"Noções de Estatística"
disciplinas MAE0116 e MAE0110 da USP
Assuno da aula: PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA
Assunto desta série de transparências: PROBABILIDADE CONDICIONAL

Ministrante Prof. Dr. Vladimir Belitsky, IME-USP

1 de abril de 2023

Considere

Experimento aleatório "dado pintado": As faces 1, 2 e 3 de um dado equilibrado são pintadas de branco, e as faces 4, 5, e 6 de azul. Lança-se o dado e observa-se o número e a cor da face superior.

Imagine: O dado foi lançado, e um aluno da última fileira da sala viu que a face superior é azul.

Pergunta: Do ponto de vista deste aluno, qual a probabilidade que o número da face é par?

Sua resposta, sem dúvida, é: $\frac{2}{3}$.

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Exemplo que mostra que sua intuição já conhece a Probabilidade Condicional (continuação)

Para que possa revelar para você como funcionou sua própria intuição, preciso introduzir:

Evento $A =$ a cor do resultado é azul.

Evento $B =$ o número do resultado é par.

Então, você foi solicitado achar a probabilidade do evento B, mas não a probabilidade genuina dele, mas sim uma probabilidade "nova" que difere-se da probabilidade original devido ao fato que sabe-se que um serto evento A já aconteceu, ou, equivalentemente, mas com o uso da terminologia tradicional a ser empregada também aqui por nós, pede-se achar

a probabilidade condicional do evento B
sabendo (ou dado) que ocorreu o evento A.

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Sua intuição já conhece a Probabilidade Condicional (continuação)

Passo 1: Sua intuição distribuiu a probabilidade total (o valor 1, quer dizer) por igual entre todos os resultados que compõem o evento que ocorreu (denotado por A).

Passo 2: Depois, ela (a intuição) contou o número dos resultados que estão no evento em interesse (denotado por B) a também no evento que ocorreu.

Passo 3: A resposta final obtem-se como a soma das probabilidades definidas no Passo 1, dos resultados identificados no Passo 2.

Os três passos juntos expressam-se pela seguinte fórmula:

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Sua intuição já conhece a Probabilidade Condicional (continuação)

$$\boldsymbol{P}_{\text{nova, sob o conhecimento que } A \text{ ocorreu}}[B] =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{número dos resultados do } A, \\ \text{que estão também no evento } B \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\text{número dos resultados do } A} \right)$$

O que pode ser escrito da seguinte maneira (ao dividir o numerador e denuminador po 6):

$$= \begin{pmatrix} \text{número dos resultados do } A, \\ \text{que estão também no evento } B \end{pmatrix} /6 \times$$
$$\times \left(\frac{1}{(\text{número dos resultados do } A)/6} \right)$$

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Sua intuição já conhece a Probabilidade Condicional (continuação)

Mas recorde que lançamos um dados equilibrado, e portanto a probabilidade (original) de obter qualquer resultado era $1/6$. Portanto

$$\left(\begin{array}{l}\text{número dos resultados do } A,\\ \text{que estão também no evento } B\end{array}\right)/6 \;=\; \boldsymbol{P}\left[B \cap A\right]$$

e

$$(\text{número dos resultados do } A)/6 \;=\; \boldsymbol{P}\left[A\right]$$

Descobrimos então que na resposta produzida pela sua intuição há relação entre a a probabilidade NOVA e a probabilidade ORIGINAL; eis essa:

$$\boldsymbol{P}_{\text{nova, sob o conhecimento que } A \text{ ocorreu}}\left[B\right] =$$

$$= \frac{\boldsymbol{P}[B \cap A]}{\boldsymbol{P}[A]}$$

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Definição científica e seu uso.

Na realidade, em todas as situações nas quais sua intuição consegue produzir a resposta, e, ao mesmo tempo, eu consigo acompanhar o raciocínio de sua intuição, se vê que

$$\boldsymbol{P}_{nova}\left[B\right] = \frac{\boldsymbol{P}\left[B \cap A\right]}{\boldsymbol{P}\left[A\right]}$$

Então, os cientistas introduzem a probabilidade "nova" via a fórmula que "bate" com a intuição. A fórmula está abaixo. Nela o simbolo $\boldsymbol{P}_{nova}[\cdot]$ foi substituido por $\boldsymbol{P}\left[\cdot \;\middle|\; A\right]$, que é melhor pois ele carrega a informação sobre o evento que já aconteceu. Eis a fórmula:

$$\boldsymbol{P}\left[B \;\middle|\; A\right] = \frac{\boldsymbol{P}\left[B \cap A\right]}{\boldsymbol{P}\left[A\right]}$$

Eis a expressão verbal dela: "a probabilidade condicional de acontecer B sabendo que aconteceu A defina-se como a fração entre a probabilidade de $B \cap A$ e a probabilidade de A".

