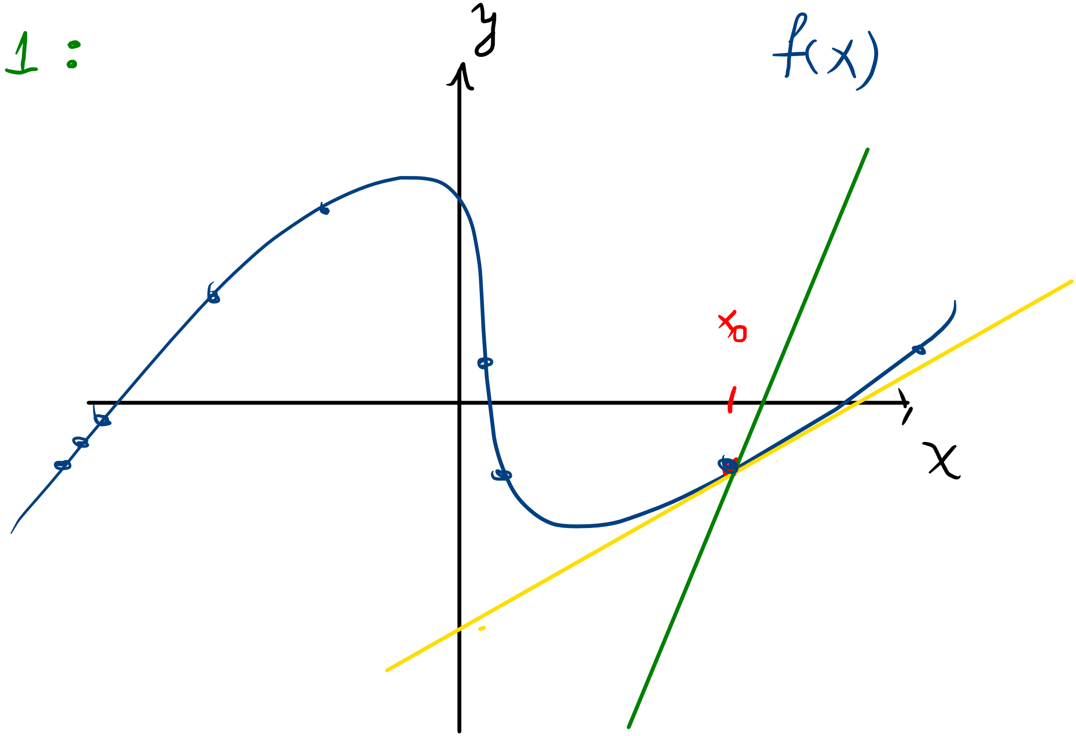
Monitoria - 05/07

Capítulo 16 - Polinômio de Taylor

Objetivo: Aproximar funções complicadas por polinômios.

- Achar a melhor aproximação possível por um polinômio de ordem até $k > 0$.

Ordem 1 :



$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \qquad \left(T'(x_0) = f'(x_0) \right)$$

Qual é o erro cometido na aproximação?

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$E(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right) =$$

$$= \left(f(x) - f(x_0) \right) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0.

$$\boxed{P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Como estimar o erro?

Teorema. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo I e sejam x, $x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{\substack{E(x) \\ \parallel \\ f(x) - P_1(x)}}.$$

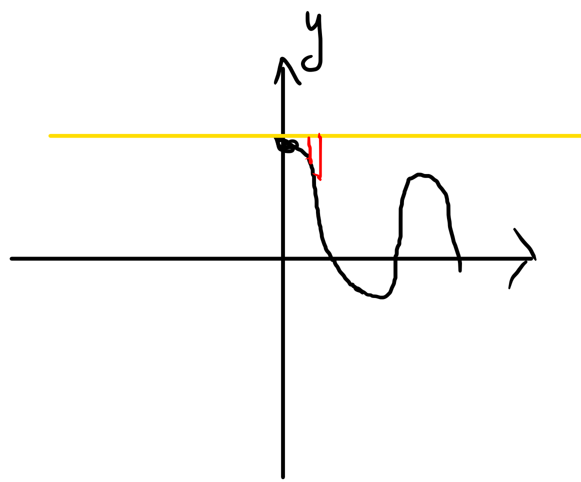
Exercícios (16.1)

