7 - x^4 + 5x - \dfrac{5}{x^2}$

b) $y = \sqrt{1 - x^2}$

c) $y = L(2x^2 + 1)$

d) $y = e^{-2x^2}$

e) $y = x^2e^{-x}$

f) $y = \text{arc tg}x$

g) $y = \text{sen } x \text{ L}x$

h) $y = \text{arc sec } \dfrac{1}{x + 1}$

i) $y = \log_3(\text{sen } x^2)$

j) $y = 2^{x^3+2x}$

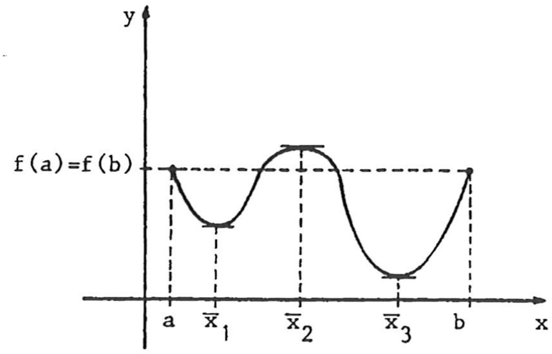
l) $y = (x + 2)^x$

m) $y = \dfrac{Lx}{x}$

CAPÍTULO 4: APLICAÇÕES DA DERIVADA

4.1. TEOREMAS DE VALOR MÉDIO

TEOREMA 1 (ROLLE - 1652/1719) - Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e que $f(a) = f(b)=K$. Então existirá pelo menos um ponto $\overline{x}$ tal que $f'(\overline{x}) = 0$.



DEM: Caso I - Seja $f(x)$ constante em $[a,b]$. Então em todos os pontos de (a,b) $f'(x)$ será zero.

Caso II - Sejam $M > m$ respectivamente o máximo e o mínimo de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$. Como f é contínua em $[a,b]$ existirão $\overline{x}_M$ e $\overline{x}_m$ tais que $f(\overline{x}_M) = M$ e $f(\overline{x}_m) = m$ e pelo menos um dos $\overline{x}_M$ e $\overline{x}_m$ não coincidirá com os extremos $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Sem perda de generalidade seja esse o ponto $\overline{x}_M$. Mostremos que $f'(\overline{x}_M)$ necessariamente terá que serzero. Observe que

$$f(\overline{x}_M + \Delta x) \leq f(\overline{x}_M), \text{ para todo } \Delta x$$

$$f(\overline{x}_M + \Delta x)-f(\overline{x}_M) \leq 0, \text{ para todo } \Delta x$$

Portanto, se $\Delta x \neq 0$ temos

$$\frac{f(\overline{x}_M + \Delta x) - f(\overline{x}_M)}{\Delta x} \leq 0, \quad \Delta x > 0$$

$$\frac{f(x_M + \Delta x) - f(x_M)}{\Delta x} \geq 0, \quad \Delta x < 0 \;;$$

essas desigualdades implicam que

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(\overline{x}_M + \Delta x) - f(\overline{x}_M)}{\Delta x} \leq 0 \\ \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(\overline{x}_M + \Delta x) - f(\overline{x}_M)}{\Delta x} \geq 0 \end{cases}.$$

Usando a hipótese de que $f'(\overline{x}_M)$ existe, os limites acima devem ser iguais, o que acontecerá somente se ambos forem zero. C.Q.D.

TEOREMA 2 (Cauchy) - Sejam $f(x)$ e $g(x)$ contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b) com $g'(x) \neq 0$ em (a,b). Existirá, então, pelo menos um ponto $\overline{x} \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})}$$

DEM: Seja $Q(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$ (1)

Observemos que $g(b) - g(a) \neq 0$, pois, caso contrário, $g(b) = g(a)$, donde decorreria pelo Teorema de Rolle que existiria $\overline{x} \in (a,b)$ tal que $g'(\overline{x}) = 0$, contrariando uma hipótese deste teorema. A função $Q(x)$ está bem definida.

Substituindo-se x por $\underline{a}$ e $\underline{b}$ respectivamente, verificamos que $Q(a) = Q(b) = 0$. Pelo Teorema de Rolle existirá $\overline{x} \in (a,b)$ tal que

$$Q'(\overline{x}) = 0$$

Portanto, derivando (1) e igualando a zero teremos

$$f'(\overline{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\overline{x}) = 0$$

Resultando,

$$\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \text{C.Q.D.}$$

TEOREMA 3 (Lagrange) - Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) então existirá $\overline{x} \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a)$$

DEM: Exercício (use o teorema de Cauchy)

EXEMPLOS:

a) Mostre que $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1,1]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle e determine todos os $\overline{x}$ em $(-1,1)$ tais que $f'(\overline{x})=0$.

SOLUÇÃO:

i) $f(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$f(b) = f(1) = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$

ii) $f(x) = x^3 - x$ é um polinômio e, portanto, é contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$.

iii) Calculo de $\bar{x}$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(\bar{x})\ 3\bar{x}^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 3\bar{x}^2 = 1,\ \bar{x}^2 = \dfrac{1}{3},\ \bar{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto teremos $\bar{x}_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $\bar{x}_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

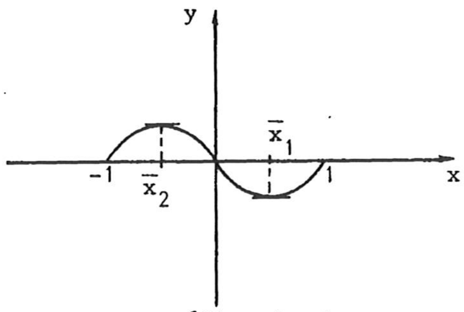


gráfico de $x^3 - x$

b) Se $f(x) = \dfrac{4}{x}$, mostre que não existe nenhum $\bar{x}$ tal que

$f(4) - f(-1) = f'(\bar{x})[4 - (-1)]$. Por que isso não contradiz o Teorema de Lagrange?

SOLUÇÃO:

$f(4) = \dfrac{4}{4} = 1;\ f(-1) = \dfrac{4}{-4} = -4$. Temos

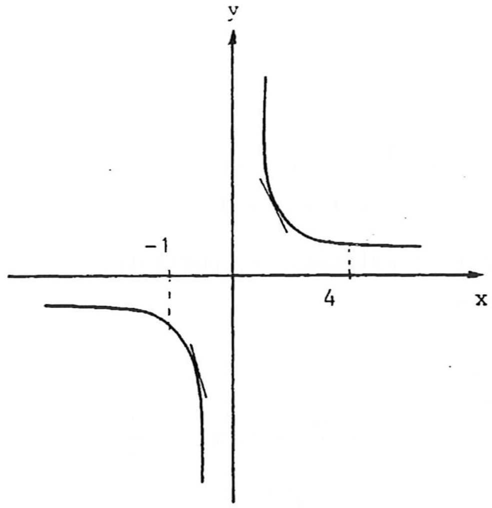
que mostrar que não existe $\bar{x}$ tal que

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(4) - f(-1)}{5} = \frac{1 + 4}{5} = 1$$

Mas $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$, $f'(\bar{x}) = -\dfrac{4}{\bar{x}^2}$;

como $f'(\bar{x}) < 0$ para todo $\bar{x} \neq 0$ resulta que $f'(\dot{x})$ não pode ser igual a 1 nunca.

Como $f(x) = \dfrac{4}{X}$ não é derivável no ponto $x = 0$, pertencente ao intervalo $[-1,4]$, uma das hipóteses do teorema de Lagrange não está satisfeita para este exemplo. Portanto a sua conclusão não necessariamente deve valer.



c) Usando o teorema de Cauchy, calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x}$

SOLUÇÃO:

As funções $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = x$ são contínuas em $[-K,K]$ e deriváveis em $(-K,K)$, com $K > 0$. Sejam $a = 0$ e $b = x$; então existe $\bar{x}$ tal que

$$\frac{\text{sen } x - \text{sen } 0}{x - 0} = \frac{(\text{sen } x)' \; x = \bar{x}}{(x)' x = \bar{x}}$$

ou, $$\frac{\text{sen}x}{x} = \frac{\cos\bar{x}}{1}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \lim\limits_{\bar{x} \to 0} \dfrac{\cos \bar{x}}{1} = \cos 0 = 1$

OBS.: veremos mais casos desses no capítulo Regras de L'Hospital.

EXERCÍCIOS 4.1.

1. Se $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$ porém $f'(\bar{x}) \neq 0$ para todo $\bar{x}$ em $(-1,1)$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

2. Se $f(x) = 5 + 3(x - 1)^{2/3}$, mostre que $f(0) = f(2)$, mas $f'(\bar{x}) \neq 0$ para todo o $\bar{x} \in (0,2)$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

3. Mostre que f satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo indicado e determine todos os números $\bar{x}$ em (a,b), tai que $f'(\bar{x}) = 0$.

   a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $[0,4]$
   b) $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, $[-7,1]$
   c) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$, $[-3,3]$
   d) $f(x) = x^2 - 3x$, $[0,3]$
   e) $f(x) = \sqrt{x}\,(x^3 - 1)$, $[0,1]$
   f) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $[-1,3]$

4. Determine se a função satisfaz as hipótese do Teorema de Lagrange no intervalo $[a,b]$ indicado e, em caso afirmativo, determine todos os $\bar{x} \in (a,b)$ tais que $f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$.

a) $f(x) = x^3 + 1, \quad [-2,4]$

b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}, \quad [1,4]$

c) $f(x) = 4 + \sqrt{x - 1}, \quad [1,5]$

d) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 15x, \quad [-1,1]$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}, \quad [0,2]$

f) $f(x) = |x - 3|, \quad [-1,4]$

5. Mostre que, se $Q(x)$ é a função definida na demonstração do Teorema de Cauchy, então $Q(x)$ é a distância (medida ao longo de uma vertical com intercepto-x igual a x) entre o gráfico de f e a reta passando por $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.

6. Usando o Teorema de Cauchy, calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{\cos x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{\pi - x}$

4.2. FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Pelo fato de a primeira derivada poder ser interpretada como a tangente do ângulo de tangência de uma reta a uma curva no ponto dado por $(a,f(a))$, ela poderá ser utilizada para a análise da taxa de crescimento de uma função.

TEOREMA 1: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

i) Se $f'(x) > 0$ para $x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$

ii) Se $f'(x) < 0$ para $x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$

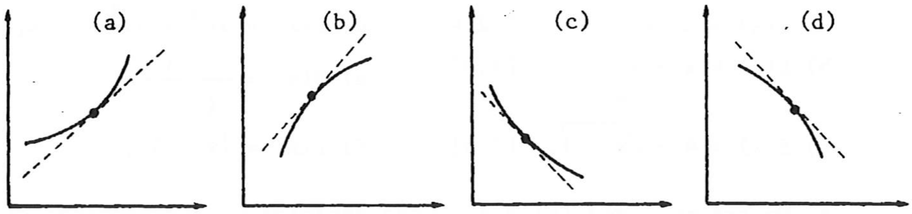
DEM: Suponhamos que $f'(x) > 0$ para $x \in (a,b)$ e sejam x_1 e x_2 $(x_1 < x_2)$ pontos de $[a,b]$. Aplicando o Teorema de Lagrange teremos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1)$$

para algum $\bar{x} \in (a,b)$. Como, por hipótese, $f'(\bar{x}) > 0$ e $x_2 > x_1$, resulta que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou, $f(x_2) > f(x_1)$, caracterizando f como uma função crescente em $[a,b]$.

A demonstração da parte (ii) fica como exercício.

As figuras a seguir mostram a relação entre funções crescentes e decrescentes e o sinal de sua primeira derivada no intervalo de interesse:



f crescente	f crescente	f decrescente	f decrescente
f' crescente	f'decrescente	f' crescente	f' decrescente
$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

Podemos notar que em ambos os casos (a) e (b) a tangente à curva é positiva, caracterizando, pelo teorema 1, casos de funções crescentes.

A diferença mais importante entre os casos (a) e (b) é que, como veremos adiante, a tangente à curva (numericamente) cresce no caso (a) e decresce no caso (b).

Nos casos (c) e (d) temos uma situação oposta, pois ambas as funções são decrescentes, sendo que no caso (c) a primeira derivada (tangente à curva) cresce e no caso (d) a primeira derivada decresce.

EXEMPLOS:

a) Se $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

SOLUÇÃO:

Pelo Teorema 1, bastará os valores de x para os quais $f'(x) > 0$ (crescente) e $f'(x) < 0$ (decrescente).

Impondo a condição $f'(x) > 0$ teremos;

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1) > 0$$

Resolvendo a inequação teremos o quadro abaixo:

Intervalo	$3x + 5$	$x - 1$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -\frac{5}{3})$	$-$	$-$	$+$	crescente
$(-\frac{5}{3}, 1)$	$+$	$-$	$-$	decrescente
$(1, \infty)$	$+$	$+$	$+$	crescente

onde os valores $-\dfrac{5}{3}$ e 1 são obtidos pelas equações

$$\begin{cases} 3x + 5 = 0 & \Longrightarrow \quad x = -\dfrac{5}{3} \\ x - 1 = 0 & \Longrightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

Esses pontos são chamados pontos críticos de f.

Uma outra ilustração feita pela figura abaixo.

b) Se $f(x) = e^{-x^2}$, estude os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

SOLUÇÃO:

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f'(x) > 0 \iff -2xe^{-x^2} > 0$

Como e^{-x^2} é sempre positiva, decorre que

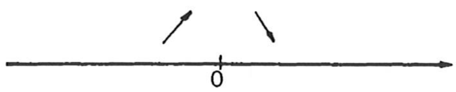
$-2x > 0 \iff x < 0$

Portanto se $x < 0$, $f'(x) > 0$, decorrendo que para $x < 0$ a função f é crescente.

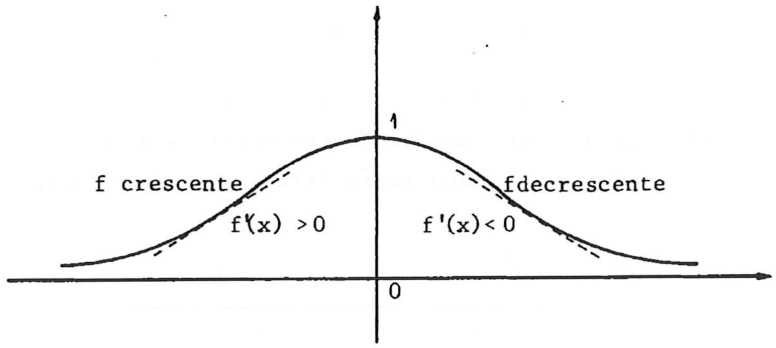
De forma análoga, $f'(x) < 0 \iff -2xe^{-x^2} < 0 \iff -2x < 0 \iff$ $\iff x > 0$. Portanto, se $x > 0$, a função f será decrescente.

Resumindo teremos:

Intervalo	$-2x$	e^{-x^2}	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	+	+	+	crescente
$(0, +\infty)$	-	+	-	decrescente



Na verdade, o gráfico da função dada por $f(x) = e^{-x^2}$ é como mostra a figura a seguir:



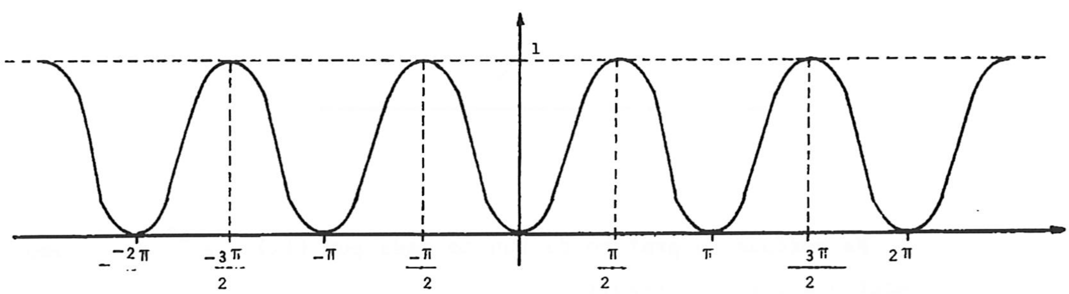
b) Estudar os intervalos de crescimento e decrescimento da função dada por $f(x) = sen^2x$

SOLUÇÃO:

A primeira derivada fica $f'(x) = 2senx\ cosx$ e o quadro abaixo resume os sinais dos fatores, da derivada e o tipo de crescimento de f.

Intervalo	2senx	cosx	f'(x)=2senxcosx	f
$(0,\frac{\pi}{2})$	+	+	+	crescente
$(\frac{\pi}{2},\pi)$	+	-	-	decrescente
$(\pi,\frac{3\pi}{2})$	-	-	+	crescente
$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$	-	+	-	decrescente

Na realidade o gráfico de $f(x) = sen^2x$ fica



EXERCÍCIOS 4.2.