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Definição científica.

Definição *(de probabilidade condicional).*

Seja Ω a coleção de todos os resultados de um experimento aleatório e seja $\boldsymbol{P}$ a correspondente probabilidade definida em tais resultados. Seja A um evento tal que $\boldsymbol{P}[A] \neq 0$.
A probabilidade atribuída ao resultados de Ω ao saber que no experimento aleatório aconteceu o evento A chama-se **probabilidade condicional sabendo (ou dado) que ocorreu (ou aconteceu)** A; ela denota-se por $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$. Os valores que essa probabilidade atribui aos resultados de Ω obedecem à seguinte fórmula:

$$\mathbb{P}\big[B \,\big|\, A\big] = \frac{\boldsymbol{P}\,[B \cap A]}{\boldsymbol{P}\,[A]}, \text{ para cada evento } B \tag{1}$$

(Na fórmula acima, a notação $\mathbb{P}[\cdot \mid A]$ é aquela que foi introduzida 3 linhas acima, enquanto que $\boldsymbol{P}$ refere-se à probabilidade mencionada no início dessa definição; as vezes, ela adquira o nome "probabilidade incondicional" para reforçar o fato de que ela é diferente da probabilidade condicional. Se no lugar de B colocar o evento composto de um resultado só, então a fórmula (1) fornecerá a probabilidade condicional desse resultado.)

Abaixo, em (1)-(6), apresento o esquema que mostra como surge a probabilidade condicional e o que deve ser feito para achar seu valor.

(1) Imagine que há um experimento aleatório. Usaremos $\Omega, \boldsymbol{P}$ como a notação para seu modelo probabilístico; quer dizer, imagine que descobrimos o conjunto de todos os seus resultados possíveis e o codificamos obtendo o conjunto Ω, e imagine que atribuimos probabilidade a cada elemento de Ω, e seja essa denotada por $\boldsymbol{P}$. Para melhor compreenção da exposição subsequente, é bom que você imagina que Ω e $\boldsymbol{P}$ foram construídos antes do experimento aleatório acontecer.

(2) Imagine que o experimento aleatório aconteceu por completo. Isso significa que o experimento resultou em um dos seus resultados possíveis. Entretanto, imagine que – por alguma razão – não conseguimos enxergar esse resultado, e só sabemos que ele pertence a um conjunto A (naturalmente A é um subconjunto do Ω do qual falamos acima).

(3) Imagine que – por alguma razão – escolhemos um subconjunto de Ω, denotamos-o por B, e desejamos saber se o resultado do experimento aleatório está no B ou não. Como tal pergunta involve incerteza, podemos responder dando a probabilidade para que o resultado esteja no B. Só que nada garante que tal probabilidade pode ser medida por $\boldsymbol{P}$ do modelo probabilístico supramencionado; isso porque $\boldsymbol{P}$ correspondia à incerteza inicial, enquanto que agora nós temos uma informação adicional que – recordo-lhe – diz: “o resultado está no A”.

(4) Então, por certo, estamos perante um novo experimento aleatório (realço que incerteza pode ser medida por probabilidade, e é isso que permite formular em termos dum problema relacionado ao experimento aleatório adequado a pergunta “o resultado obtido está em B, se sabe-se que está em A?”, que foi levantada no item(3) acima). Poderiamos construir o Ω_{novo} e $\boldsymbol{P}_{novo}$ que são adequados para o novo experimento aleatório, e poderiamos dar a resposta àquela pergunta em forma de $\boldsymbol{P}_{nova}[B]$.

Prob. Condicional $\longrightarrow$ Definição científica e seu uso (continuação).

