Monitoria 19/07

Revisão:

- Assíntota: Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$

dizemos que $y = mx + n$ é uma assíntota para f.

[Teor] f possui assíntota para $+\infty$ (ou $-\infty$) se e somente se, existe "m" real tal que

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \quad (1)$$

e existe "n" real tal

que $n = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - m\cdot x)$.

Exemple: $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[4]{1+1/x^2}}{\cancel{x}} = \underset{m}{\underset{\parallel}{1}} \checkmark$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[4]{1+1/x^2} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)}{1/x}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}} \cdot \left(-2 \cdot \dfrac{1}{x^3}\right)}{-1/x^2} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}} = 0.$$

f tem assíntota para $x \to +\infty$: $y = x$

Exemplo: $f(x) = \ln(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u} = 0 \overset{m}{''}$$

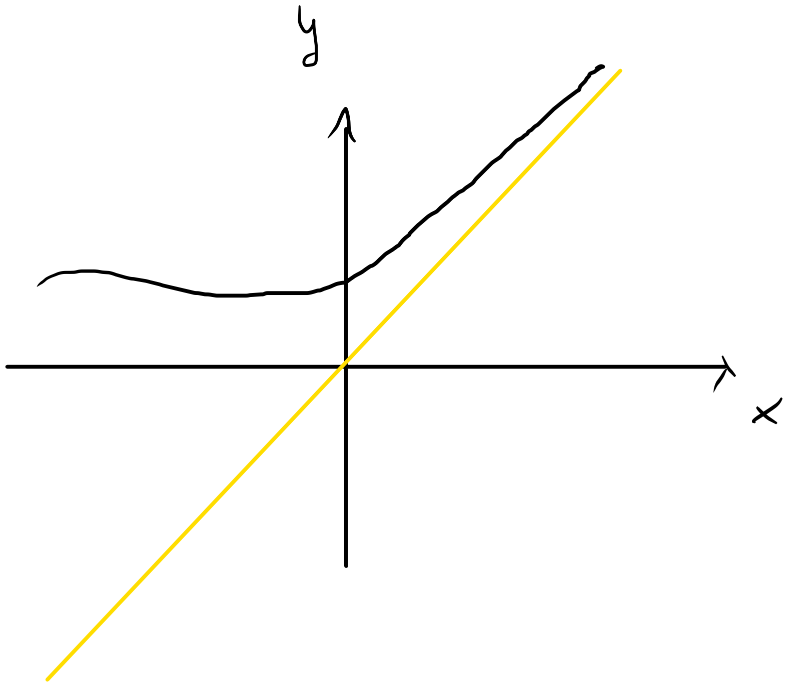
$u = \ln(x)$, $x \to +\infty$, $u \to +\infty$