1. Indique os intervalos em que f é crescente ou decrescente e obtenha os pontos (abscissas) em que $f'(x) = 0$. Esboce o gráfico de f.

   a) $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$ d) $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$

   b) $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$ e) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 4}$

   c) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$ f) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

2. Calcule os valores de x tais que $f'(x) = 0$.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 7}}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$

3. Calcule os valores de x tais que $f''(x) = 0$.

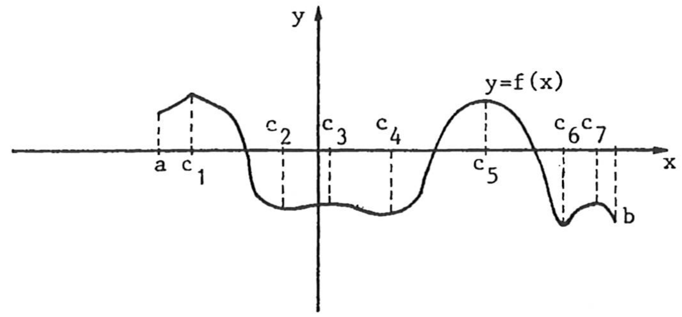
   a) $f(x) = e^{-x^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x^2$

   c) $f(x) = Lx$.

4.3. EXTREMOS DE FUNÇÕES

4.3.1. EXTREMOS ABSOLUTOS - Consideremos uma função contínua em $[a,b]$, cujo gráfico é exibido abaixo.



Vamos caracterizar e definir pontos desse gráfico tais como $c_1, c_2, \ldots, c_7$. O que de comum possuem essas abscissas? Vejamos que a função nesses pontos muda o sentido do crescimento. Em c_1, por exemplo, há uma brusca mudança de crescimento para decrescimento. Nos demais pontos as mudanças de sentido de crescimento é suave.

Se analisarmos pela primeira derivada vemos que em c_1 ela não existe e em $c_2, c_3, \ldots, c_4$, como a tangente à curva nesses pontos é horizontal, a primeira derivada é zero.

DEFINIÇÃO 1: O ponto c do domínio de uma função f é dito ponto crítico de f se uma das duas condições (i) e (ii) for satisfeita:

i) $f'(c)$ existe e é zero.
ii) $f'(c)$ não existe.

DEFINIÇÃO 2: Seja f definida num intervalo I e c_o um ponto em I.

i) $f(c_o)$ é máximo absoluto em I se $f(x) \leq f(c_o)$, $x \in I$
ii) $f(c_o)$ é mínimo absoluto em I se $f(x) \geq f(c_o)$, $x \in I$

casos em que c_o é dito ponto de máximo absoluto e ponto de mínimo absoluto em I, respectivamente.

OBSERVAÇÃO:

Os conceitos de máximo e mínimo absolutos são relativos a um dado intervalo; portanto uma caracteristica global, em oposição aos conceitos de máximo e mínimo locais que veremos adiante.

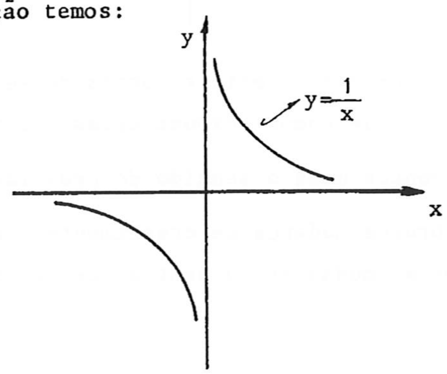
Quando queremos nos referir indistintamente a máximo e mínimo absolutos diremos extremos absolutos.

EXEMPLO:

Analisar a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no intervalo $(-\infty, +\infty) - \{0\}$ com com relação a máximo e mínimo absolutos.

SOLUÇÃO:

Com exceção do ponto $x = 0$ a função $\dfrac{1}{x}$ é contínua e derivável. A derivada é $-\dfrac{1}{x^2}$, uma função sempre com valores negativos e, portanto, a função f é sempre decrescente. De fato, examinando o gráfico dessa função temos:



Notemos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, isto é, a função $\frac{1}{x}$ não é limitada nem acima nem abaixo. Diremos então que essa função não possui extremos absolutos em R*.

Se o problema fosse a determinação dos extremos absolutos de $\frac{1}{x}$ no intervalo $(1,+\infty)$ então o máximo absoluto também não existiria pois $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ não pode ser considerado pelo fato do ponto 1 não pertencer ao intervalo. De modo análogo essa função nesse intervalo não possui mínimo absoluto, pois ela é sempre decrescente para zero sem nunca atingí-lo.

Se o problema fosse o cálculo dos extremos absolutos no intervalo $[-1,-\frac{1}{2}]$ então o máximo será $M = f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ e o mínimo absoluto será $m = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$, e os pontos -1 e $\frac{-1}{2}$ são, respectivamente, os pontos de máximo e mínimo absolutos em relação a $[-1,-\frac{1}{2}]$.

OBSERVAÇÃO:

Como vimos pelo exemplo acima é muito importante o tipo de intervalo quando se deseja uma análise a respeito de pontos extremos absolutos.

TEOREMA 1: Se uma função é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ então f admite seu máximo e seu mínimo pelo menos uma vez em $[a,b]$. (Sem demonstração).

OBSERVAÇÃO:

Este teorema é extremamente simples de se entender e até já o utilizamos na demonstração do Teorema de Rolle. Porém a sua prova remonta na própria conceituação de números reais como um corpo ordenado completo, assunto de topologia dos reais que transcende os objetivos mais aplicados deste curso. O estudante mais interessado pode ler por exemplo (LIMA, E.L. - Elementos de Topologia geral, Ao Livro Técnico, Rio, 1970).

4.3.2. EXTREMOS RELATIVOS:

DEFINIÇÃO 1: Seja c um ponto do domínio da função f.

i) f(c) é máximo relativo (ou local) se existir um intervalo aberto (a,b), contendo c, tal que $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in (a,b)$

ii) f(c) é mínimo relativo (ou local) se existir um intervalo aberto (a,b), contendo c, tal que $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in (a,b)$.

OBSERVAÇÃO:

Pela definição acima, dado um intervalo I, a função f poderá ter vários máximos e mínimos relativos, mas apenas um máximo e um mínimo absolutos, quando os tiver.

Algumas vezes os extremos relativos (máximos ou mínimos relativos) poderão coincidir com os extremos absolutos.

TEOREMA 1: Se uma função f é derivável em c e tem um extremo local nesse ponto então $f'(c) = 0$.

DEM:

Provemos pela contrapositiva, isto é, neguemos a tese e concluamos pela negativa das hipóteses.

Suponhamos que $f'(c) > 0$, por exemplo. Então, pela definição de derivada,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Pelo teorema da permanência do sinal, existe um intervalo (a,b) contendo c tal que o quociente $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

Desse último fato decorre que:

i) Se $x > c$ então $f(x) > f(c)$

ii) Se $x < c$ então $f(x) < f(c)$

resultando que f(c) não é ponto extremo, contradizendo a hipótese do teorema. A mesma conclusão chegaríamos se fizéssemos inicialmente $f'(c) < 0$. C.Q.D.

OBSERVAÇÕES:

i) Portanto, a condição $f'(c) = 0$ é necessária para que a função derivável em c tenha nesse ponto um extremo relativo.

ii) Convém salientar que se f não for derivável em c, ela poderá ter um extremo nesse ponto, como msotra a função $f(x) = |x|$, fazendo $c = 0$. Nesse caso 0 é um mínimo relativo (e também absoluto) e, no entanto, essa função não é derivável nesse ponto.

iii) Resumindo podemos concluir que para uma função contínua em $[a,b]$ ter um extremo relativo em $\underline{c}$, de duas uma, ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Portanto, temos uma regra a seguir na busca de pontos extremos relativos.

EXEMPLOS:

a) Seja $f(x) = x^3 - 12x$; determine os extremos absolutos no intervalo $[-3,5]$. Esboce o gráfico de f.

SOLUÇÃO:

A regra para se determinar os extremos absolutos de uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ é:

i) Obter os extremos relativos.

ii) Calcular $f(a)$ e $f(b)$.

iii) M, o máximo absoluto, será o maior dos máximos relativos e dos $f(a)$ e $f(b)$.
m, o mínimo absoluto, será o menor dos mínimos relativos e dos $f(a)$ e $f(b)$.

Obtendo os extremos relativos determinemos os pontos críticos de f, isto é, os pontos $c_1, c_2, \dots, c_m$ que anulem a primeira derivada ou que esta não exista.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$$

Como $f'(x)$ existe para todo x em $(-3,5)$ os pontos críticos devem satisfazer a condição $f'(x) = 0$. Então,

$$3(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Pela continuidade de f em $[-3,5]$ e pela discussão acima obteremos os extremos absolutos entre os valores:

$f(2)$, $f(-2)$, $f(-3)$ e $f(5)$

Mas,

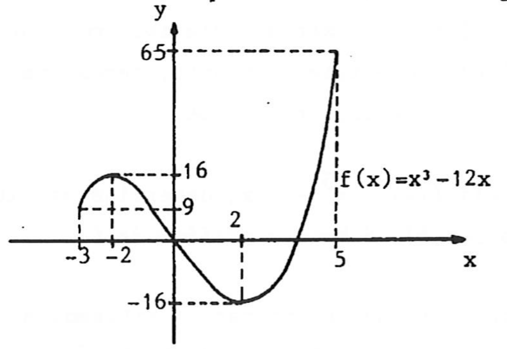
$f(2) = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16 = m$(mínimo absoluto).

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$

$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$

$f(5) = (5)^3 - 12(5) = 125 - 60 = 65 = M$(máximo absoluto).

Marcando outros pontos obteremos o seguinte gráfico:



b) Se f(x) x^3, mostre que f não possui extremo relativo.

SOLUÇÃO:

Como $f'(x) = 3x^2 > 0$ para todo x, a função será sempre crescente. Ora, como num ponto extremo relativo o tipo de crescimento muda, essa função não possui extremo relativo.

No entanto vemos que $f'(0) = 3(0)^2 = 0$, mostrando, com esse exemplo que a condição $f'(c) = 0$ é apenas necessária mas não suficiente para que c seja um ponto de extremo relativo.

c) Determinar os pontos críticos de $f(x) = (x + 5)^2 \sqrt[3]{x - 4}$.

SOLUÇÃO:

Derivando f, teremos:

$$f'(x) = 2(x + 5)\sqrt[3]{x - 4} + (x + 5)^2 \cdot \frac{1}{3}(x - 4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 2(x + 5)(x - 4)^{\frac{1}{3}} + (x + 5)^2 \cdot \frac{1}{3}(x - 4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{(x + 5)(7x - 19)}{3(x - 4)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{(comprove!!!)}$$

Consequentemente $f'(x) = 0$ se $x = -5$ ou se $x = \frac{19}{7}$. A derivada $f'(x)$ não existe para $x = 4$; portanto f tem os pontos críticos

$$c_1 = -5 \qquad c_2 = \frac{19}{7} \qquad \text{e} \qquad c_3 = 4$$

EXERCÍCIOS 4.3.

1. Determine os extremos absolutos de f nos intervalos indicados:

a) $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$; $[-3,1]$

b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$; $[-1,3]$

c) $f(x) = 1 - x^{2/3}$; $[-1,8]$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $[0,2]$

2. Prove que $f(x) = x^{1/3}$ não possui extremo relativo.

3. Prove que $f(0)$ é mínimo relativo de $f(x) = x^{2/3}$.

4. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$; mostre que não existe extremo relativo. Esboce o gráfico; prove que f é contínua em $(0,1)$ mas que não possui nem máximo nem mínimo nesse intervalo. Por que isso não contradiz o Teorema 1 de 4.3.?

5. Determine os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$

b) $g(x) = 2x + 5$

c) $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$

d) $K(z) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$

e) $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$

f) $G(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$

6. Prove que uma função quadrática tem exatamente um ponto crítico.

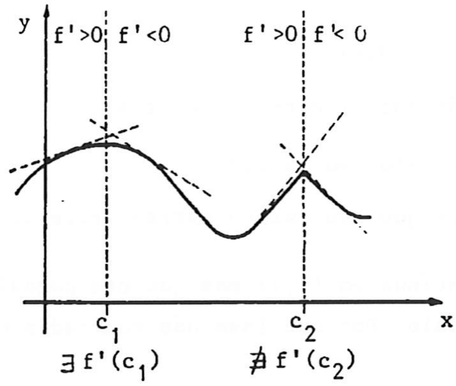
7. Se $f(x) = x^n$, onde n é inteiro positivo. Prove que f ou tem um, ou nenhum extremo relativo em $(-\infty, \infty)$, conforme n seja par ou ímpar, respectivamente. Esboce gráficos que ilustrem cada caso.

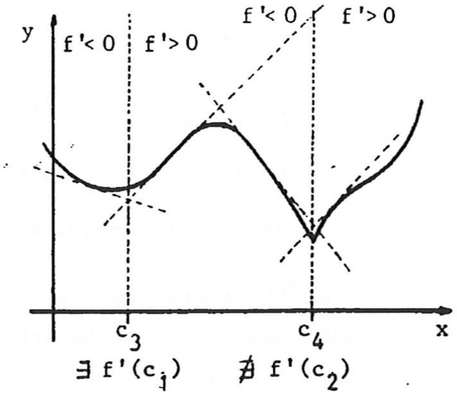
4.4. CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA EXTREMOS RELATIVOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

TEOREMA 1: Seja <u>c</u> um valor crítico de f em (a,b). Seja ademais f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), exceto, possivelmente, em <u>c</u>.

i) Se $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, então $f(c)$ é máximo relativo em c.

ii) Se $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, então $f(c)$ é mínimo relativo em c.





DEM:

Seja $\underline{c}$ um ponto crítico de f, digamos c_1 ou c_2 dos gráficos acima, isto é, ou $f'(c)$ não existe ou $f'(c) = 0$.

Se a função se comporta como em (i) então ela é crescente em $[a,c]$ e decrescente em $[c,b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a,b)$ diferente de $\underline{c}$. Portanto $f(c)$ é máximo relativo.

O caso (ii) prova-se de modo parecido.

EXEMPLOS:

a) Determinar os extremos relativos de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

SOLUÇÃO:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(x + \frac{5}{3})$. Se $f'(x) = 0$ então, ou $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$.

Montemos o quadro abaixo:

Intervalo	$f'(x) = (x - 1)(x + \frac{5}{3})$	$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$
$(-\infty, -\frac{5}{3})$	>0	crescente
$(-\frac{5}{3}, 1)$	<0	decrescente
$(1, +\infty)$	>0	crescente

Pelo Teorema 1, $-\frac{5}{3}$ é um ponto de máximo relativo e o ponto 1 de mínimo relativo.

b) Determinar os extremos relativos de $f(x) = x^{1/3}(8 - x)$. Esboce o gráfico de f.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8 - x) + x^{1/3}(-1) = \frac{8 - x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} = \frac{8 - 4x}{3x^{2/3}}$$

Os pontos críticos são $x = 2$, pois $f'(2) = 0$ e $x = 0$, pois $\nexists f'(0)$.

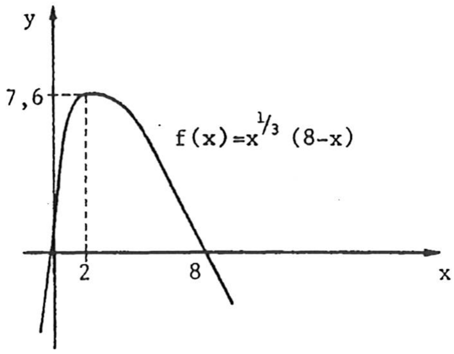
Utilizemos o Teorema 1 para analisar extremos relativos.

Intervalos	$2 - x$	$x^{2/3}$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	+	+	+	crescente
$(0,2)$	+	+	+	crescente
$(2,+\infty)$	-	+	-	decrescente

Pelo teste da primeira derivada (Teorema 1) o ponto crítico $x = 2$ é de máximo relativo. O valor desse máximo será:

$$f(2) = 2^{1/3}(8 - 2) = 6\sqrt[3]{2} \approx 7,6$$

O gráfico dessa função fica:



O ponto crítico $x = 0$ não é de máximo nem de mínimo, pois a primeira derivada não muda de sinal numa vizinhança de zero.

c) Determine os extremos relativos de $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$. Esboce o gráfico.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2 - 8) + x^{2/3}(2x)$$

$$= \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}} \text{ (verifique!!!)}$$

Os valores críticos são, portanto, $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{2}$ e 0. **Estudaremos** o sinal de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2},+\infty)$.