(5) Entretanto, a construção de Ω_{novo} e $\boldsymbol{P}_{novo}$ ´disnecessária pois há fórmula que permite calcular $\boldsymbol{P}_{nova}[B]$ com o uso de $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}\left[B \;\middle|\; A\right] = \frac{\boldsymbol{P}\left[B \cap A\right]}{\boldsymbol{P}\left[A\right]}$$

(Nessa fórmula, a notação $\boldsymbol{P}_{nova}[\cdot]$ está substituíd pela notação $\boldsymbol{P}\left[\cdot \;\middle|\; A\right]$, a qual é melhor por ser mais informativa, pois nela figura o evento sobre cuja ocorrência tem-se certeza; em ambas as notações, "$\cdot$" marca o lugar aonde "enfia-se" o evento cuja probabilidade está em interesse.)

(6) Deve ser esclarecido para você, que a presença de duas probabilidades, diferentes entre si, na fórmula do item (5) não causa dificuldades no uso da fórmula quando toda a história desenrola-se perante os olhos do usuário na sequencia (1)-(5) exposta acima. Entretanto, nos exercícios de livro-texto e em situações reais, frequentemente pergunta-se diretamente a probabilidade "nova"; nesses caso, você precisa "reconstruir" o experimento aleatório original...

(6)–continuação – ... (isto é, o experimento aleatório descrito no item (1) acima); essa reconstrução é o que garantirá a contrução de Ω e $\boldsymbol{P}$. Vale ainda notar uma coisa curiosa: você facilemtne concordou comigo que $\boldsymbol{P}$ é necessário pois essa $\boldsymbol{P}$ está na fórmula que será usada, já quando à necessidade para a construção de Ω, você deixo ela no segundo plano. Isso está errado por duas razões: a primeira é que sem Ω naõ se constroi $\boldsymbol{P}$, mas há a segunda razão – e a omissão dessa causa muitos erros em soluções de problemas relacionados à probabilidade condicional –, a razão é que os venetos A e B não podem ser descritos corretamente sem ter Ω.

Resumindo sobre as dificuldades que lhe esperam na solução d eproblemas envolvendo a probabilidade condicional, eis essas:

(a) enchergar que a pergunta é sobre a probabilidade condicional;

(b) identificar o evento que aconteceu (A) e o evento cuja probabilidade está em questão (B);

(c) calcular $\boldsymbol{P}[B \cap A]$ e $\boldsymbol{P}[A]$ mas não na perspectiva daquilo que aconteceu, e sim na perspectiva de antes de acontecer (o que é experimento aleatório diferente, se for falar com todo rigor).

EXEMPLO Numa urna há 100 bolas do mesmo tamanho. 60 delas são vermelhas e outras 40 são brancas. Das vermelhas, 25 têm marcadas o número I e 35 têm o número II; das bolas brancas, 10 têm marcadas o número I e 30 têm número II. Professor Vladimir retirou ao acaso uma bola da urna e a mostrou para os alunos da sala. Um aluno, que estava na última fileira da sala, de lá percebeu que a bola retirada era vermelha, mas não era possível identificar o número nela escrito. Perguntamos ao leitor: colocando-se na situação desse aluno, qual é a probabilidade de que a bola retirada tenha o número I?

Probabilidade Condicional.

Exemplo.

Solução. Note, este experimento aleatório é simples (na classificação minha de experimentos aleatórios apresentada na aula anterior). Seu espaço amostral:

$$\Omega = \Big\{(\text{vermelho com I}),\ (\text{vermelho com II}),\ (\text{branco com I}),\ (\text{branco com II})\Big\}$$

$$\boldsymbol{P}\Big[(\text{vermelho com I})\Big] = \frac{\text{número de bolas vermelhas com I}}{\text{número total de bolas}} = \frac{25}{100} \tag{2}$$

e de modo semelhante, obtém-se que

$$\boldsymbol{P}\Big[(\text{vermelho com II})\Big] = 0.35,$$

$$\boldsymbol{P}\Big[(\text{branco com I})\Big] = 0.1,$$

$$\boldsymbol{P}\Big[(\text{branco com II})\Big] = 0.2$$

Introduziremos agora duas notações:

$$\begin{array}{l} \text{o evento ``escolher bola de cor vermelha'' designamos pela letra } A, \\ \text{o evento ``escolher bola com número I'' designamos pela letra } B \end{array} \tag{3}$$

Com estas, nosso problema é:

$$\text{achar a probabilidade de ocorrência de } B \text{ sabendo que ocorreu } A \tag{4}$$

A nossa resposta intuitiva (baseada no princípio de simetria) é:

$$\frac{\text{número de bolas vermelhas com número I}}{\text{número de bolas vermelhas}} = \frac{25}{60}.$$

Probabilidade Condicional.

