1. Considere o valor inicial para a equação das ondas
$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$
Sejam u_1 e u_2 as soluções correspondentes aos dados ϕ_1, ψ_1 e ϕ_2, ψ_2, respectivamente. Mostre que para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty + T\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$
onde
$$\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \qquad \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x),$$
ou seja, uma pequena alteração nos dados causa uma pequena alteração nas soluções, pelo menos durante um intervalo de tempo fixo, mostrando que a solução depende continuamente dos dados ϕ e ψ.

2. Considere o problema de valor inicial e de fronteira para a equação de difusão
$$\begin{aligned} &u_t - k u_{xx} = f(t,x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < l \\ &u(0,t) = g(t),\ u(l,t) = h(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$
Sejam u_1 e u_2 soluções desse problema e seja $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Mostre que
$$\int_0^l [w(x,y)]^2\, dx = 0, \quad \forall\, t > 0. \tag{1}$$
Uma vez que (1) seja demonstrado, $u_1 \equiv u_2$. Assim, este exercício fornece um método alternativo ao uso do princípio do máximo para provar a unicidade de soluções para problemas de valor inicial e de fronteira para a equação da difusão.

[Sugestão: w satisfaz $w_t - kw_{xx} = 0$ e $(w_t - kw_{xx})w = (\frac{1}{2}w^2)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2$.]

3. O ponto médio de uma corda de piano de tensão T, densidade ρ e comprimento l é atingido por um martelo cujo diâmetro da cabeça é $2a$. Uma mosca está pousada à distância $l/4$ de uma extremidade. (Assuma que $a < l/4$; caso contrário, pobre mosca!) Quanto tempo demora para a perturbação chegar até a mosca?

4. (A corda dedilhada) Considere a corda infinita com velocidade inicial $\psi(x) = 0$ e posição inicial
$$\phi(x) = \begin{cases} b - \dfrac{b|x|}{a}, & |x| < a \\ 0, & |x| \ge a \end{cases}$$
Esboce o perfil da corda (u versus x) em cada um dos os instantes sucessivos $t = 0$, $t = a/2c$, a/c, $2a/2c$ e $3a/c$.

[Sugestão: decomponha o semiplano xt com $t \ge 0$ nas seis regiões determinadas pelas retas características emanadas dos pontos $(-a,0)$ e $(a,0)$.]

5. (O golpe do martelo) Considere a corda infinita com posição inicial $\phi(x) = 0$ e velocidade inicial $\psi(x) = 1$ para $|x| < a$ e $\psi(x) = 0$ para $|x| \ge a$. Esboce o perfil da corda (u versus x) em cada um dos os instantes sucessivos $t = a/2c$, a/c, $3a/2c$, $2a/c$ e $5a/c$.

[Sugestão: decomponha o semiplano xt com $t \ge 0$ nas seis regiões determinadas pelas retas características emanadas dos pontos $(-a,0)$ e $(a,0)$.]

6. No Exercício 5, encontre o maior deslocamento, $\max_x u(x,t)$, como uma função de t .

7. Se $u(x,t)$ satisfaz a equação das ondas $u_{tt} = u_{xx}$, prove a identidade

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h)$$

para todo x, t, h e k. Esboce o quadrilátero Q cujos vértices são os argumentos de u na identidade.

Esta identidade mostra que conhecendo o valor de u em três de um quadrilátero característico é possível portanto calcular seu valor no quarto vértice.

8. (princípio do máximo). Seja u a solução para o problema

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0\\
&u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1,\\
&u(0,t) = 2te^{1-t},\ u(1,t) = 1 - \cos \pi t, \quad t > 0
\end{aligned}$$

   (a) Prove que u é não negativa.

   (b) Encontre um limite superior para os valores de $u(1/2, 1/8)$ e $u(1/2, 3)$.

9. Considere a equação de difusão $u_t = u_{xx}$ $(0,1)$, para $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$, com $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e $u(x,0) = 1 - x^2$. Observe que esta função inicial não satisfaz a condição de contorno na extremidade esquerda, mas que a solução irá satisfazê-la para todo $t > 0$.

   (a) Mostre que $u(x,t) > 0$ em todos os pontos internos $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$.

   (b) Para cada $t > 0$, seja $\mu(t) = \max\{u(x,t), 0 \le x \le 1, t > 0\}$. Mostre que $\mu(t)$ é uma função decrescente (ou seja, não crescente) de t. (Dica: seja $X(t)$ o máximo, de modo que $\mu(t) = u(X(t),t)$. Derive $\mu(t)$, supondo que $X(t)$ é diferenciável.)

   (c) Desenhe um esboço do gráfico (u versus x) em alguns instantes. (Se você tiver um software apropriado disponível, use-o.)

10. Considere a equação de difusão $u_t = u_{xx}$, para $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$, com $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e $u(x,0) = 4x(1-x)$.

   (a) Mostre que $0 < u(x,t) < 1$ para todo $t > 0$ e $0 < x < 1$.

   (b) Mostre que $u(x,t) = u(1-x,t)$ para todo $t \ge 0$ e $0 \le x \le 1$.

   (c) Use o método da energia para mostrar que $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx$ é uma função de t estritamente decrescente.

11. Considere a equação de difusão em $(0,l)$ com as condições de contorno de Robin $u_x(0,t) - a_0 u(0,t) = 0$ e $u_x(l,t) + a_l u(l,t) = 0$. Se $a_0 > 0$ e $a_l > 0$, use o método da energia para mostrar que os pontos $x = 0$ e $x = l$ contribuem para a diminuição de $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx$. (Isto é interpretado como significando que parte da energia é perdida na fronteira, então chamamos as condições de fronteira radiantes ou dissipativas.)

12. Resolva a equação de difusão $u_t = ku_{xx}$ com a condição inicial $u(x,0) = x^2$ pelo seguinte método especial. Primeiro mostre que u_{xxx} satisfaz a equação de difusão com condição inicial zero. Portanto, por unicidade, $u_{xxx} \equiv 0$. Conclua que $u(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. Finalmente, é fácil resolver para A, B, e C substituindo no problema original.

13. (a) Resolva o Exercício 12 usando a fórmula geral da solução para o problema de difusão na reta toda. Isso expressa $u(x,t)$ como uma certa integral. Substitua $p = (x-y)/\sqrt{4kt}$ nesta integral.

(b) Como a solução é única, a fórmula resultante deve concordar com a resposta do Exercício 12. Deduza o valor de
$$\int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-p^2}\, dp.$$

14. Seja ϕ uma função contínua tal que $|\phi(x)| \leq Ce^{ax^2}$. Mostre que a fórmula para a solução da equação de difusão na reta toda com dado inicial ϕ faz sentido para $0 < t < 1/(4ak)$. [Este exercício fornece uma condição necessária para a existência local do problema de valor inicial para a equação de difusão.]