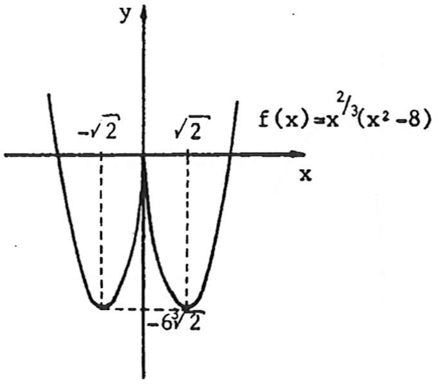
Intervalo	x^2-2	$x^{1/3}$	$f'(x)$	f
$(-\infty,-\sqrt{2})$	+	-	-	**decrescente em $(-\infty,-\sqrt{2}]$**
$(-\sqrt{2},0)$	-	-	+	**crescente em $[-\sqrt{2},0]$**
$(0,+\sqrt{2})$	-	+	-	**decrescente em $[0,\sqrt{2}]$**
$(+\sqrt{2},+\infty)$	+	+	+	**crescente em $[\sqrt{2},+\infty)$**

Pelo Teorema 1, f possui um mínimo relativo em $x=-\sqrt{2}$, um máximo relativo em $x=0$ e outro mínimo relativo em $x=+\sqrt{2}$.

Os respectivos valores da função serão, respectivamente:

$f(-\sqrt{2})=-6\sqrt[3]{2}$, $f(0)=0$ e $f(+\sqrt{2})=-6\sqrt[3]{2}$.

O gráfico dessa função fica:



EXERCÍCIOS 4.4.

1. Determine os extremos relativos pela primeira derivada.

a) $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$

b) $f(x)=x^{2/3}(8-x)$

c) $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

e) $f(x)=10x^3(x-1)^2$

f) $f(x)=4x^3-3x^4$

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-9x}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+7}}$

i) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

2. Esboce o gráfico de uma função derivável que satisfaça as seguintes condições:

$f'(-5) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(5) = 0$; $f'(x) > 0$ se $|x| > 5$ e $f'(x) < 0$ se $0 < |x| < 5$.

3. Determine os extremos relativos de $f'(x)$. Descreva os intervalos em que f' é crescente ou decrescente. Esboce o gráfico de f e relacione a variação do coeficiente angular da tangente à curva com a variação de $f'(x)$.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2$ b) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

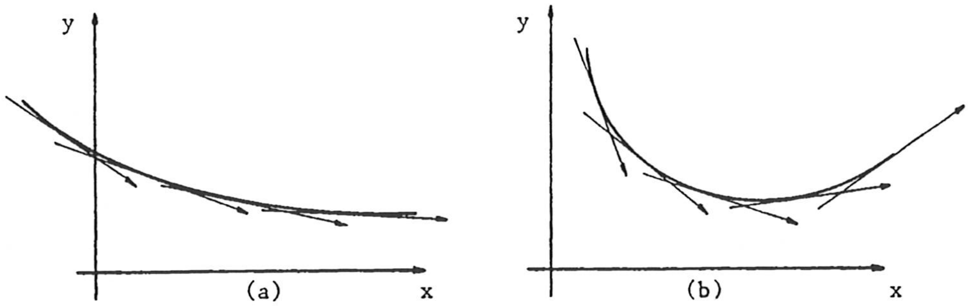
4. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; determine a,b,c e d tais que f tenha máximo relativo em $(-1,2)$ e mínimo relativo em $(1,-1)$.

5. Seja $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; determine a, b, c, d, e tais que f tenha máximo local em $(0,2)$ e mínimos locais em $(-2,-14)$ e $(2,-14)$.

4.5. CONCAVIDADE E A SEGUNDA DERIVADA

DEFINIÇÃO: Dizemos que f, derivável em c, tem nesse ponto uma concavidade para cima se existir um intervalo (a,b) contendo c tal que $f'(x)$ é decrescente.

Dizemos que f, derivável em c, tem nesse ponto uma concavidade para baixo se existir um intervalo (a,b) contendo c tal que $f'(x)$ é decrescente.

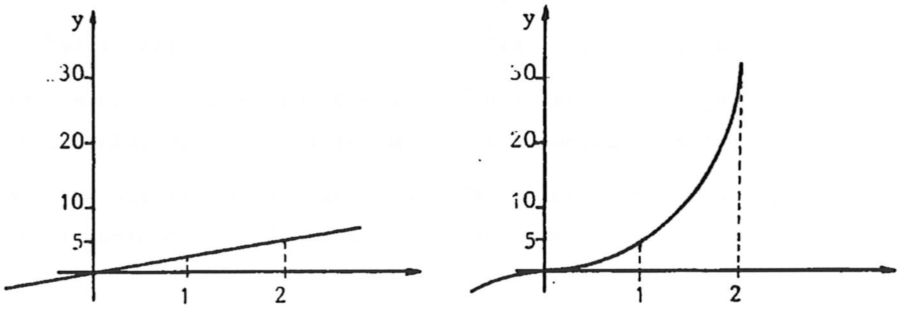


Os gráficos acima mostram duas funções côncavas para cima em todos os pontos de seus domínios. O caso (a) mostra um caso de concavidade fraca. Notemos que as tangentes à curva giram no sentido anti-horário de uma forma lenta. Pela interpretação geométrica da primeira derivada diríamos que a função $f'(x)$ no caso (a) é lentamente crescente.

O caso (b) exibe um exemplo de concavidade forte para cima e isso se faz refletir no crescimento rápido da primeira derivada dessa função.

EXEMPLO:

As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ são ambas côncavas para cima em todos os pontos de seus domínios. Como $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 4x^3$ podemos comparar as concavidades dessas duas funções. Os gráficos de $f'(x)$ e $g'(x)$ são:



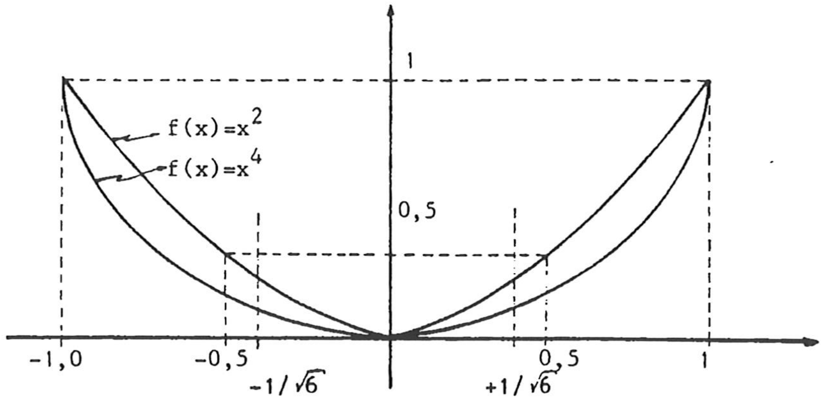
Para se saber qual das duas funções $f'(x)$ ou $g'(x)$ crescem mais rapidamente precisamos saber, por exemplo, para que valores de x a primeira derivada de $f'(x)$ é maior que a primeira derivada de $g'(x)$. Isto é,

$$[f'(x)]' > [g'(x)]' \Leftrightarrow f''(x) > g''(x) \Leftrightarrow 2 > 12x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{6}$$

Portanto para $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < +\frac{1}{\sqrt{6}}$ $f'(x)$ cresce mais rápido que $g'(x)$ e consequentemente, pela análise de $f''(x) < g''(x)$, concluiremos que para $x < -\frac{1}{\sqrt{6}}$ ou $x > +\frac{1}{\sqrt{6}}$ $f'(x)$ cresce mais lentamente do que $g'(x)$.

Com relação às funções originais $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ concluiremos que no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ a função x^2 tem concavidade para cima mais forte do que x^4. Em contrapartida nos demais pontos de seus domínios a situação se inverte, isto é, $f(x)$ é menos côncava para cima do que $g(x)$. Ao desenhar os seus gráficos essas carcterísticas ficam evidentes, como mostram os gráficos a seguir:



TEOREMA:

Seja f uma função e $\underline{c}$ um ponto de seu domínio em que $f''(c)$ exista.

i) Se $f''(c) > 0$, então f é côncava para cima.

ii) Se $f''(c) < 0$, então f é côncava para baixo.

DEM: Exercícios (use a definição de côncava para cima e para baixo).

DEFINIÇÃO: Um ponto $(c,f(c))$ do gráfico de f, contínua e definida em (a,b) contendo $\underline{c}$ é dito **ponto de inflexão** se uma das condições abaixo fica satisfeita.

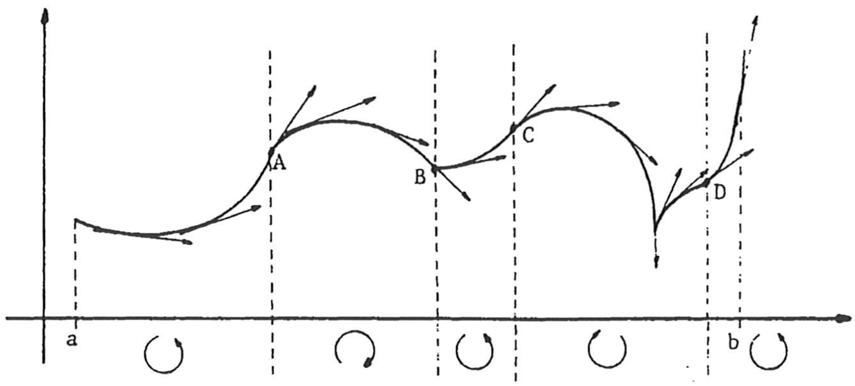
i) Para $a < x < c$, $f'(x)$ é crescente e para $c < x < b$, $f'(x)$ é decrescente.

ii) Para $a < x < c$, $f'(x)$ é decrescente e para $c < x < b$, $f'(x)$ é crescente.

Ou ainda,

i') Para $a < x < c$, $f''(x) > 0$ e para $c < x < b$, $f''(x) < 0$.

ii') Para $a < x < c$, $f''(x) < 0$ e para $c < x < b$, $f''(x) > 0$.



OBSERVAÇÕES:

i) Os pontos A,B,C,D indicados no gráfico anterior tem todas as condições para ponto de inflexão. Em todos eles a declividade das tangentes à curva (primeira derivada) passa ou de crescente para decrescente (A e C) ou de decrescente para crescente (B e D).

Com relação ao sinal da segunda derivada esta passa de positiva para negativa nos pontos A e C e de negativa para positiva nos pontos B e D.

ii) Notemos que nos casos A,C e D, estes correspondem a pontos em que a função $f'(x)$ é derivável (sofre variação suave) enquanto que no caso B, este corresponde a um caso em que a função $f'(x)$ não é derivável (sofre variação bruta). Portanto, nos pontos A,C e D a derivada $f''(x)$ se anula, enquanto que no ponto B $f''(x)$ não existe.

Concluindo temos, então, um critério para encontrar pontos de inflexão, quais sejam.

i) Obter os pontos x em que $f''(x)$ não existe.

ii) Obter os pontos x em que $f''(x)$ existe e é zero.

que, apesar de não serem suficientes, são condições necessárias.

EXERCÍCIOS 4.5.

1. Discuta os tipos de concavidade e pontos de inflexão das funções.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

c) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$

d) $f(x) = 8x^2 - 2x^4$

e) $f(x) = (x + 4)/\sqrt{x}$

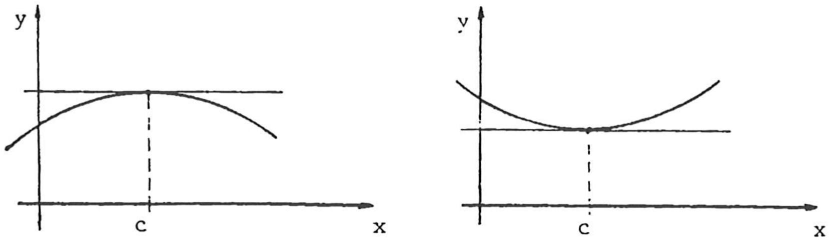
f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

4.6. EXTREMOS RELATIVOS E A SEGUNDA DERIVADA

TEOREMA 1: Seja f derivável num intervalo (a,b) contendo c e que $f'(c)=0$. Então,

i) Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

ii) Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.



$f'(c)=0; f''(c) < 0$ $\quad$ $f'(c)=0; f''(c) > 0$

OBSERVAÇÃO:

Este resultado pode ser considerado um dos mais importantes no estudo de extremos de funções. O uso desse teorema pode ser encontrado praticamente em todas as ciências e seu bom conhecimento será utilíssimo a qualquer engenheiro-agronômo.

EXEMPLOS:

a) Seja $f(x) = x^5 - 5x^3$; diagnostique todos os extremos relativos dessa função, as concavidades e os pontos de inflexão.

SOLUÇÃO:

Condição necessária: $f'(x) = 0$. Impondo essa condição a $f(x)$ teremos a equação:

$$5x^4 - 15x^2 = 0 \qquad (f'(x) = 5x^4 - 15x^2)$$
$$5x^2(x^2 - 3) = 0$$

Decorre, portanto, que,

$$x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = +\sqrt{3}$$

Teste de $f''(c)$:

Seja $c = 0$ então $f''(x) = 20x^3 - 30x$; $f''(0) = 0$

Como $f''(c) = 0$ o Teorema acima **não é conclusivo** (isto é, não se aplica) e teremos que examinar a condição de extremo relativo ou não pelo comportamento da primeira derivada.

Intervalo	$5x^2$	$x^2 - 3$	$f'(x)$
$(0-\varepsilon, 0)$	+	-	-
$(0, 0+\varepsilon)$	+	-	-

A primeira derivada $f'(x)$, portanto, não muda de sinal ao passar pelo ponto 0, representando que $f(x)$ é decrescente no intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto o ponto 0 não é um extremo relativo (nem máximo nem mínimo).

Examinado os outros pontos temos que se $c = -\sqrt{3}$, então $f''(-\sqrt{3}) = 20(-\sqrt{3})^3 - 30(-\sqrt{3}) = 20(-3\sqrt{3}) + 30\sqrt{3} = -30\sqrt{3} < 0$. Pelo teste da segunda derivada $-\sqrt{3}$ é um ponto de máximo.

Para $c = +\sqrt{3}$, $f''(+\sqrt{3}) = +30\sqrt{3} > 0$ ($f''(x)$ é uma função ímpar) e, pelo teste da segunda derivada $+\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo.

Para o estudo de concavidade e pontos de inflexão necessitamos conhecer os pontos críticos de $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$. Derivando teremos

$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$$

Da equação $f''(x) = 0$ resulta, $10x(2x^2 - 3) = 0$, donde, ou $x = 0$ ou $2x^2 - 3 = 0$, isto é, $2x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Se estudarmos o sinal da segunda derivada teremos o quadro abaixo.

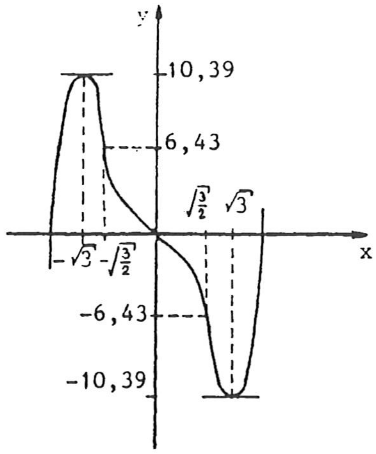
Intervalo	$10x$	$2(x - \sqrt{\frac{3}{2}})$	$(x + \sqrt{\frac{3}{2}})$	$f''(x)$
$(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(0, +\sqrt{\frac{3}{2}})$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(+\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Como $f''(x)$ passa de negativa para positiva em $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, então este é a abscissa de um ponto de inflexão (a função passa de côncava para baixo a côncava par cima).

Como $f''(x)$ passa de positiva para negativa no ponto $x = 0$, este também é uma abscissa de ponto de inflexão (a função passa de côncava para cima a côncava para baixo).

Pela mesma análise feita no primeiro caso, $x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$ é abscissa de ponto de inflexão.

Com todo esse estudo é possível, pelo cálculo de alguns valores de $f(x)$ desenhar o gráfico de f que apresentamos a seguir.



Em resumo temos:

$(-\sqrt{3};10,39)$ máximo relativo.

$(-\sqrt{\frac{3}{2}};6,43)$ ponto de inflexão.

$(0;0)$ ponto de inflexão.

$(+\sqrt{\frac{3}{2}};-6,43)$ ponto de inflexão.

$(+\sqrt{3};-10,39)$ mínimo relativo.

b) Seja $f(x) = 1 - x^{1/3}$; determine os extremos relativos, discuta a concavidade, ache os pontos de inflexão e desenhe um gráfico de f.

SOLUÇÃO:

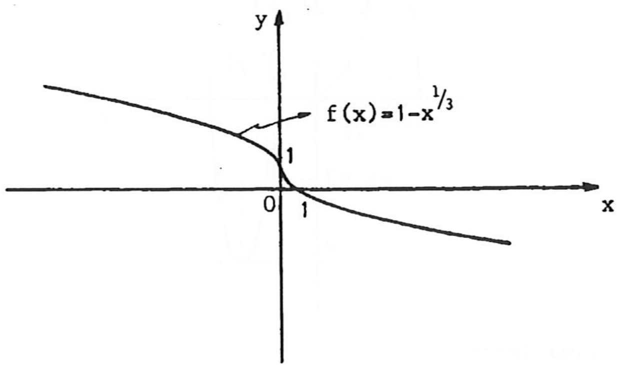
Para extremos relativos devemos calcular os pontos críticos de f(x).