Exemplo.

Eis a abordagem formal:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\left[B \,\middle|\, A\right] &= \frac{\boldsymbol{P}[B \cap A]}{\boldsymbol{P}[A]} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[(vermelha, I)]}{\boldsymbol{P}[(vermelha, I)] + \boldsymbol{P}[(vermelha, II)]} \\
&= \frac{\left(\frac{\text{número de bolas vermelhas com número I}}{\text{número total de bolas}}\right)}{\left(\frac{\text{número de bolas vermelhas}}{\text{número total de bolas}}\right)} \qquad (5) \\
&= \frac{25}{60}
\end{aligned}$$

Observe que, como de era se esperar, a solução formal bateu com a de nossa intuição, que responder

$$\frac{\text{número de bolas vermelhas com número I}}{\text{número de bolas vermelhas}}$$

por que a fórmula usada foi feita de acordo com a concepção intuitiva do conceito "probabilidade condicional".

EXEMPLO. Professor Vladimir volta para casa da USP pela Rodovia Raposo Tavares ou pela Rodovia Castelo Branco, sendo que a primeira é escolhida com a probabilidade 0,7 e a segunda com a probabilidade 0,3. A Rodovia Raposo Tavares tem probabilidade 0,05 de ter trânsito parado, enquanto que na Rodovia Castelo Branco essa probabilidade é 0,2.
Certo dia Vladimir se atrasou para jantar e sua esposa resolveu ir a seu encontro, levando-lhe o jantar, pois sabia que seu marido estava faminto. Ajude a esposa a decidir em qual das duas rodovias há mais chances de encontrar o professor Vladimir.

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

Apresento abaixo a **solução profana**. Aviso: ela funciona bem nesse caso em em alguns casos semelhantes devido à sua simplicidade, pois a solução ampara-se na intuição e na expressão dessa via um desenho. Em geral, esse método (intuição+desenho) pode falhar (e geralmente, falha mesmo!). Por isso, aconselho que a solução esteja feita de acordo com a método que usa a fórmula para a probabilidade condicional.

Tudo que pode acontecer, ou seja, todos os casos possíveis, formam 100%. Representemos esquematicamente esses casos por um retângulo. Sabemos, a partir do enunciado, que em 70% de casos Vladimir toma a Raposo, enquanto que em 30% de casos ele toma a Castelo. Portanto, nesse esquema, dividimos todo o retângulo em partes correpsondentes a 70% e 30% e as marcamos por “escolher Raposo”e “escolher Castelo”.

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

Sabemos que em 5% dos casos em quais tomou Raposo, ele fica parado no trânsito, portanto ele fica parado no trânsito da Raposo em $70\% \times 5\% = 3{,}5\%$ de todos os casos. Tiramos uma fatia da parte “escolher a Raposo”do retângulo, de maneira que a área dela seja 3,5% de tudo; isso feito, hachuramos essa fatia. Sabemos também que fica parado no trânsito em 20% dos casos em que tomou a Castelo. Portanto, fica parado no trânsito na Castelo em $30\% \times 20\% = 6\%$ de todos os casos. Tiramos uma fatia da parte “escolher a Castelo”do retângulo, da maneira que a sua área seja 6% de tudo, e hachuramos essa fatia.

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

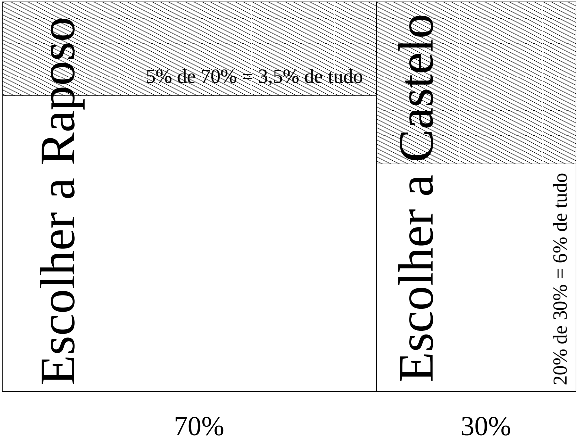


Figura: Problema “Esposa”