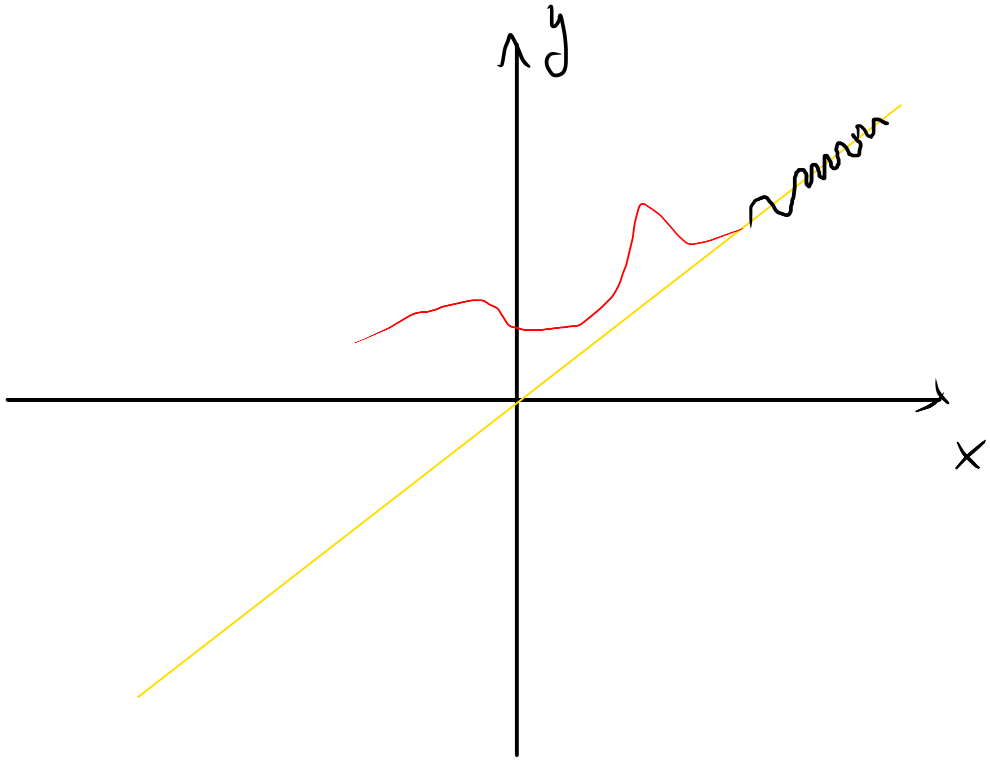
$x = e^u$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$\therefore$ f não tem assíntota para $+\infty$.

Exemplo: $f(x) = x + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$




y
x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} \right) = \overset{\overset{m}{\shortparallel}}{1}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \overset{\overset{n}{\shortparallel}}{0}.$$

$y = x$ é assintota p/ f em $x \to +\infty$.

– Máximos e Mínimos:

9.6:

Definição 1. Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo* de f em A ou que p um *ponto de máximo* de f em A se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em A. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A, dizemos então que $f(p)$ é o *valor mínimo* de f em A ou que p é *um ponto de mínimo* de f em A.

Definição 2. Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo global* de f ou que p é um *ponto de máximo global* de f se, para todo x em D_f, $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo x em D_f, $f(x) \geq f(p)$, diremos então que $f(p)$ é o *valor mínimo global* de f ou que p é um *ponto de mínimo global* de f.

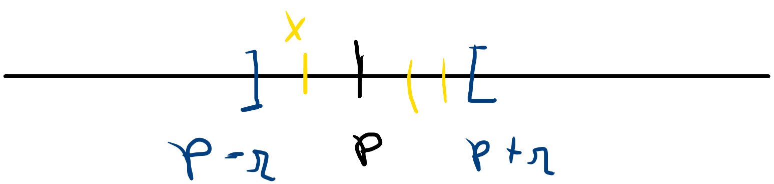
Definição 3. Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é *ponto de máximo local* de f se existir $r > 0$ tal que

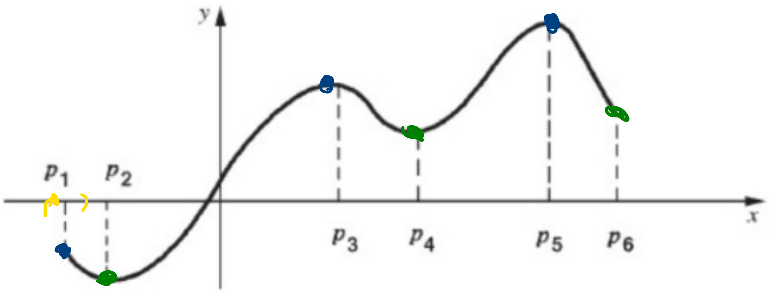
$$f(x) \leq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é *ponto de mínimo local* de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$.