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{-1}{3x^{2/3}}$. O único ponto crítico é x=0, pois f'(x) nunca se anula em seu domínio. Como para $x \in (-\varepsilon,0)$ $f'(x) < 0$ e para $x \in (0,\varepsilon)$, $f'(x) < 0$ concluimos que a função é decrescente em $(-\varepsilon,\varepsilon)$ o que elimina o ponto $\underline{0}$ da lista de candidatos a ponto extremo relativo.

Para o estudo de concavidade e pontos de inflexão devemos calcular os pontos críticos de f'(x).

$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9x^{5/3}}$, O único ponto crítico é também x = 0, pois f''(x) nunca se anula em seu domínio. Examinando o sinal de f''(x) numa vizinhança de $\underline{0}$ temos: para $x \in (-\varepsilon,0)$, $f''(x) < 0$ e para $x \in (0,+\varepsilon)$, $f''(x) > 0$. Portanto f'(x) passa de decrescente para crescente, ou seja, f(x) passa de côncava para baixo a côncava para cima. Isto é, 0 é um ponto de inflexão.

O gráfico ficará:



c) Estudar os extremos relativos, concavidade e pontos de inflexão da função $f(x) = x^{1/3}(x-1)^{2/3}$.

SOLUÇÃO:

Pontos críticos de f(x):

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{2/3} + x^{1/3}\frac{2}{3}(x-1)^{1/3} = \frac{(x-1)^{2/3}}{3x^{2/3}} + \frac{2x^{1/3}}{3(x-1)^{1/3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^{2/3+1/3} + 2x^{2/3+1/3}}{3x^{2/3}(x-1)^{1/3}} = \frac{x-1+2x}{3x^{2/3}(x-1)^{1/3}} =$$

$$= \frac{3x-1}{3x^{2/3}(x-1)^{1/3}} = 0$$

Resulta, pois, que $x = \frac{1}{3}$ é o ponto crítico que anula a derivada. Como $x = 0$ e $x = 1$ anulam o denominador de $f'(x)$, mas não o numerador, temos os outros dois pontos críticos da função f.

Estudo do Sinal de f'(x)

Intervalo	$3x-1$	$3x^{2/3}$	$(x-1)^{1/3}$	$f'(x)$	f(x)
$(-\infty,0)$	-	+	-	+	crescente
$(0,1/3)$	-	+	-	+	crescente
$(1/3,1)$	+	+	-	-	decrescente
$(1,+\infty)$	+	+	+	+	crescente

Concluímos pelo quadro acima que $\underline{0}$ não é extremo relativo e que $\underline{1}$ é ponto de mínimo relativo e $\frac{1}{3}$ um ponto de máximo relativo.

Pontos críticos de $f'(x)$: Derivando $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (x - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot$ $\cdot(3x - 1)$ temos,

$$f''(x) = \frac{1}{3} [-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} (x - 1)^{-\frac{1}{3}} (3x - 1) + x^{-\frac{2}{3}}(-\frac{1}{3})(x - 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot$$

$$\cdot (3x - 1) + x^{-\frac{2}{3}}(x - 1)^{-\frac{1}{3}}(3)]$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \{\frac{1}{3} x^{-\frac{5}{3}}(x - 1)^{-\frac{4}{3}}[-2(x - 1)(3x - 1) - x(3x - 1) + 9x \cdot$$

$$\cdot (x - 1)]\}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \{\frac{1}{3} x^{-\frac{5}{3}}(x - 1)^{-\frac{4}{3}}[-6x^2 + 8x - 2 - 3x^2 + x + 9x^2 - 9x]\}$$

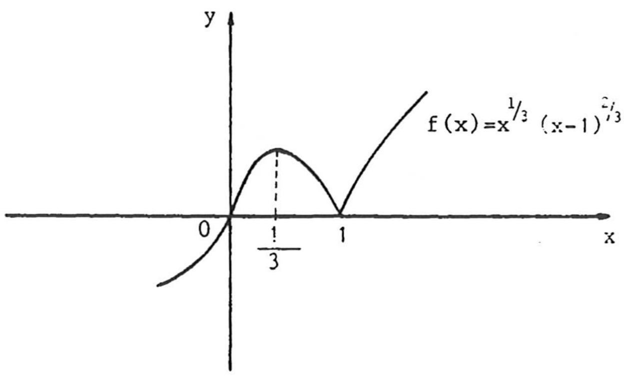
$$f''(x) = \frac{1}{3} [\frac{1}{3} x^{-\frac{5}{3}}(x - 1)^{-\frac{4}{3}}(-2)]$$

$$\therefore \quad f''(x) = \frac{-2}{9} x^{-\frac{5}{3}}(x - 1)^{-\frac{4}{3}}$$

Os pontos críticos de $f'(x)$ são: $x = 0$ e $x = 1$, pois são pontos onde $f''(x)$ não existe. Estudemos o sinal de $f''(x)$ entre esses pontos críticos.

Intervalo	$\frac{-2}{9} x^{-\frac{5}{3}}$	$(x - 1)^{-\frac{4}{3}}$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,0)$	+	+	+	crescente	cônc.p/cima
$(0,1)$	-	+	-	decresc.	cônc.p/baixo
$(1,+\infty)$	-	+	-	decresc.	cônc.p/baixo

Portanto o ponto (0,0) é de inflexão. O gráfico fica



A terceira derivada de uma função, quando existir, poderá ser usada como teste de ponto de inflexão, de forma semelhante ao uso da segunda derivada como teste de extremos relativos.

Um ponto de inflexão, quando a função é derivável até a terceira ordem, nada mais é do que o extremo relativo da primeira derivada, isto é, $f''(c) = 0$ e $f'''(c) \neq 0$ são condições suficientes para que c seja um extremo relativo de $f'(x)$, isto é, um ponto de inflexão de $f(x)$. Formalizando temos:

TEOREMA 2: Seja $f(x)$ derivável até terceira ordem e suponhamos que $f''(c) = 0$. Então se $f'''(c) \neq 0$, o ponto $(c, f(c))$ será um ponto de inflexão.

DEM: Exercício.

Seja $f(x) = 3x^5 - 30x^4 + 110x^3 - 180x^2 + x + 1$. Obter os pontos de inflexão do gráfico dessa função.

SOLUÇÃO:

Obtendo a primeira derivada:

$$f'(x) = 15x^4 - 120x^3 + 330x^2 - 360x + 1.$$

A segunda derivada:

$$f''(x) = 60x^3 - 360x^2 - 660x + 1.$$

Obtendo as raízes (por tentativa) pelo método de Briot-Rufini: com $a_n/a_o = 360/60 = 6$, as raízes racionais deverão ser fatores de 6.

x	60	-360	660	-360	
1	60	-300	360	0	(x - 1) é fator.
2	60	-240	180	0	(x - 2) é fator.
3	60	-180	120	0	(x - 3) é fator.

Temos então,

$$f''(x) = 60(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1. \\ x = 2. \\ x = 3. \end{cases}$$

A terceira derivada é $f'''(x) = 180x^2 - 720x + 660$. Examinando o sinal de $f'''(x)$ para as raízes de $f''(x)$ temos,

x	180	-720	660		f(x)
1	180	-540	120	ponto de inflexão	-95
2	180	-360	-60	ponto de inflexão	-221
3	180	-180	120	ponto de inflexão	-887

OBSERVAÇÕES:

i) Como $f'''(1) = 120 > 0$, a derivada segunda é crescente e, como ela se anula no ponto 1, então ela passa de negativa para positiva; portanto a função passa de côncava para baixo a côncava para cima.

Como $f'''(2) = -60 < 0$, a segunda derivada é decrescente e a mudança de tipo de concavidade é exatamente inverso ao caso anterior.

Como $f'''(3) = 120 > 0$ temos outro ponto de inflexão com características idênticas ao primeiro caso.

ii) Apesar de ser um método atraente para o teste de ponto de inflexão, a obtenção de terceira derivada nem sempre é tão fácil como no exemplo mostrado.

EXERCÍCIOS 4:6.

1. Use o teste da segunda derivada (quando aplicável) para determinar os extremos locais de f. Discuta concavidade, ache as abscissas dos pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$.

d) $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$.

f) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

2. Esboce o gráfico de uma função contínua f que satisfaça todas as condições indicadas.

a) $f(0) = 1$; $f(2) = 3$.

$f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) < 0$ se $|x-1| > 1$; $f'(x) > 0$ se $|x-1| < 1$

$f''(x) = 0$ se $x < 1$; $f''(x) < 0$ se $x > 1$.

b) $f(0) = 2$; $f(-2) = f(2) = 1$

$f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x < 0$; $f'(x) < 0$ se $x > 0$;

$f''(x) < 0$ se $|x| < 2$; $f''(x) > 0$ se $|x| > 2$.

c) $f(-2) = f(6) = -2$; $f(0) = f(4) = 0$; $f(2) = f(8) = 3$

f' não é definida em 2 e 6; $f'(0) = 1$; $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 2)$ e $x \in (6, \infty)$;

$f'(x) < 0$ se $|x - 4| < 2$;

$f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (4,6) \cup (6, +\infty)$; $f''(x) > 0$ para $x \in (0,2) \cup (2,4)$.

3. Se $f(x) = x^n$, $n > 1$, prove que o gráfico de f ou tem um, ou nenhum ponto de inflexão, conforme n seja ímpar ou par, respectivamente. Esboce algumas curvas.

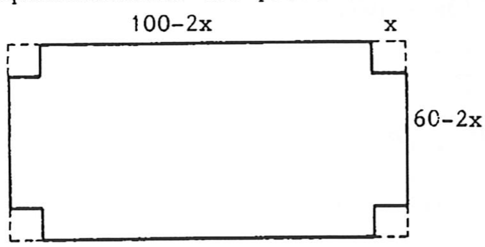
4.7. PROBLEMAS DIVERSOS DE APLICAÇÕES DAS DERIVADAS.

a) Uma embalagem em forma de caixa de base retangular deve ser construída a partir de uma folha de cartolina retangular medindo 100cm de comprimento e 60cm de largura, cortando-se um quadrado de cada quina. Obtenha as dimensões da caixa de máximo volume e seu volume em litros.

SOLUÇÃO:

$$V = x(100 - 2x)(60 - 2x)$$

Evidentemente a parte mais difícil é o equacionamento do problema, pois exige muita criatividade. Somente a prática conseguirá tornar o equacionamento dos problemas reais uma tarefa fácil.



Deste ponto em diante temos apenas que achar o máximo de V em relação a x. Derivando e igualando a zero teremos:

$V'(x) = (4x^3 - 320x^2 + 6.000x)' = 4(3x^2 - 160x + 1.500) = 0$, resultando,

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{25.600 - 18.000}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = 41,19 \\ x_2 = 12,13 \end{cases}$$

Como x_1 torna um dos lados da base negativo então essa solução deve ser descartada. A solução $x_2 = 12,13$ produz as seguintes dimensões da base:

$$100 - 2x = 75,72\text{cm (comprimento)}.$$
$$60 - 2x = 35,72\text{cm (largura)}.$$

O volume será então $V = 12,13(75,72)(35,72) = 32.808,2341$ ou, $V = 32,808$ litros

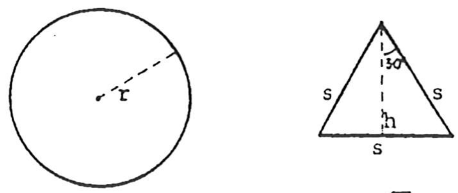
Calculando a segunda derivada obtemos:

$V''(x) = 4(6x - 160)$; $V''(12,13) = 4(6(12,13) - 160) = -348,88$ e, como $V''(12,13) < 0$ trata-se mesmo de um máximo relativo. Na verdade é um máximo absoluto.

b) Um arame de 60m de comprimento vai ser cortado em dois pedaços. Com um dos pedaços deve-se fazer um círculo e com o outro um triângulo equilátero. Qual deve ser o tamanho de cada pedaço para que a soma das áreas das figuras seja: a) máxima ; b) mínima.

SOLUÇÃO:

$$P_1 = 2\pi r$$
$$P_2 = 3s$$
$$60 = 2\pi r + 3s; \quad s = \frac{60 - 2\pi r}{3}$$



$$A_1 = \pi r^2; \quad A_2 = \frac{sh}{2} = \frac{s}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

A soma das áreas será:

$$A = \pi r^2 + \left(\frac{60 - 2\pi r}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(60 - 2\pi r)^2; \quad r \in [0;\frac{60}{2\pi}]$$

A derivada de A em relação a r fica:

$$A' = 2\pi r + \frac{\sqrt{3}}{36}\,2(60 - 2\pi r)(-2\pi)$$

Donde, $A' = 0$ decorre que

$$r + \frac{\sqrt{3}}{18}(60 - 2\pi r)(-1) = 0.$$

$$r(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{30\sqrt{3}}{9 + \sqrt{3}\pi} = 3,598m.$$

O comprimento do círculo será $2\pi(3,598) = 22,61cm$. Testando o tipo de extremo, obtemos a segunda derivada de A em relação a r e substituimos r por 3,598.

$$A'' = 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{9}(-2\pi) = 2\pi + \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi > 0$$

Pelo teste temos que o único ponto extremo relativo é um mínimo respondendo a parte (b). A área respectiva será dada por

$$A(3,598) = (3,598)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{60 - 2\pi(3,598)}{3})^2$$

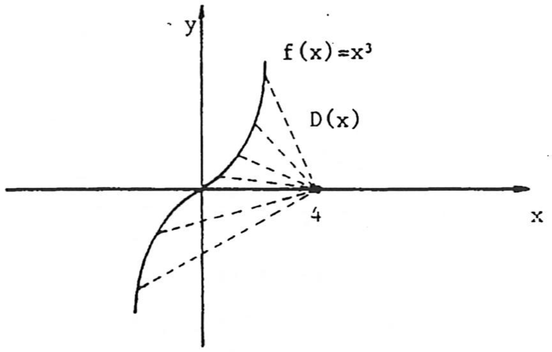
$$= 40,670 + 67,273 = 107,943m^2.$$

O máximo (absoluto) deve ser buscado nos extremos do intervalo de r, isto é, o maior ente $A(0)$ e $A(\frac{60}{2\pi})$. Mas,

$$A(0) = 173,205m^2 \text{ e } A(\frac{60}{2\pi}) = 286,479m^2$$

A área máxima será, portanto, $286,479m^2$.

c) Determine a abscissa do ponto do gráfico de $y = x^3$ mais próximo do ponto $(4,0)$.



SOLUÇÃO:

A distância entre $(4,0)$ e $(x,f(x))$ será dada por:

$$D(x) = \sqrt{(x - 4)^2 + (x^3 - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^6}$$

$$D(x) = \sqrt{x^6 + x^2 - 8x + 16}$$

Portanto, $D'(x) = \frac{6x^5 + 2x - 8}{2\sqrt{x^6 + x^2 - 8x + 16}} = \frac{3x^5 + x - 4}{\sqrt{x^6 + x^2 - 8x + 16}}$

A equação $D'(x) = 0$ resulta, necessáriamente, que

$$3x^5 + x - 4 = 0.$$

Por inspeção $x = 1$ é raiz dessa equação, isto é, $D'(1) = 0$. A segunda derivada de $D(x)$ será,

$$D''(x) = \frac{15x^4 + 1}{2\sqrt{x^6 + x^2 - 8x + 16}} \implies D''(1) > 0$$

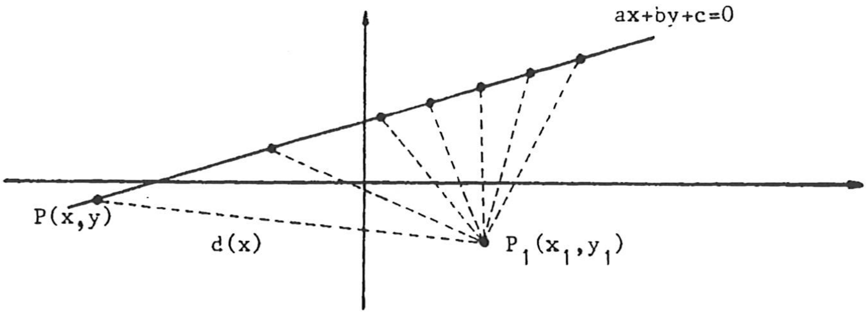
Portanto 1 é abscissa de mínimo relativo de $D(x)$. Terá $D'(x)$ outras raízes?