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

Agora, acompanhemos o pensamento da esposa: ela sabe que Vladimir ficou no trânsito. Isso significa que aconteceu um dos casos da área hachurada, a qual corresponde agora aos 100% de tudo que pode ter acontecido a Vladimir. Não se sabe se Vladimir está parado na Raposo ou na Castelo, mas

$$\frac{\text{a chance (condicional) de estar na Raposo}}{\text{a chance (condicional) de estar na Castelo}} = \frac{3,5\%}{6\%} \tag{6}$$

Daí, aplicando a regra de três

$$\text{a chance (condicional) de estar na Raposo} = \frac{3,5\%}{3,5\% + 6\%}, \tag{7}$$

$$\text{a chance (condicional) de estar na Castelo} = \frac{6\%}{3,5\% + 6\%} \tag{8}$$

A chance (condicional) de estar na Castelo é maior, e por isso é mais razoável a esposa levar o jantar seguindo pela Castelo.

Probabilidade Condicional.

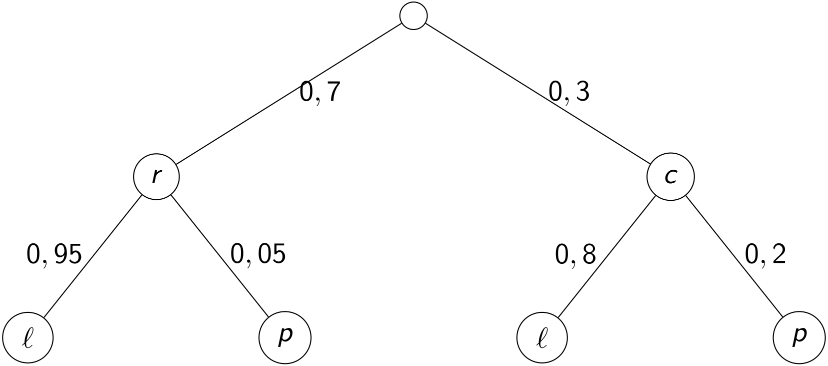
Exemplo “Esposa”’.

Aviso que fui eu quem acrescentou a palavra “(condicional)” onde precisava, pois sem essa palavra a solução pode criar serta confusão na mente daqueles que tentam entendé-la. Os quem inventaram essa solução e apresnetaram para mim, não usavam “condicional” para marcar o fato que tratava-se de probabilidade condicional.

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

Apresentaremos agora **a solução formal**, que **não falha**. O primeiro passo é a construção do modelo probabilístico. Esse é feito com auxílio do seguinte diagrama de árvore:



Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”'.

O diagrama de árvore indica a maneira seguindo a qual intepretamos o enunciado: na primeira etapa, Vladimir escolha a rodovia, e na segunda etapa, o D-us “lança seu dado” para decidir se haverá trânsito parado ou não. As letras r e c, usadas na codificação dos resultados da primeira etapa, significam “escolher Raposo” e “escolher Castello”, respectivamente. As letras p e ℓ, usadas na segunda etapa, significa “transito parado” e “transito livre”.

Do diagrama segue-se o modelo probabilístico do experimento aleatório:

$$\Omega = \{(r,p),\, (r,\ell),\, (c,p),\, (c,\ell)\} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}[(r,p)] = 0,7 \times 0,05,\ \boldsymbol{P}[(r,\ell)] = 0,7 \times 0,95$$
$$\boldsymbol{P}[(c,p)] = 0,3 \times 0,2,\ \boldsymbol{P}[(c,\ell)] = 0,3 \times 0,8$$

Probabilidade Condicional.

Exemplo "Esposa"'.

Agora, introduzimos os eventos com os quais faremos cálculos adequados para a esposa decidir acerca da rodovia na qual há mais chances de encontrar o Vladimir, quando sabe-se que ele está travado no tránsito:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \text{“Vladimir escolher a Raposo”} = \{(r,p),\ (r,\ell)\} \\ \mathcal{C} &= \text{“Vladimir escolher a Castelo”} = \{(c,p),\ (c,\ell)\} \end{aligned} \tag{10}$$

e introduzimos outros dois eventos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{“ter trânsito livre”} = \{(r,\ell),\ (c,\ell)\} \\ \mathcal{P} &= \text{“ter trânsito parado”} = \{(r,p),\ (c,p)\} \end{aligned} \tag{11}$$

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Esposa”’.