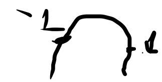


p_1, p_3 e p_5 são pontos de máximo local; $f(p_5)$ é o valor máximo global de f
p_2, p_4 e p_6 são pontos de mínimo local; $f(p_2)$ é o valor mínimo global de f

(9.6) Exercícios

1. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}}$$

$f'(x) > 0$ se $-1 < x < 1$

$f'(x) < 0$ se $x < -1$ ou $x > 1$

		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

-1: ponto de mínimo local

1: ponto de máximo local.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad ; \quad f(1) = \frac{1}{2} > 0$$

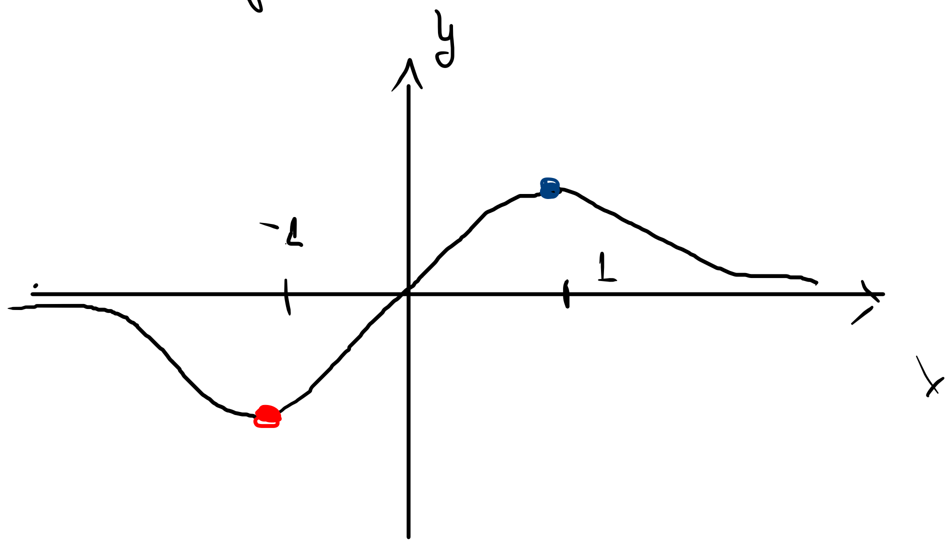
Se $x<0$, $f(x)<0$.

$\therefore$ 1 é ponto de máx. global.

Se $x > 1$, $f(x) > 0$.

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

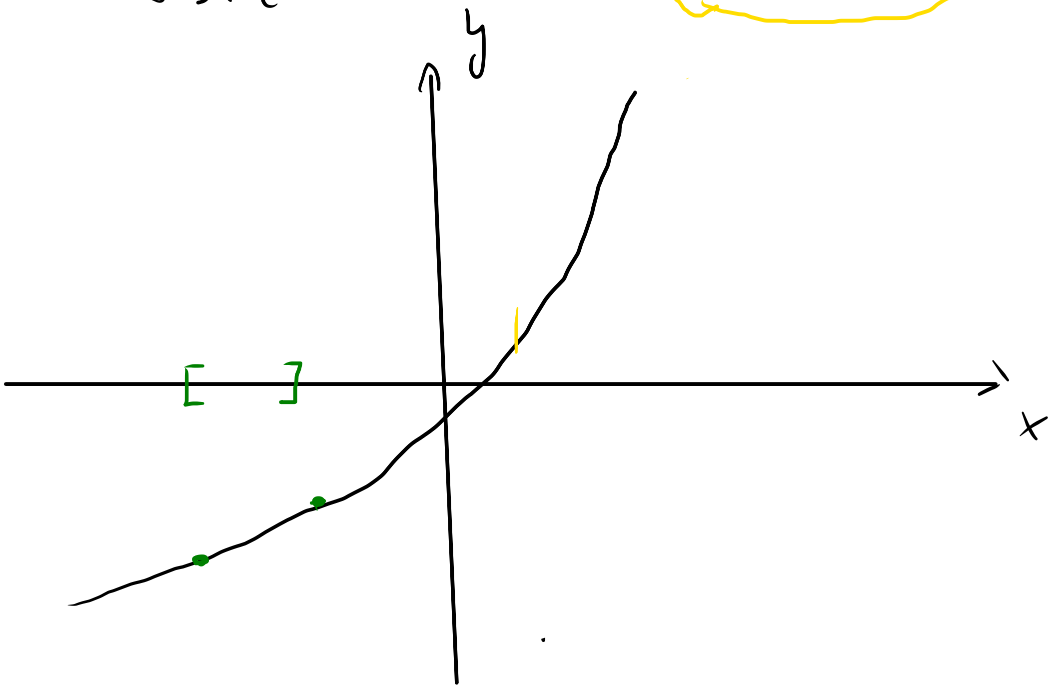
$\therefore -1$ é ponto de mínimo global