Ora, como a derivada de $D'(x)$, ou seja, $D''(x)$ é sempre positiva isto quer dizer que $D'(x)$ é sempre crescente. Portanto, como já achamos uma raíz, esta será única.

d) Usando o teste da primeira derivada mostre que a menor distância de um ponto (x_1, y_1) a reta $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ax_1 + bx_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

SOLUÇÃO:



Seja $ax + by + c = 0$ a equação da reta dada, com $b \neq 0$; então

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

A distância entre P e P_1 será dada por

$$d(x) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b})^2}$$

Pela construção feita fica óbvio que $d(x)$ terá apenas um mínimo relativo e, também, mínimo absoluto. A abscissa do mínimo de $d(x)$ será obtida da solução de $d'(x) = 0$. Então,

$$d'(x) = \frac{-2(x_1 - x) + 2(x_1 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b})\frac{a}{b}}{2\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b})^2}} = 0$$

implica necessariamente que

$$-x_1 + x + \frac{a}{b}y_1 + \frac{a^2}{b^2}x + \frac{ac}{b^2} = 0$$

$$x_m = \frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}$$

que é a abscissa do mínimo de d(x) procurada. Jogando esse valor na expressão para d(x) teremos:

$$d(x_m) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{(a^2 + b^2)}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{a}{b}x_m + \frac{c}{b}\right)^2}$$

$$d(x_m) = \sqrt{\frac{(a^2x_1 + b^2x_1 - b^2x_1 + aby_1 + ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \cdots}$$

$$\cdots + \frac{\left(by_1 + a\,\dfrac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2} + c\right)^2}{b^2}$$

$$d(x_m) = \sqrt{\frac{(a^2x_1 + aby_1 + ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \cdots}$$

$$\cdots + \frac{(a^2\cancel{b}y_1 + b^3y_1 + ab^2x_1 - a^2\cancel{b}y_1 - a\cancel{?}c + a\cancel{?}c + b^2c)^2}{b^2(a^2 + b^2)}$$

$$d(x_m) = \sqrt{\frac{1}{(a^2 + b^2)^2}\left[(a^2x_1 + aby_1 + ac)^2 + \frac{(b^3y_1 + ab^2x_1 + b^2c)^2}{b^2}\right]}$$

$$d(x_m) = \sqrt{\frac{1}{(a^2 + b^2)^2}[a^2(ax_1 + by_1 + c)^2 + b^2(ax_1 + by_1 + c)^2}$$

$$d(x_m) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}(ax_1 + by_1 + c)^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e) O proprietário de um pomar estima que, plantando 24 árvores por hectare, cada árvore produzirá 600 frutos por ano. Para cada árvore adicional plantada por hectare, haverá uma redução de 12 frutos por pé ano. Quantas árvores deve plantar por hectare de modo a maximizar o número de frutos?

SOLUÇÃO:

Calculemos algumas produções, considerando x o nº de árvores adicionadas por hectare e P(x) o número total de frutos.

x	24 + x	P(x) = (24 + x)(600 - 12x)
0	24	24x600 = 14.400
1	25	25x588 = 14.700
2	26	26x576 = 14.976
3	27	27x564 = 15.228

Temos, portanto, que achar o máximo de $P(x)$; derivando e igualando a zero temos a eqaução a ser resolvida.

$$P'(x) = (1)(600 - 12x) + (24 + x)(-12).$$

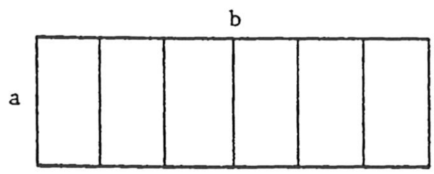
$$P'(x) = 312 - 24x = 0 \implies 24x = 312 \implies x = 13.$$

O número de árvores/ha a serem plantadas será de $24 + 13 = 37$. Como $P''(x) = -24 < 0$, o valor $x = 13$ realmente corresponde a um ponto de máximo. O valor do máximo será:

$$P(13) = 37(600 - 12(13)) = 16.428 \text{ frutos/ha.}$$

f) Uma agrônomo tem 100m de arame farpado e deseja construir 6 (seis) baias, primeiro cercando um região retangular e, em seguida sub-dividindo a região resultante em 6 (seis) retângulos menores colocando 5 (cinco) cercas paralelas a um dos lados do retângulo maior. Que dimensões maximizará a área total?

SOLUÇÃO:



Os dados do problema permitem escrever a equação

$$100 = 7a + 2b$$

donde, $b = \dfrac{100 - 7a}{2} = 50 - \dfrac{7}{2}a$

A área total a ser maximizada é $A = a.b = a(50 - \dfrac{7}{2}a)$. Portan-

tanto a equação $A' = 0$ ficará,

$$(1)(50 - \frac{7}{2}a) + a(-\frac{7}{2}) = 0$$

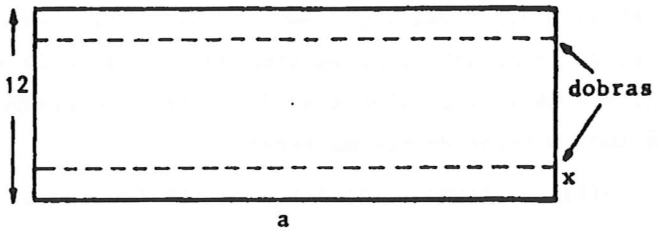
$$50 - 7a = 0$$

$$a = \frac{50}{7} \implies b = 50 - \frac{7}{2}(\frac{50}{7}) = 25$$

Como $A' = 50 - \dfrac{7}{2}a$, $A'' = -\dfrac{7}{2} < 0$ e, portanto $a = \dfrac{50}{7}$ é ponto de máximo da função área, A. A área será, portanto, $\dfrac{50}{7}.25 =$ $= 178,57m^2$ e as dimensões do retângulo maior serão de 7,14x25.

g) Uma longa folha retangular de metal, de 24cm de largura, vai ser utilizada para formar uma calha, dobrando-se em ângulo reto as duas bordas. Quantos centímetros devem ser dobrados de forma que a capacidade da calha seja máxima?

SOLUÇÃO:



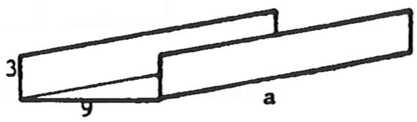
Volume da calha: $V(x) = x(12 - 2x)a = A(x).a$. Como o comprimento não depende de x, necessitamos apenas maximizar a área da secção $A(x)$. Portanto, a equação $A'(x) = 0$, para a obtenção do máximo ficará:

$$(1)(12 - 2x) + x(-2) = 0 \implies 12 - 4x = 0 \implies x = 3$$

Como $A''(x) = -4 < 0$, $x = 3$ é um ponto de máximo. Esse máximo será $A(3) = 3(12 - 2(3)) = 18cm^2$

O volume da calha ficará $V = 18\ a\ cm^3$

Dimensões finais:



h) Um fabricante vende certo artigo aos distribuidores a Cz\$20,00 por unidade para pedidos de menos de 50 unidades. No caso de pedidos de 50 unidades ou mais (até 600), o preço unitário goza de um desconto igual a 2 centavos vezes o número encomendado. Qual o volume de encomenda que proporciona maior receita para o fabricante?

SOLUÇÃO:

A função $R_1(x)$ que dá a receita total do fabricante, onde x é o número de unidades será dada por:

$$\begin{cases} R_1(x) = 20x, & \text{para } 0 < x < 50. \\ R_1(x) = x(20 - 0{,}02x), & \text{para } 50 \leq x \leq 600. \end{cases}$$

com x inteiro. Trabalhando com valores reais de x podemos usar a função $R(x)$, onde,

$$\begin{cases} R(x) = 20x, & \text{para } 0 < x \leq 49. \\ R(x) = x(20 - 0{,}02x), & \text{para } 49 \leq x \leq 600. \end{cases}$$

Temos $R(x)$, descontínua em $x = 49$ e que admite os mesmos valores de $R_1(x)$ para x inteiro no intervalo $[1;600]$.

Para $x \in (0:49)$, $R'(x) = 20 > 0$ e $R(x)$ é crescente em $[0,49]$; o máximo de $R(x)$ nesse intervalo será $R(49) = 980$.

Para $x \in (49,600)$, $R'(x) = (1)(20 - 0{,}02x) + x(-0{,}02)$; donde

$$R'(x) = -0{,}04x + 20.$$

Como $R'(x) = 0$ implica $-0{,}04x + 20 = 0$ e, portanto, $x = 500$ e, desde que $R''(x) = -0{,}04 < 0$, então $x = 500$ é um ponto de máximo no intervalo $[49,600]$; o máximo será $R(500) = 500(20 - 0{,}02(500))$ ou, $R(500) = 5.000$ unidades.

A resposta, pois, é que vendendo 5.000 unidades pela metade do preço (Cz$10,00) o fabricante terá a máxima receita bruta.

EXERCÍCIOS 4.7.

1. Determine dois números reais cuja diferença seja 40 e cujo produto seja mínimo.

2. Se uma caixa de base quadrada, aberta no topo, deve ter um volume de $4m^3$ determine as dimensões que exigem menor quantidade de material (desprezar a espessura e a perda do material).

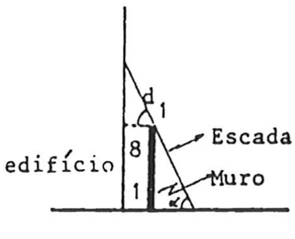
3. Um muro de 8m de altura, num terreno plano, é paralela a um edifício alto. Se o muro está a 1m de edifício, determine o comprimento da escada mais curta que se apoie, por sobre a cerca, no solo e na parede do edifício (pontos de apoio).

INDICAÇÃO DE SOLUÇÃO:

a) Mostre que $D = d_1 + d_2 = \dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{8}{\operatorname{sen}\alpha}$

b) Mostre que $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ minimiza D.

c) Mostre que $D_{min.} = 5\sqrt{5}$.



4. Uma página de livro deve ter 90 polegadas quadradas de área com margens de 1 polegada na base e dos lados, e 1/2 polegada no topo. Determine as dimensões da página que maximizem a área impressa.

5. Prove que retângulo de área máxima e perímetro dado p é um quadrado.

6. Determine o ponto do gráfico $y = x^2 + 1$ mais próximo do ponto $(3,1)$.

7. À 1 hora da tarde um navio A está a 65 km ao sul do navio B e navegando rumo norte a 10 km/h. Se o navio B está navegando rumo oeste a 15 km/h, determine o instante em que a distância entre os dois navios é mínima.

8. Deve-se construir um tanque de aço para armazenar gás propano com a forma de um cilindro circular reto com um hemisfério em cada extremidade. Se a capacidade desejada é de $100 m^3$, quais as dimensões que exigem menor quantidade de aço?

CAPÍTULO 5: REGRAS DE L'HOSPITAL.

5.1. FORMAS INDETERMINADAS DE LIMITES.

Consideremos o cálculo do limite de três quocientes, tendo como característica comum o fato de tanto numerador como denominador serem funções que tendem para zero.

Caso I. Calcular $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ $\quad (\dfrac{0}{0})$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 2)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Caso II. Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$ $\quad (\dfrac{0}{0})$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$$

Caso III. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ $\quad (\dfrac{0}{0})$

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2 (x - 2)}{(x - 1)(x - 4)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 4} = 0.$$

OBSERVAÇÕES:

i) Esses exemplos são mais do que suficientes para demosntrar que quando tanto o numerador como o denominador de um quociente tendem para zero, o limite desse quociente é indeterminado, no sentido de que é necessário fazer algum "truque" para se poder resolver o limite. Nos casos acima temos 3 respostas distintas para 3 casos da forma $(\dfrac{0}{0})$. Finalizando podemos dizer que se recairmos num caso $(\dfrac{0}{0})$ a resposta não é imediata.

ii) Em todos esses exemplos o limite do quociente não se aplica pois o limite do denominador é zero.

Temos os seguintes casos:

$\boxed{1.\ \textbf{Caso}\ \frac{0}{0}}$

Essa forma de indeterminação já ficou demonstrada anteriormente.

$\boxed{2.\ \textbf{Caso}\ \frac{\infty}{\infty}}$

Podemos justificar essa forma como indeterminada pelo seguinte exemplo. Suponhemos o caso

$\frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$. Rearranjando numerador e denominador chegaremos ao caso $\frac{0}{0}$ que é indeterminado.

$\boxed{3.\ \textbf{Caso}\ 0.\infty}$

Como $0.\infty = 0.\frac{1}{0} = \frac{0}{0}$ então $0.\infty$ é indeterminado.

$\boxed{4.\ \textbf{Caso}\ \infty - \infty}$

Como $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$ então $\infty - \infty$ é indeterminado.

$\boxed{5.\ \textbf{Caso}\ \infty^0}$

Como $L\,\infty^0 = 0L\,\infty = 0.\infty$ então ∞^0 é indeterminado.

$\boxed{6.\ \textbf{Caso}\ 0^0}$

Como $L\,0^0 = 0L0 = 0.(-\infty)$ então 0^0 é indeterminado.

$\boxed{7.\ \textbf{Caso}\ 1^\infty}$

Como $L\,1^\infty = \infty L1 = \infty.0$, então 1^∞ é indeterminado.

5.2. REGRAS DE L'HOSPITAL.

TEOREMA 1: Se para $x = a$ a fração $\frac{f(x)}{g(x)}$ admite a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ mas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ não é indeterminada nesse ponto então

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se o primeiro limite existir.

DEM:

Aplicação direta do Teorema de Cauchy já visto anteriormente.

OBSERVAÇÃO:

Se $f'(x)$ e $g'(x)$ forem contínuas numa vizinhança de $\underline{a}$ então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

CONSEQUÊNCIA:

Se a fração $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admite a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ para x tendendo para $+\infty$, mas $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ não é indeterminada, então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se o primeiro limite existir.

DEM:

Fazendo a mudança de variável $z = \dfrac{1}{x}$ temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{z \to 0^+} \frac{[f(\frac{1}{z})]'}{[g(\frac{1}{z})]'} = \lim_{z \to 0^+} \frac{-\frac{1}{z^2} f'(\frac{1}{z})}{-\frac{1}{z^2} g'(\frac{1}{z})} =$$

$$= \lim_{z \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}$$

Pela hipótese do teorema, esse último limite existe pois é igual a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ que, por hipótese, existe. Pela tese do **Teorema 1** temos que,

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} = \lim_{z \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{C.Q.D.}$$

TEOREMA 2: Se $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admite a forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ quando x tende para $\underline{a}$ (finito ou não) então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se o primeiro existir.

OBSERVAÇÃO:

A demonstração deste teorema é mais complicada pelo fato das funções serem ilimitadas. Os mais interessados refiram-se a N.Piskounov - <u>Cálculo Diferencial e Integral</u>, vol. I.

EXEMPLOS:

a) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \operatorname{sen}\pi x + \pi(x^2 - 1)}{(x-1)^2} \quad (\dfrac{0}{0})$

Sejam, $f(x) = 2\text{sen}\,\pi x + \pi(x^2 - 1)$; $f'(x) = 2\pi\cos\pi x + 2\pi x$

$g(x) = (x-1)^2$; $g'(x) = 2(x-1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{2\pi(x + \cos\pi x)}{2(x-1)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como o quociente das primeiras derivadas também é indeterminado, podemos aplicar novamente a Regra de l'Hospital.

$f''(x) = 2\pi(1 - \pi\,\text{sen}\,\pi x)$

$g''(x) = 2$

Agora,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\pi(1 - \pi\,\text{sen}\,\pi x)}{2} = \pi$$

Portanto, $\lim_{x \to 1} \dfrac{2\text{sen}\,\pi x + \pi(x^2 - 1)}{(x-1)^2} = \pi$ também

b) Calcular $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ $n = 1,2,3,\ldots$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

SOLUÇÃO:

Seja $f(x) = x^n$ e $g(x) = e^x$; então $f'(x) = nx^{n-1}$ e $g'(x) = e^x$.

Agora $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x}$. Se $n \geq 2$ então recaímos novamente no caso $\frac{\infty}{\infty}$. Na verdade esse tipo de indeterminação continuará através de sucessivas aplicações da Regra de l'Hospital até que o numerador se reduza a uma constante. Teremos então:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Portanto, para $n \geq 1$, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$, $n = 1,2,\ldots$ Na verdade é fácil mostrar que esse resultado se estende para n positivo não necessariamente inteiro.

c) Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen}\,x}{\text{tg}^3 x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

SOLUÇÃO:

Sejam, $f(x) = x - \text{sen}\,x$; $f'(x) = 1 - \cos x$

$g(x) = tg^3x$; $g'(x) = 3tg^2x \ \sec^2 x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3t^2x \sec^2 x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Na verdade poderíamos aplicar novamente a Regra de l'Hospital e, poderão ser necessárias várias aplicações da Regra de l'Hospital até que a indeterminação seja eliminada. Para evitar que tenhamos que derivar funções muito complicadas, em muitos casos é conveniente simplificarmos antes da aplicação da regra. No caso presente teremos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3\, tg^2x\sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3\mathrm{sen}^2 x \sec^4 x} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sec^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$$

Aplicando a regra na última expressão teremos

$$\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\mathrm{sen}}\, x}{2\cancel{\mathrm{sen}}\, x \cos x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \mathrm{sen}\, x}{tg^3 x} = \dfrac{1}{6}$

d) Calcular $\lim_{x \to 0^+} x^n Lx \quad (n > 0) \qquad (0.\infty)$

SOLUÇÃO:

Para aplicar as regras de l'Hospital (Teoremas 1 e 2) é necessário que se reduza uma forma indeterminada em uma das formas $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, para que os teoremas se apliquem.