Eu concordaria com qualquer um que reclamasse que a solução apresentada confunde a cabeça de um iniciante, pois r e $\mathcal{R}$ significam a mesma coisa de acordo com a solução (essa mesma coisa é “escolher Raposo”). Devo lhe dizer que essa duplicidade aconteceria em qualquer outra situação. Pense, por exemplo, no experimento aleatório de duas etapas, composto por três urnas com bolas brancas e pretas, sendo que uma das urnas está usada na primeira etapa, e uma das outras duas está usada na segunda etapa, sendo que a escolha da urna guia-se pela cor da bola retirada na primeira etapa. Nesse caso $B = \{(b, b), (b, p)\}$ é o evento “na 1-a etapa está vista bola branca”, enquento que “b” no primeiro lugar do código também interpreta-se “na 1-a etapa está vista bola branca”. Para separar os conceitos, o que ajuda é a concepção de que um deles faz só uma parte da codificação, enquanto que o outro é um gunuino subconjunto de Ω.

Agora, convido você a concordar que o problema da esposa é comparar

$$\boldsymbol{P}[\mathcal{R} \,|\, \mathcal{P}] \text{ com } \boldsymbol{P}[\mathcal{C} \,|\, \mathcal{P}]$$

Pela fórmula, tem-se:

$$\boldsymbol{P}\left[\mathcal{R} \,|\, \mathcal{P}\right] = \frac{\boldsymbol{P}[\mathcal{R} \cap \mathcal{P}]}{\boldsymbol{P}[\mathcal{P}]} = \frac{\boldsymbol{P}[(r,p)]}{\boldsymbol{P}[(r,p)] + \boldsymbol{P}[(c,p)]} =$$
$$= \frac{0{,}7 \times 0{,}05}{0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}2} = \frac{0{,}035}{0{,}035 + 0{,}06}$$

Probabilidade Condicional.

Exemplo "Esposa"'.

$$\boldsymbol{P}\left[\mathcal{C}\,|\,\mathcal{P}\right] = \frac{\boldsymbol{P}[\mathcal{C}\cap\mathcal{P}]}{\boldsymbol{P}[\mathcal{P}]} = \frac{\boldsymbol{P}[(c,p)]}{\boldsymbol{P}[(r,p)]+\boldsymbol{P}[(c,p)]} =$$
$$= \frac{0{,}3\times0{,}2}{0{,}7\times0{,}05+0{,}3\times0{,}2} = \frac{0{,}06}{0{,}035+0{,}06}$$

A conclusão então é que com a informação de que Vladimir está parado no trânsito, a probabilidade dele estar na Rodovia Castello Branco é maior que a de estar na Rodovia Raposo Tavares.
É curioso comparar os resultados advindo da solução rigoros com os da solução profana (recorde, os resultados pofanos estão em (7) e (8)) e ver que são a mesma coisa!
Acerca dessa coincidência, eu comentaria que em casos simples, como o do presnete exercício, os duas abordagens funcionam bem, e, portanto, não é de se estranhar que seus resultados finais são os mesmos. Entretanto, em situações mais complexas, a abordagem formal (a que usa a fórmula de probabilidade condicional) vai funcionar tal bem qual foi no casos simples, enquanto que a abordagem profana corre um sério risco de encontrar confusões na intuição que a guia, e, consequentemente, dar resultado errado.

Probabilidade Condicional.

Exemplo “Açougue”.

Um açougue será inagurado hoje e tem 50% de probabilidade de receber carne de um frigorífico contratado para seu abastecimento. A cada dia consecutivo, a probabilidade de haver carne no açougue depende somente do fato de ter havido carne ou não no dia anterior, obedecendo a seguinte regra: 60% de chances de encontrar carne no açougue se, no dia anterior, esse produto estava disponível, e 30% se, no dia anterior, ela estava em falta. Ao tomar conhecimento sobre a inaguração do açougue, uma dona de casa resolveu ir até ele daqui dois dias (equivalentemente, no terceiro dia após a inaguração).
Pergunta: Dado que a senhora não encontrou carne no açougue no terceiro dia, após a inaguração, ache a probabilidade de haver carne no dia anterior.