c) $f(x) = e^{x} - e^{-3x}$

$f'(x) = e^{x} + 3e^{-3x} > 0 \quad \forall x$

$\therefore$ f é estr. crescente em $\mathbb{R}$



Se x_0 fosse máx local, $\exists r>0$ tq

$\forall x \in \left]x_0-r, x_0+r\right[$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Mas f é estr. cresc., então,

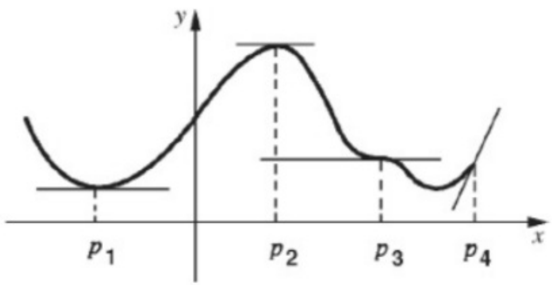
$f\left(x_0+\frac{r}{2}\right) > f(x_0)$, absurdo.

$\therefore f$ não possui máx. local (nem mínimo) *n*) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

14. Encontre o ponto da curva $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

9.7 - Condição necessária e condições suficientes para máximos e mínimos locais

Teorema 1. Seja f uma função derivável em p, em que p é um ponto interior a D_f. Uma *condição necessária* para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.



p_1 é o ponto de mínimo local: $f'(p_1) = 0$
p_2 é o ponto de máximo local: $f'(p_2) = 0$
$f'(p_3) = 0$, mas p_3 nem é ponto de máximo, nem de mínimo; p_3 é ponto de inflexão horizontal
p_4 é ponto de máximo local, mas $f'(p_4) \neq 0$;
p_4 não é *ponto interior*.

Teorema 2. Sejam f uma função que admite derivada de 2.ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local.

b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local.

(9.7) Exercícios

1. Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os (a classificação refere-se a ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de inflexão).

f) $g(x) = x^2 e^{-5x}$

2. Suponha que f admite derivada de 3.ª ordem contínua no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Prove que se $f'(p) = f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$ então p é ponto de inflexão horizontal.

3. Suponha que f admite derivada até a 4.ª ordem contínua no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Prove que se $f'(p) = f''(p) = f'''(p) = 0$ e $f^{(4)}(p) \neq 0$, então p será ponto de máximo local se $f^{(4)}(p) < 0$ e será ponto de mínimo local se $f^{(4)}(p) > 0$.

9.8- Máximo e Mínimo de função contínua em intervalo fechado.

Teo Weierstrass: Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então assume valor máximo e mínimo em $[a,b]$.

- Se f for derivável em $]a,b[$ e contínua em $[a,b]$, os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f são os pontos críticos de f em $[a,b]$ e as extremidades "a" e "b" do intervalo.

- Se f for contínua em $[a,b]$ e não derivável apenas em um número finito de pontos, acrescentamos esses pontos aos candidatos mencionados no item anterior.

(9,8) Exercícios

Determine os valores máximos e mínimos (caso existam) da função dada, no intervalo dado.

3. $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ em $[-3, 3]$.

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ em $[-1, 2]$.