No caso presente temos,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n Lx = \lim_{x \to 0^+} \frac{Lx}{\frac{1}{x^n}} \overset{R.H.}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^n}{n} = 0$$

OBSERVAÇÃO:

R.H. significa a aplicação da Regra de l'Hospital.

e) Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - tg\, x) \qquad (\infty - \infty)$

SOLUÇÃO:

Temos que procurar recair num quociente. Para tal,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - tg\, x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Pela Regra de l'Hospital temos $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - tg\, x) \overset{R.H.}{=}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

f) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{cotg 2x}$ $\quad (1^\infty)$

SOLUÇÃO:

Esta, como todas as outras formas exponenciais de indeterminação (∞^0 e 0^0), devem ser expressas através de quociente. Porém é impossível passar diretamente uma função da forma exponencial para uma forma de quociente. Podemos, no entanto, utilizar a função contínua logarítmica como passo intermediário.

Seja então:

$$K = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{cotg 2x}$$

$$L(K) = L \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{cotg 2x}$$

$$L(K) = \lim_{x \to 0^+} L(1 + x)^{cotg 2x}$$

$$L(K) = \lim_{x \to 0^+} cotg 2x\, L(1 + x)$$

$$L(K) = \lim_{x \to 0^+} \frac{L(1 + x)}{tg 2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicando a regra de l'Hospital (Teorema 1) teremos:

$$L(K) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1 + x}}{2\sec^2 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad K = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

g) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{cotg 2x}$ $\qquad (0^\infty)$

SOLUÇÃO:

Essa não é uma forma indeterminada (∞^0 é que é); o resultado é, obviamente, 0.

EXERCÍCIOS 5.2.

1. Determinar os tipos de indeterminação e calcular os limites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{\cos 3x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{1 - \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2-x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sec x - 1}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{Lx^n}{1 - x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} (\sec x)^{1/x}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\frac{1}{x-1}}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{cotg} x}$

2. Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$

3. Pode a regra de l'Hospital ser usada para calcular

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{x}$? Explique. Qual o valor desse limite?

4. Pode a regra de l'Hospital ser usada para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$$? Explique. Qual o valor desse

limite?

CAPÍTULO 6. FÓRMULAS DE TAYLOR E MACLAURIN (APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS).

6.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é a aproximação dos valores de uma função por valores de outra, esta última polinomial que é reconhecidamente membro de uma classe de funções bem estudadas, até mesmo em muitos cursos secundários.

Duas funções cujos gráficos possuem um ponto de intersecção terão valores semelhantes em geral numa vizinhança muito estreita (figura 1).

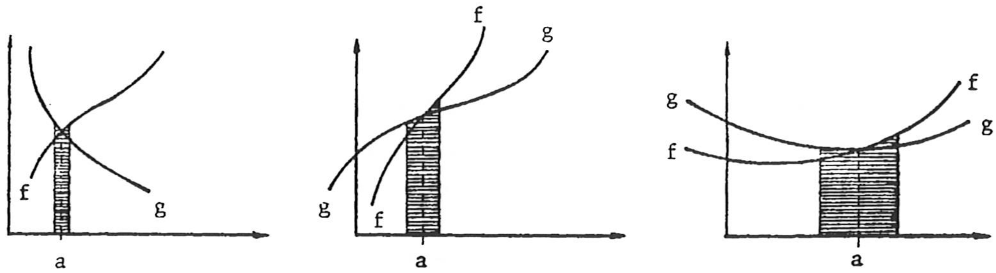


Figura 1 figura 2 figura 3

Duas funções, coincidindo num ponto e possuindo nesse ponto primeiras derivadas idênticas, serão semelhantes num intervalo um pouco maior, pois a tangente às duas curvas nesse ponto devem coincidir (figura 2).

Duas funções, com os mesmos valores em a, com idênticas primeiras derivadas e com segundas derivadas também iguais, terão valores aproximadamente iguais num intervalo ainda maior, pois, além de coincidirem em a e terem mesmas tangentes em a, a concavidade nesse ponto também deverá ser a mesma.

Continuando nesse raciocínio a exigência de derivadas até alta ordem idênticas para as duas funções acarretará uma semelhança em termos de seus valores em intervalos cada vez maiores, dependendo da ordem dessas derivadas sucessivas.

6.2. APROXIMAÇÃO DE UMA FUNÇÃO $f(x)$ POR UMA POLINOMIAL $P(x)$.

Seja $P(x)$ uma função polinomial em $(x - a)$ de grau n; derivando sucessivamente obtemos as seguintes equações:

$$P(x) = a_o + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \ldots + a_n(x - a)^n$$

$$P^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \ldots \quad \ldots + na_n(x - a)^{n-1}$$

$$P^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2(x - a) + \ldots \quad \ldots + n(n - 1)a_n(x - a)^{n-2}$$

$$P^{(3)}(x) = 3! + \ldots \quad \ldots + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - a)^{n-3}$$

....

$$P^{(n)}(x) = n(n - 1) \ldots 3.2.1a_n$$

Substituindo $x = a$ em todas as equações teremos,

$P(a) = a_o$; $P^{(1)}(a) = a_1$; $P^{(2)}(a) = 2a_2$; $P^{(3)}(a) = 3!\ a_3$; ... ;$P^{(n)}(a) =$

$= n!\ a_n$

Seja agora $f(x)$ uma outra função (não necessariamente polinomial) qualquer e suponhamos que seja derivável em $\underline{a}$ até a ordem $\underline{n}$. Vamos impor a condição de que $f(x)$ e $P(x)$ devam ter derivadas sucessivas até a ordem $\underline{n}$ iguais. Pela análise gráfica da introdução, $f(x)$ e $P(x)$ terão valores semelhantes num certo entorno de $\underline{a}$. Teremos então:

$f(a) = a_o$; $f^{(1)}(a) = a_1$; $f^{(2)}(a) = 2a_2$; $f^{(3)}(a) = 3!\ a_3$; ...;

$f^{(n)}(a) = n!\ a_n$

Donde obtemos as constantes da função polinomial em função das derivadas de f no ponto a, ou seja,

$$a_o = f(a);\ a_1 = f'(a);\ a_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!};\ a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!};\ \ldots;$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

A função polinomial procurada será então,

$$\boxed{P(x) = f(a) + (x - a)f^{(1)}(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x - a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}$$

A função polinomial $P(x)$ é dita Fórmula de Taylor para $f(x)$ no ponto $\underline{a}$.

EXEMPLO:

Calcular para a função $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*) a fórmula de Taylor no ponto $\underline{0}$ de 5º grau.

SOLUÇÃO:

Considere o quadro abaixo:

FUNÇÃO	no ponto $\underline{0}$	Termo do Polinômio
$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	0	0
$f^{(1)}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	1	x
$f^{(2)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	0	0
$f^{(3)}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	1	$\dfrac{x^3}{3!}$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	0	0
$f^{(5)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	1	$\dfrac{x^5}{5!}$

Calc lemos f(x) e P(x) para valores próximos de $\underline{0}$, pela tabela abaixo:

x	P(x)	f(x)	$\lvert R(x)\rvert$	$\lvert R(x)/f(x)\rvert x100$
-10	-1,010	-11,013	10,003	90,8%
-5	-51,87	-74,20	22,33	30,1%
-2	-3,6	- 3,6269	0,0269	0,7%
-1	-1,18	- 1,1752	0,0048	0,4%
-0,5	-0,52109	- 0,52109	≈ 0	$\approx$ 0%
0	0	0	0	0%
0,5	0,52109	0,52109	≈ 0	$\approx$ 0%
1	1,18	1,1752	0,0048	0,4%

Um exame dessa última tabela mostra uma boa aproximação de P(x) em relação a f(x) quando x está próximo de $\underline{0}$ e mostra uma aproxima-

(*) *Essa função é conhecida por seno hiperbólico de x, anotado por senhx; verifique que, se* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *então* $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ *e* $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$.

ção cada vez mais grosseira à medida que x se distancia de $\underline{0}$. Uma melhor aproximação de P(x) para valores mais distantes de $\underline{0}$ pode ser conseguida a custa de um aumento do grau de P(x), isto é, tomando-se mais termos da fórmula de Taylor.

OBSERVAÇÃO:

Brook Taylor, matemático inglês, discípulo de Newton, publicou a sua fórmula em 1715. O caso especial em que a = 0 foi publicado em 1742 por Colin MacLaurin e, muitas vezes, sem justificativa histórica, é conhecida como fórmula de MacLaurin, matemático escocês (1698-1746).
(citado em Introduction to Calculus and Analysis, Courant & John, vol. I, pag. 452).

Como podemos ver, dada uma função derivável até a ordem $\underline{n}$, podemos escreve

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde $R_n(x)$ é a função resto. Um estudo mais completo das formas de representação de $R_n(x)$, tais como:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in [a,b]$$

chamada representação de Lagrange para $R_n(x)$, representação de Cauchy, etc... estão além dos objetivos do curso. Uma boa fonte de referência é o volume I de Courant e John ou o volume I de N. Piskounov.

EXEMPLOS:

a) Expandir até o 7º grau a função f(x) = sen x, pela fórmula de Taylor no ponto a = 0. Calcular $f(\frac{\pi}{9})$ e $P(\frac{\pi}{9})$.

SOLUÇÃO:

$f(x) = \text{sen } x$, $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\text{sen } x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \text{sen } x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\text{sen } x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x$

etc, etc,...

Para a = 0 teremos,

$f(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = -1$

etc, etc, ...

A função P(x) ficará:

$$P(x) = 0 + x(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-1) + \frac{x^4}{4!}(0) + \frac{x^5}{5!}(1)$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R(x)$$

Para $x = \frac{\pi}{9}$ teremos

$$P(\frac{\pi}{9}) = \frac{\pi}{9} - (\frac{\pi}{9})^3 \frac{1}{6} + (\frac{\pi}{9})^5 \frac{1}{120}$$

$$= 0,34906585 - 0,00708877 + 0,00004319$$
$$= 0,34202027$$

Usando uma calculadora obtém-se:

$$f(\frac{\pi}{9}) = \text{sen } (\frac{\pi}{9}) = 0,34202014$$

OBSERVAÇÃO:

Na realidade a calculadora tem embutida um processador **aritmético** que calcula $f(x) = \text{sen } x$ através $P(x)$ com grau bem maior. O valor exato do sen $\frac{\pi}{9}$ jamais saberemos com exatidão absoluta.

b) Expandir e^x até o n-ésimo grau pela fórmula de Taylor no ponto $\underline{0}$. Calcular $e^{0,12}$ e $e^{1,5}$ e suas aproximações com $n = 4$.

SOLUÇÃO:

Temos $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$. Para $x = 0$ temos $f^{(n)} = e^0 = 1$, para $n \geq 0$. Portanto,

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$P_4(0,12) = 1,12749664$$

$$P_4(1,5) = 1 + 1,5 + 1,125 + 0,5625 + 0,2109375 = 4,3984375$$

Usando uma calculadora obtemos,

$$e^{0,12} = 1,127496852 \quad ; \quad e^{1,5} = 4,48168907$$

OBSERVAÇÃO:

Este exemplo mostra claramente as diferentes precisões de $P(x)$ em relação a $f(x)$ à medida que x se distancia de $\underline{a}$ (no caso $a = 0$). A determinação do número de termos é muito importante além do intervalo de precisão mínima, tópicos que ficarão para cursos mais avançados.

c) Expandir e^{senx} até o 5º grau.

SOLUÇÃO:

Já vimos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

e que, $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$

então, $$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 + \ldots$$

Reunindo as potências iguais teremos,

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \ldots$$

EXERCÍCIOS 6.2.

1. Obtenha a fórmula de Taylor no ponto $\underline{0}$ das seguintes funções:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ b) $f(x) = \cos(1 + x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen} e^x$ d) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^4}$

2. Expanda $f(x)$ pela Fórmula de Taylor no ponto $\underline{a}$.

a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$; $a = -1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$; $a = 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $a = 2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS.

CAPÍTULO 1.

EXERCÍCIOS 1.1.

1. $f(1) = -1$ $f(-1) = 5$ $f(0) = 1$ $f(\sqrt{2}) = 5 - 3\sqrt{2}$
2. $f(1) = 2$ $f(3) = 6 + \sqrt{2}$ $f(5) = 12$ $f(10) = 23$
3. a) $a^2 - 3a + 2$ b) $a^2 + 3a + 2$ c) $\frac{1}{a^2} - \frac{3}{a} + 2$

   d) $\frac{1}{a^2 - 3a + 2}$ e) $(a + h)^2 - 3(a + h) + 2 = a^2 + 2ah + h^2 -$

   $- 3a - 3h + 2.$ f) $2a + h - 3.$
4. a) R b) $\{x \in R | x \neq -1\}$ c) $[\frac{4}{3}, +\infty)$ d) $(-\infty, \frac{9}{5}]$

   e) $(-\infty,-4]U[4,+\infty)$ f) $[-3,3]$ g) $\{x \in R | x \neq 2$ e $x \neq 3\}$ h) $(1,2)$.

EXERCÍCIOS 1.2.

1. a) $D = R = I$ b) $D = [-1,1]$ $I = [0,1]$ c) $D = R - \{-\frac{1}{2}\}$

   $I = R - \{-2\}$ d) $D = R$ $I = \{-2,2\}$ e) $D = R$ $I = [-4,+\infty)$

   f) $D = R - \{-3\}$ $I = R - \{20\}$
2. Se $-1 < x < 1$, há dois pontos diferentes no gráfico com abscissa x.
3. a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ b) $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

EXERCÍCIOS 1.3.

1. a) par b) par c) sem paridade d) par e) ímpar f) par

   g) sem paridade h) par i) ímpar.
2. f é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$.

   g é ímpar, então $g(-x) = -g(x)$.

   Logo, $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] =$

   $= -(f + g)(x)$ e, portanto, $(f + g)$ é ímpar.

   Analogamente para $(f - g)$.
3. Temos $(f.g)(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) =$

   $= (f.g)(x)$.

   Portanto, $(f.g)$ é par.

   Analogamente para f/g.

EXERCÍCIOS 1.4.

1. a) $(fog)(x) = 5 - 6x^2$ $D = R$; $(gof)(x) = 18x^2 - 96x + 129$ $D=R$.

b) $(fog)(x) = \dfrac{3}{(x+5)^2}$ $D = R - \{-5\}$; $(gof)(x) = \dfrac{x^2}{3 + 5x^2}$

$D = R - \{0\}$

c) $(fog)(x) = (gof)(x) = x$, $D = R$.

d) $(fog) = \sqrt{2x^2 + 7}$, $D = R$; $(gof)(x) = 2x + 4$, $D = [-\dfrac{1}{2}, +\infty)$

e) $(fog)(x) = 4$, $D = R$; $(gof)(x) = 4$, $D = R$.

f) $(fog)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 4x^2 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $D=R$; $(gof)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$D = R$

g) $(fog)(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $D=R$; $(gof)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$D = R$

2. $g(x) = x - 3$ ou $g(x) = 1 - x$

EXERCÍCIOS 1.5.

1. a) $(f + g)(x) = x^2 + x - 8$, $D = R$; $(f - g)(x) = -x^2 + x - 2$, $D = R$; $(f.g)(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 15$; $(f/g)(x) = (x - 5)/ /(x^2 - 3)$, $D=R - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

b) $(f + g)(x) = 2\sqrt{x - 8}$, $D = [8, +\infty)$; $(f - g)(x) = 0$, $D=[8,+\infty)$; $(f.g)(x) = |x - 8|$, $D = [8,+\infty)$; $(f/g)(x) = 1$, $D = (8,+\infty)$.

c) $(f + g)(x) = |x| + |x - 2|$, $D = R$; $(f - g)(x) = |x| - |x - 2|$, $D = R$; $(f.g)(x) = |x^2 - 2x|$, $D = R$; $(f/g)(x) = \left|\dfrac{x}{x - 2}\right|$, $D = R - \{2\}$

d) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}$, $D = R - \{0,1\}$; $(f - g)(x) =$

$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x}$, $D = R - \{0,1\}$; $(f.g)(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - x}$,

$D = R - \{0,1\}$; $(f/g)(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, $D = R - \{0,1\}$

2. Não. Exemplo: $f(x) = x^3 + 8x - 7$ e $g(x) = -x^3 + x^2 + 8$

$(f + g)(x) = x^2 + 8x + 1$

$(f.g)(x) = -x^6 + x^5 - 8x^4 + 23x^3 - 7x^2 + 64x - 56.$

EXERCÍCIOS 1.6.

1. a) injetora, sobrejetora, bijetora b) não injetora, não sobrejetora, não bijetora c) não injetora, sobrejetora, não bijetora.

EXERCÍCIOS 1.7.

2. a) $f^{-1}(x) = x - 4$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 3}{3x - 2}$ c) $f^{-1}(x) = \sqrt{6 - x}$ $0 \leq x \leq 6$ d) $f^{-1}(x) = x^2 + 2,\ x \geq 0$ e) $f^{-1}(x) = x$ f) $f^{-1}(x) = \dfrac{5}{x}$ g) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 5}{2}}$

EXERCÍCIOS 1.8.1.

1. $k > 1$
3. $f(5) = 17$
4. a) $(-\infty, -\frac{5}{2})$ b) $(-\infty, 4)$ c) $[\frac{7}{3}, +\infty)$ d) $(7, +\infty)$ e) $(-\infty, -29]$ f) $\mathbb{R}$ g) $[-2,1] \cup [3,+\infty)$ h) $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [4, +\infty)$

EXERCÍCIOS 1.8.2.

2. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
3. a) $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}$ d) $[3,5]$ e) $\emptyset$ f) $[-3,2] \cup [3,+\infty)$ g) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (1, \frac{3}{2}] \cup (3, +\infty)$ h) $(-3,2)$

EXERCÍCIOS 1.8.3.

2. a) $\{-7,7\}$ b) $\{-11,5\}$ c) $\emptyset$ d) $\{-1,4\}$ e) $\{-3,-1,1,3\}$
3. a) $(-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$ b) $(-8,8)$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ f) $(-8,24)$ g) $\mathbb{R}$ h) $(-3,0) \cup (1,4)$

EXERCÍCIOS 1.8.4.

2. a) $\{4\}$ b) $\{-2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{\frac{7}{12}\}$ e $\{1,2\}$.
3. a) $(-\infty, 2)$ b) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ c) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ d) $(-\frac{5}{24}, +\infty)$

e) $(0,1)$.

EXERCÍCIOS 1.8.5.

1. a) 5 b) 2 c) 0 d) $-\frac{2}{7}$

3. a) 0,77 b) 0,17 c) 0,70 d) 1,84 e) 1,13
4. a) $\{2\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{6+2\sqrt{5}\}$ d) $\{2,512\}$ e) $\{\frac{1}{10},10\}$
5. a) $[3,+\infty)$ b) $(1,+\infty)$ c) $(\frac{3}{4},1]\cup[3,+\infty)$ d) $(1,+\infty)$
   e) $(0,10)\cup(100,+\infty)$

EXERCÍCIOS 1.8.6.

3. a) $\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ b) $\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{2} + h\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2h\pi$, $h \in Z\}$.

   c) $\{x \in R \mid x = \frac{3\pi}{8} + \frac{h\pi}{2}, h \in Z\}$

   d) $\{x \in R \mid x = \frac{h\pi}{2}$ ou $x \pm \frac{\pi}{3} + h\pi$, $h \in Z$

4. $\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS 1.8.7.

1. a) $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{2\pi}{3}$

   g) $\frac{\pi}{4}$ h) 0 i) $\frac{\pi}{3}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\{-1,1\}$
4. $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$
5. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

CAPÍTULO 2.

EXERCÍCIOS 2.1.

1. a) 0,0005 b) 0,005 c) $\frac{1}{1.400}$ d) 0,005 e) 0,2
   f) $\frac{0{,}01}{3}$

2. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ b) $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ c) $\delta = \varepsilon$ d) $\delta = \min(1, \frac{1}{3}\varepsilon)$

e) $\delta = \min(1, \frac{3}{2}\varepsilon)$ f) $\forall\ \delta > 0.$

EXERCÍCIOS 2.2.

1. a) 5 b) -48 c) 4 d) 3 e) 12 f) 0 g) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{9}{2}$

2. a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 0;$ $f(-3) = 4$

EXERCÍCIOS 2.3.

1. a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} f(x) = 8$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 5$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

f) $\lim\limits_{x \to -10^-} f(x) = -1;$ $\lim\limits_{x \to -10^+} f(x) = 1;$ $\nexists \lim\limits_{x \to -10} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1;$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1;$ $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 8;$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 6;$ $\nexists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4;$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2;$ $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 1;$ $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 2;$ $\nexists \lim\limits_{x \to 1} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 4$

EXERCÍCIOS 2.4.

2. a) $\frac{8}{7}$ b) 2 c) 0 d) 1 e) 1 f) $\frac{3}{2}$ g) $-\frac{8}{\sqrt[4]{3}}$

h) 1 i) $\frac{5}{8}$ j) 0 l) $\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 2.5.

3. a) $+\infty$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{4x^2}{9 - x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4x^2}{9 - x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$ g) $+\infty$

h) $+\infty$ i) 1 j) $-\infty$ l) $+\infty$ m) $+\infty$ n) $+\infty$

EXERCÍCIOS 2.6.

1. Convenção: AH: assíntotas horizontais ; AV: assíntotas verticais.

a) AV: $x = \dfrac{1}{3}$ b) AV: $x = -\dfrac{3}{5}$ c) AH: $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

AH: $y = 5/3$ AH: $y = -3/5$

d) AV: $x = -2$; $x = 2$

AH: $y = 0$

e) AV: $x = -2$ f) AV: $x = -3$; $x = 3$ g) AV: $x = 0$; $x = \dfrac{3}{2}$

AH: $y = 0$ AH: $y = -2$ AH: $y = 1$

EXERCÍCIOS 2.7.

4. a) 8 b) $\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{9}{2}$ d) 3 e) -1 f) $\dfrac{1}{9}$ g) $\sqrt{2}$

h) 1 i) $\dfrac{2}{3}$ j) $\cos a$ l) $\dfrac{1}{2}$ m) $\dfrac{2}{3}$

5. a) e^3 b) e c) $\dfrac{1}{e}$ d) $\dfrac{1}{e}$ e) 1 f) e^6 g) $\dfrac{1}{e}$

EXERCÍCIOS 2.8.

1. a) f descontínua em 3; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

b) f descontínua em -5; não existe $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

c) f contínua em 10.

d) f descontínua em 2; não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

e) f descontínua em 0; não existe $f(0)$.

f) f descontínua em -2; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$.

g) f contínua em 1.

2. 1

EXERCÍCIOS 2,9.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ -1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$; $(f + g)(x) = 0,\ \forall x$

3. Todas as funções são contínuas em 1.

EXERCÍCIOS 2.10.

1. a) f contínua em (3,7) e descontínua em [-6,4] e [-10,-5].
   b) f contínua em (-2,2) e descontínua nos outros intervalos.
   c) f contínua em (-2,2) e [-2,2] e descontínua em [2,3] e (-1,5)
   d) f contínua em (-2,2) e descontínua nos outros intervalos.

CAPÍTULO 3.

EXERCÍCIOS 3.1.

1. a) $m = -3;\ y = -3x$ b) $m = 0;\ y = 1$ c) $m = 4;\ y = 4x + 3$
   d) $m = -8;\ y = -8x + 16$ e) $m = -\dfrac{1}{3};\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$
   f) $m = -\dfrac{1}{4};\ y = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{4}x$ g) $m = -\dfrac{1}{16};\ y = \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{16}x$
   h) $m = \dfrac{1}{12};\ y = \dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}$ i) $m = -1;\ y = -x + \pi$

2. i) a) 11,8cm/s b) 11,4cm/s c) 11,04cm/s d) 11,004cm/s
   ii) 11cm/s

3. a) 140 m/s b) 60m/s c) -140 m/s d) 16s

4. a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}008$ b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}006$ c) $\dfrac{3}{250}$ d) $\dfrac{1}{125}$

EXERCÍCIOS 3.2.

1. a) 0 b) $2x - 2$ c) $8 - 10x$ d) $3x^2 - 1$ e) $+\dfrac{1}{(3 - x)^2}$
   f) $-\dfrac{2}{x^3}$ g) $-\dfrac{13}{(3x - 2)^2}$ h) $\dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$
   i) $-\dfrac{1}{2\sqrt{(x + 3)^3}}$ j) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

2. a) -4 b) $-\dfrac{1}{216}$ c) $-\dfrac{14}{25}$

EXERCÍCIOS 3.3.

1. a) contínua e diferenciável em 2.

   b) contínua em 5; não diferenciável em 5; $f'_-(5) = -1$ e $f'_+(5)=1$

   c) contínua em -2; não diferenciável em -2; $f'_-(-2)=-1$ e $f'_+(-2)=1$.

   d) contínua em 3; não diferenciável em 3; $f'_-(3)=2$ e $f'_+(3)=-1$

   e) contínua em 1; não diferenciável em 1; $f'_-(1)=0$ e $f'_+(1)=1$.

   f) contínua em 2; não diferenciável em 2; $f'_-(2)=4$ e $f'_+(2)=-1$.

   g) contínua e diferenciável em 0.

   h) contínua em 2; não diferenciável em 2; $f'_-(2)=4$ e $f'_+(2)$ não existe.

   i) contínua e diferenciável em3.

2. $a = 2$ e $b = -1$.

EXERCÍCIOS 3.4.

1. a) $14x^6$ b) $24x^7 - 12x^2 + 2x$ c) $6x^2(4 - 8x + 5x^2 - x^3)$

   d) $3x^2 + 4x - 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^3}$ e) $8x^3 - 3 - \frac{15}{8x^4}$

   f) $\frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}}$ g) $\frac{\sqrt{3x}}{2x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} - \frac{1}{x^2}$ h) $\frac{3}{5} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{4x^2}$

   i) $9x^2 + 14x + 2$ j) $10x^9 - 63x^8 + 14x^6 - 48x^5 + 105x^4 + 4x^3 + 54x^2 - 54x + 2$ l) $2(x^2 - 2)x^{-2}$ m) $-13(3x - 2)^{-2}$

   n) $(-x^2 + 4x - 1)(x^2 - 2x + 3)^{-2}$ o) $6(x^2 + 10x + 1)(x + 5)^{-2}$

   p) $(2x^7 + x^6 + 13x^4 + 10x^3 - 3x^2 + 8x + 6x^{-1} - 3x^{-2} + 9x^{-4}) \cdot (x^2 + 3)^{-2}$

2. a) -1 b) 5 c) -5 d) -2 e) 16 f) -4

3. -65

5. a) $48x^5 + 155x^4 + 104x^3 - 141x^2 - 310x - 260$

   b) $54x^2 + 66x - 28$

   c) $48x^5 + 60x^4 + 72x^3 + 39x^2 + 18x + 3$

6. $y = \frac{4}{5} x + \frac{13}{5}$

7. $y = \frac{5}{2} x - \frac{99}{16}$

8. a) $\frac{6}{25}$ m/s b) 3 s

9. a) -12 b) $6m/s^2$

EXERCÍCIOS 3.5.

1. a) $30(3x+5)^9$ b) $10(x^2-2x+6)^4(x-1)$ c) $-3(x+5)^{-4}$

d) $17000(17x-5)^{999}$ e) $3(x^4+5x+\frac{1}{6x})^2\ (4x^3+5-\frac{1}{6x^2})$

f) $2(5x^9-8x^7-9x^5+8x^3+4x)$ g) $3(x^3+2x-6)^2(3x^2+2)\cdot$

$\cdot(x^2-4x+5)^7+7(x^3+2x-6)^3(x^2-4x+5)^6(2x-4)$.

h) $-(1+7x^2)(x^2-1)^{-5}$ i) $2x(x^2+1)^2(x^2+4)(x^2+2)^{-3}$

j) $(-7x^2-10-4x^{-1}+x^{-2})(x^2+2x-1)^{-2}$

l) $4(4x-1)^2(x^2+2)^3(21x^4-3x^3+49x^2-4x+30)(3x^2+5)^{-3}$

m) $\dfrac{7x-1}{6\sqrt[3]{x+1}\sqrt{x-1}}$ n) $8(\sqrt{5x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt{\pi})^7(\dfrac{\sqrt{5x}}{2x}-\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{3x^2})$

o) $\dfrac{13}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)^{-\frac{3}{2}}$ p) $x(7x^2+1)(x^{14}+x^2+\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$

q) $\dfrac{1}{2}(3x^2-1+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(x^3-x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$

r) $-\dfrac{1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\sqrt{9-x}}$ s) $\dfrac{x+5}{6\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^4}}$

3. $y=-1$.

EXERCÍCIOS 3.6.1.

a) $21\cos 7x$ b) $-(15x^2+1)\ \text{sen}(5x^3+x)$ c) $3\cos 6x$

d) $-2(\text{sen}\ x-\cos x)^{-2}$ e) $(2x\cos 2x-5\text{sen}2x)x^{-6}$

f) $100\ \text{sen}^3 5x\cos 5x$ g) $-2x\,\text{cossec}^2 x^2$ h) $30x\sec(5x^2+1)\ \text{tg}(5x^2+1)$

i) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\ \sec\sqrt{x-1}\ \text{tg}\sqrt{x-1}$

j) $\text{tg}x\sec^3 x(2\sec^2 x+3\text{tg}^2 x)$ l) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\ x}}$

m) $-90x\ \text{cossec}9x^2\ \text{cotg}\ 9x^2$ n) $-\dfrac{\text{cossec}^2 2x}{\sqrt{\text{cotg}2x}}$

o) $5\text{sen}\ x(1-2\cos x)^{\frac{3}{2}}$ p) $4\ \text{cossec}^2 4x\ \text{cossec}(\text{cotg}4x)\text{cotg}(\text{cotg}4x)$

q) $12x^2\sec^2 4x^3\cos(\text{tg}4x^3)$ r) $-\sec(\text{cossec}^2\sqrt{x})\text{tg}(\text{cossec}^2\sqrt{x})\cdot$

$\cdot\text{cossec}^2\sqrt{x}\ \text{cotg}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ s) $3x^2\cdot(\text{tg}x+x\sec^2 x)\dfrac{1}{\text{tg}^4 x}$

t) $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}\cdot\sec\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\text{tg}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

u) $-\dfrac{2x^2+3}{x^4\sqrt{x^2+1}}.\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$ v) $\dfrac{3\operatorname{sen}6x}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 3x}}$

w) $-\dfrac{9(1+x^2)\operatorname{sen}6x+4x(1+\cos^2 3x)}{6\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\sqrt{1+\cos^2 3x}}$

x) $3x^2(\operatorname{sen}3x+x\cos 3x)\sec^2(x^3\operatorname{sen}3x)$ y) $\dfrac{3\cos x+2\operatorname{sen}x}{2\sqrt{15\operatorname{sen}x-10\cos x}}$

z) $12x^2-2x\operatorname{cotg}^3\left(\dfrac{1}{x}\right)-3\operatorname{cotg}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{cossec}^2\left(\dfrac{1}{x}\right).$

EXERCÍCIOS 3.6.2.

1. a) 2 b) $(5x^4)^{-1}$ c) $(4x-1)^{-1}$ d) $-\dfrac{(2x-3)^2}{5}$

2. $\dfrac{1}{8}$

EXERCÍCIOS 3.6.3.

1. a) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ c) $\dfrac{2x}{1+x^4}$ d) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\operatorname{arccossec}\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\operatorname{arcsec}\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

g) $\operatorname{arc}\cos x-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ h) $2x\left(\operatorname{arcsen}2x+\dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$ i) $\dfrac{2}{1+x^2}$

j) $\dfrac{-3(1+x^2)+2x(1+9x^2)\operatorname{arccotg}3x}{(1+9x^2)(1+x^2)^2}$ k) $\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

l) $\operatorname{arcsen}x$ m) $\dfrac{\operatorname{sen}x+x\cos x-x^2}{1-2x\cos x+x^2}$ n) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

o) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^2x}}$ p) $-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$ q) $\dfrac{3\sec^2 x}{1+9\operatorname{tg}^2x}$

r) $\dfrac{x^2+1-4x^2\sqrt{x-1}\operatorname{arcsec}\sqrt{x}}{2x(x^2+1)^2\sqrt{x-1}}$ s) $\dfrac{1}{[5+(\operatorname{arcsen}x)^4]\sqrt{1-x^2}}$

t) $\dfrac{2[5+(\operatorname{arctg}2x)^2]^{20}}{1+4x^2}$ u) $\dfrac{3}{2|3x|\sqrt{\operatorname{arcsec}3x}\sqrt{9x^2-1}}$

v) $\operatorname{arc}\cos 2x$ w) $2\sqrt{4-x^2}$ x) $\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{2+\operatorname{tg}^2x}$ y) $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

z) $\dfrac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+3}}$

EXERCÍCIOS 3.6.4

1.a) $\frac{3x^2}{(x^3+1)L3}$ b) $\frac{1}{xL10(1+x)}$ c) $\frac{2}{2x+3}$ d) $\frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$

e) $\frac{4}{x}$ f) $\frac{1}{2x}(1+\frac{1}{\sqrt{Lx}})$ g) $\frac{-15}{2-3x}$ h) $\frac{2}{6x+7}$

i) $\frac{3L^2x}{x}$ j) $\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}$ k) $\frac{1}{xLx}$ l) $\frac{2Lx(1+x^2-x^2Lx)}{x(1+x^2)^2}$

m) $\frac{2Lx}{xL10}-\frac{1}{x}$ n) $\frac{cotg\,x}{L10}$ o) $-2x\,tgx^2$ p) $\frac{cos(Lx)}{x}$

q) $\frac{1}{x(1+L^2x)}$ r) $\frac{1}{1-x^2}$ s) $\frac{5cos\,x\sqrt{1-x^2}-4}{(5sen\,x-4arc\,sen\,x)\sqrt{1-x^2}}$

t) $\frac{1}{(1+L^2x)x}+\frac{1}{(1+x^2)arctgx}$ u) $\frac{1}{2x\sqrt{Lx+1}}+\frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$

v) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,arcsen\,x}+\frac{Lx}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-L^2x}}$ w) $-cossec\,x$

x) $\frac{2}{cos\,x\sqrt{sen\,x}}$ y) $\frac{1}{1+2sen\,x}$ z) $-\frac{1}{x(1+L^2x)}$

EXERCÍCIOS 3.6.5.

1. a) $3^{5x}5L3$ b) $4^{-2x}(-2)\,L4$ c) $2^{7x^2}14xL2$ d) $2^{-7x}(3x^2-7L2)$

e) $2xL2\;2^{tgx^2}sec^2x^2$ f) $5^{secx}L5\;sec\,xtg\,x$ g) $\frac{2x^3(L7)7^{\sqrt{x^4+9}}}{\sqrt{x^4+9}}$

h) $\pi^x\,x^{\pi-1}(\pi-xL\pi)$ i) $e^{2x}(1/x+2Lx)$ j) $x^x(Lx+1)$

l) $4\;e^{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}(4+x^2)^{-3/2}$ m) $\frac{3}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}$ n) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

o) $\frac{e^x+xe^x-1}{2\sqrt{xe^x-x}}$ p) $2\;sen4x\;e^{sen^2 2x}$ q) $-\frac{e^{arccotg\,x}}{1+x^2}$

r) $e^x(cotg\,x+Lsen\,x)$ s) $-e^{-x}(arcsec\,e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}-1}})$

t) 0 u) $\frac{1}{1+e^x}$ v) $\frac{2e^{2x}\,arcsen5x\sqrt{1-25x^2}-5e^{2x}}{\sqrt{1-25x^2}(arcsen5x)^2}$

w) $\frac{e^{\log_4 x}}{xL4}$ x) $\frac{L7(L3+5^xL0,6)}{1+5^x}$ y) $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

z) $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

EXERCÍCIOS 3.6.6.

1. a) $(x+1)^x[\frac{x}{x+1}+L(x+1)]$ b) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}Lx)$

c) $x^{e^x} e^x (Lx + \frac{1}{x})$ d) $x^{senx}(\frac{sen\ x}{x} + \cos xLx)$

e) $(x^2+4)^{Lx}[\frac{L(x^2+4)}{x} + \frac{2xLx}{x^2+4}]$ f) $x^{x^2+1}(1 + 2Lx)$

g) $\sqrt[x]{x}\,\frac{1-Lx}{x^2}$ h) $(\frac{3}{x})^x(L(\frac{3}{x}) + \frac{x^2}{9})$ i) $(Lx)^x(1 + Lx)$

j) $(Lx)^{Lx}[\frac{L(Lx)+1}{x}]$ l) $(4e^x)^{3x}.3(L(4e^x) + x)$

m) $(\cos x)^{senx}(\cos x\ L\cos x - sen\ x\ tg\ x)$

n) $(arctg\ x)^x\ (L\ arctg\ x + \frac{x}{(1+x^2)arctg\ x})$

EXERCÍCIOS 3.7.

1. a) $15x^2 + 16x - 7;\ 30x + 16$ b) $24x^7 + 20x^3;\ 168x^6 + 60x^2$

c) $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3};\ -\frac{2}{9}.\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{12}{x^4}$ d) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$;

; $\frac{9}{4}.\frac{1}{\sqrt{(3x+1)^3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}};\ \frac{-3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

f) $\frac{2}{\sqrt[5]{(10x+7)^4}};\ \frac{-16}{\sqrt[5]{(10x+7)^9}}$ g) $2x\ e^{x^2};\ e^{x^2}(4x^2+2)$

h) sen2x; 2cos2x i) $2x\ arctg\ x + 1;\ 2arctg\ x + \frac{2x}{1+x^2}$

j) $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}};\ \frac{-x}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

2. a) 2 s ; 9m ; 0m/s b) $\underline{a}$ nunca é zero. c) $\underline{a}$ nunca é zero. d) $\frac{3}{2}$ s ; $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ m; $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ m/s

3. a) $f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x \leq 1 \\ 2, & se\ x > 1 \end{cases}$, D = R; $f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x < 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases}$, D=r-{1}

b) $f'(x) = 2|x|$, D = R; $f''(x) = 2|x|/x$, D = R -{0}

c) $f'(x) = 4|x^3|$, D = R; $f''(x) = 12x|x|$, D = R

4. 736/3

5. a) $(-1)^n\ n!\ x^{-(n+1)}$ b) $(-1)^{n+1}\frac{1.3...(2n-3)}{2^n x^{n-1/2}}$

c) $sen(x + n\frac{\pi}{2})$ d) $(-3)^n e^{-3x}$ e) $n!\ (1-x)^{-(n+1)}$

f) $\dfrac{2n!}{(1 - x)^{n+1}}$

EXERCÍCIOS 3.8.

a) $(-6x + 5x^4)\, dx$ b) $-x(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

c) $[3x^2(x^3 + 9)^{\frac{1}{3}} + x^5(x^3 + 9)^{-\frac{2}{3}}]\, dx$. d) $\dfrac{1}{2}\, x(x + 2)(x + 1)^{-\frac{3}{2}}\, dx$

f) $\dfrac{7}{6}\, (3x^2 + 1)(3x + 4)^{-\frac{1}{2}}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}\, dx$ e) $3(x + 3)^{-\frac{3}{2}}(x - 3)^{\frac{1}{2}}\, dx$

g) $-2x\, e^{-x^2} dx$ h) $-\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$ i) $-\dfrac{2dx}{1 - x^2}$ j) $Lxdx$

l) $\dfrac{dx}{\sqrt{64 - x^2}}$

3. a) $dy = 0{,}6$; $\Delta y = 0{,}63$; erro $= 0{,}03$.

b) $dy = 0{,}3$; $\Delta y = 0{,}271$; erro $= -0{,}029$.

c) $dy = -0{,}00250$; $\Delta y = -0{,}00248$; erro $= 0{,}00002$.

d) $dy = -0{,}00333$; $\Delta y = -0{,}00337$; erro $= -0{,}0067$.

e) $dy = -0{,}0166$; $\Delta y = -0{,}0165$; erro $= -0{,}0331$.

2. a) 10,05 b) 3,009 c) 1,958 d) 2,03 e) 0,508

f) 0,205 g) 0,485 h) 0,965 i) 1,2 j) -0,045

l) 0,81.

4. 0,21 m^3

5. a) 6,75cm^3; b) 0,3cm^2

6. - 4%.

7. a) $(336x^5 - 12x^2 - 30\, x^{-4})\, dx^2$ b) $-(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx^2$

c) $4(1 - 3x^2)(2x^2 + 1)^{-2}\, dx^2$ d) $4e^{-2x^2}(4x^2 - 1)\, dx^2$

e) $e^{-x}(x^2 - 4x + 2)\, dx^2$ f) $-2x(1 + x^2)^{-2}\, dx^2$

g) $\left(-\operatorname{sen} x\, Lx + \dfrac{2\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) dx^2$

h) $-(x + 1)(-x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}}\, dx^2$ i) $\dfrac{2}{L3}\,(\operatorname{cotg} x^2 - 2x^2\operatorname{cossec}^2 x^2)dx^2$

j) $2^{x^3+2x}\, L2(6x + (3x^2 + 2)^2 L2)dx^2$

l) $(x + 2)^{x-2}\left\{[(x + 2)L(x + 2)]^2 + 2x(x + 2)L(x + 2) + x^2 +\right.$
$\left. + x + 4\right\} dx^2$

m) $(2Lx - 3)x^{-3}\, dx^2$

CAPÍTULO 4.

EXERCÍCIOS 4.1.

1. f não é diferenciável em 0 ε (-1,1).

2. f não é diferenciável em 1 ε (0,2).

3. a) 2 b) - 3 c) 0 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $(6 - \sqrt{48})/6$

4. a) 2 b) 2 c) 2 d) $\pm$ 0,62 e) f não é contínua nem diferenciável em 1 e 1 ε (0,2) f) f não é diferenciável em 3 ε (-1,4).

6. a) 1 b) 0 c) -1 d) 0

EXERCÍCIOS 4.2.

1. a) crescente em $(-\infty, -\frac{7}{8}]$; decrescente em $[-\frac{7}{8}, +\infty)$; $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{7}{8}$.

   d) crescente em $[\frac{3}{4}, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, \frac{3}{4}]$; $f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{4}$.

   c) crescente em $(-\infty, -2]$ e $[\frac{5}{3}, +\infty)$; decrescente em $[-2, \frac{5}{3}]$; $f'(x) = 0 \iff x \in \{-2, \frac{5}{3}\}$

   b) crescente em $[0, \frac{16}{5}]$; decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[\frac{16}{5}, +\infty)$; $f'(x) = 0 \iff x = \frac{16}{5}$.

   e) crescente em $[-\sqrt{3}, 0]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[0, \sqrt{3}]$; $f'(x) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

   f) crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$: decrescente em $[-1, 0)$ e $(0, 1]$; $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

2. a) $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ b) 0 c) $\nexists$ x.

3. a) $-\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{2}/2$ b) 2 c) $\nexists$ x.

EXERCÍCIOS 4.3.

1. a) 5; -3 b) 20; - 4/3 c) 1; -3 d) 4; -9/4.

5. a) 3/8 b) não existe c) 5/3 e −2 d) 3/2 e −7/3

e) 4 e −4 f) não existe.

EXERCÍCIOS 4.4.

1. a) mínimo: $f(-1) = -3$ b) mínimo: $f(0) = 0$; máximo$=f(\frac{16}{5}) \simeq 10,423$

c) mínimo: $f(1) = 4$; máximo: $f(-1) = -4$ d) mínimo: $f(0) = 1$

e) mínimo: $f(1) = 0$; máximo: $f(3/5) \simeq 0,346$ f) máximo: $f(1)=1$

g) mínimo: $f(\sqrt{3}) = -(6\sqrt{3})^{1/3}$; máximo: $f(-\sqrt{3}) = (6\sqrt{3})^{1/3}$

h) mínimo: $f(0) = 0$ i) mínimo: $f(3) = 6$; máximo: $f(-1) = -2$.

3. a) mínimo: $f'(1) = -8$; máximo: $f'(-1) = 8$; f' crescente em $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$; decresente em $[-1,1]$.

b) mínimo: $f'(\frac{2}{3}) = -\frac{16}{9}$; máximo: $f'(0) = 0$; f' crescente em $(-\infty,0]$ e $[\frac{2}{3},+\infty)$; decrescente em $[0,\frac{2}{3}]$.

4. $a = 3/4$, $b = 0$, $c= -9/4$ e $d= 1/2$.

5. $a = 1$, $b = 0$, $c = -8$, $d = 0$ e $e = 2$.

EXERCÍCIOS 4.5.

1. Convenção: CC = gráfico é côncavo para cima; CB = gráfico é côncavo para baixo; PI = abscissas dos pontos de inflexão.

a) CB em $(-\infty,2/3)$; CC em $(2/3,+\infty)$; PI $= 2/3$.

c) CB em $(-\infty,-10/3)$; CC em $(-10/3,+\infty)$; PI $= -10/3$.

b) CB em $(0,2/3)$; CC em $(-\infty,0)$ e $(2/3,+\infty)$; PI $= 0$ e $2/3$.

d) CB em $(-\infty,-\sqrt{6}/3)$ e $(\sqrt{6}/3,+\infty)$; CC em $(-\sqrt{6}/3,\sqrt{6}/3)$; PI $= \pm\sqrt{6}/3$

e) CB em $(12,+\infty)$; CC em $(0,12)$; PI $= 12$.

f) CB em $(-\infty,-\sqrt{3})$ e $(0,\sqrt{3})$; CC em $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},+\infty)$; PI$=0$ e $\pm\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS 4.6.

1. a) ver 4.5. a; máximo: $f(1/3) = 31/27$; mínimo: $f(1) = 1$.

b) não há extremos relativos; CB em $(0,+\infty)$; CC em $(-\infty,0)$; ; PI $= 0$.

c) máximo: $f(-4/3) \simeq 7,27$; mínimo: $f(0) = 0$; CB em $(-\infty,0)$ e $(0,2/3)$; CC em $(2/3,+\infty)$; PI $= 2/3$.

d) ver 4.5. e; mínimo: $f(4) = 4$.

e) mínimo: $f(-2) \approx -7,55$; CB em $(0,4)$; CC em $(-\infty,0)$ e $(4,+\infty)$; ; PI $= 0$ e 4.

f) mínimo: $f(3) = -17$; CB em $(0,2)$; CC em $(-\infty,0)$ e $(2,+\infty)$; ; PI $= 0$ e 2.

EXERCÍCIOS 4.7.

1. 20, −20.
2. base: 2m; altura: 1m.
3. $5\sqrt{5}$ m $\approx$ 11,2 m
4. 10,95" x 8,21"
6. (1,2)
7. 15 horas
8. O tanque deve ser esférico com raio $\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$

CAPÍTULO 5.

EXERCÍCIOS 5.2.

1. a) 1 b) 0 c) 0 d) e^{-2} e) e^{-1} f) e^{-1} g) 1 h) $-n/2$

   i) 1 j) e^{-1} k) $L(a/b)$ l) 0

2. $f''(x)$.

CAPÍTULO 6.

EXERCÍCIOS 6.2.

1. a) $x + \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.\dfrac{x^7}{7} + \ldots$

   b) $\cos 1 - (\operatorname{sen} 1)x - \dfrac{\cos 1}{2!}x^2 + \dfrac{\operatorname{sen} 1}{3!}x^3 + \dfrac{\cos 1}{4!}x^4 - \ldots$

2. a) $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$

BIBLIOGRAFIA

1. DEMIDOVICH, B. - Problems in Mathematical Analysis - Mir Publishers.

2. LEITHOLD, L. - O Cálculo com Geometria Analítica (Volume 1), 1977 - Editora Harper & Row do Brasil Ltda.

3. MUNEM, M.A. & D.J. FOULIS - Cálculo (Volume 1), 1978 - Editora Guanabara Dois S.A.

4. PIMENTEL GOMES, F. & I.R. NOGUEIRA - Análise Matemática 1980.

5. PISKUNOV, N. - Differential and Integral Calculus - Peace Publishers.

6. PROTTER, M.H. & C.B. MORREY, Jr. - Calculus with Analytic Geometry, 1963 - Addison -Wesley Publishing Company, Inc.

7. SWOKOWSKI, E.A. - Cálculo com Geometria Analítica (Volume 1), 1983 - Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda.

8. WYLIE, Jr., C.R. - Calculus, 1953 - McGraw-Hill Book Company, Inc.

$$y = \frac{2x}{5x+2} - \frac{1}{5x+2}$$

$$2\left(\frac{2x+1}{2-5x}\right) \qquad \frac{9x}{2-5x}$$

$$(5x+2)\cdot y = 2x-1$$

$$5x+2 = \frac{2x-1}{y}$$

$$5x = \frac{2x-1}{y} - 2$$

$$5x - \frac{2x}{y} = -\frac{1}{y} - 2$$

$$\frac{\frac{4x+1}{2-5x} - 1}{2 - \left(\frac{10x+5}{2-5x}\right)} = \frac{\frac{4x+2}{2-5x} - \left(\frac{2-5x}{2-5x}\right)}{}$$

$$3\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$2 - \frac{10x-5}{2-5x}$$

$$\frac{4-10x}{2-5x} - \frac{10x-5}{2-5x}$$

$$\frac{\frac{4x+2}{2-5x} - 1}{2 - \left(\frac{10x+5}{2-5x}\right)}$$

$$\frac{\frac{4x+\cancel{2}-\cancel{2}+5x}{\cancel{2-5x}}}{\frac{4-10x-10x-5}{\cancel{2-5x}}} = \frac{9x}{-1}$$