1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado.

e) $f(x) = \cos 3x, x_0 = 0$

$$P_1(x) = \overset{f(0)}{\cos(0)} \overset{f'(0)}{-3\operatorname{sen}(0)} \cdot (x - 0)$$

$$P_1(x) = 1$$



2. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.

c) sen 0,02

$f(x) = sen(x)$, $f'(x) = cos(x)$

$cos(x)$

0,02 está próximo de 0.

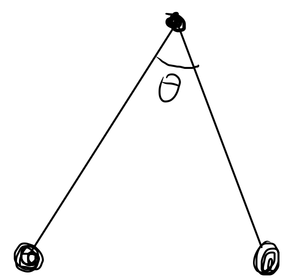
- $P_1(x) = sen(0) + cos(0) \cdot (x - 0) = x$

- $P_1(0{,}02) = 0{,}02$

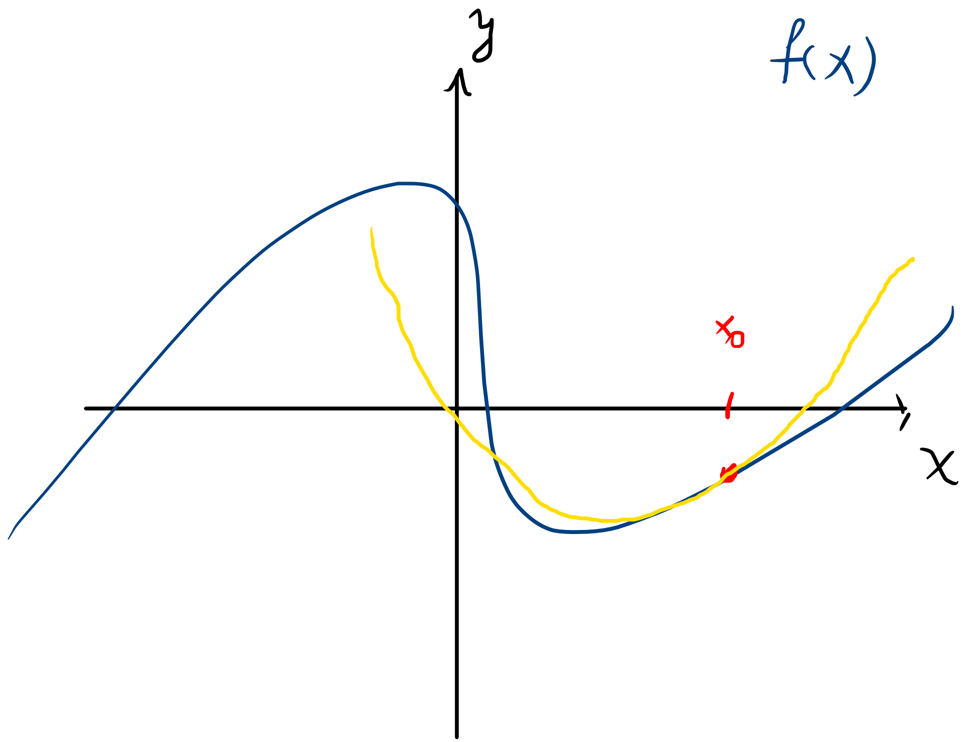
Teor: Dado $x = 0{,}02$, existe $\bar{x}$ entre 0 e 0,02 tq $E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$

$$E(\underbrace{x}_{0,02}) = \frac{-\operatorname{sen}(\bar{x})}{2} \cdot \left(\frac{2}{10^2}\right)^2$$

$$\left|E(\underbrace{x}_{0,02})\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\bar{x})}{2} \cdot \frac{4}{10^4}\right| \le \left|\frac{2}{10^4}\right| = \frac{1}{5000}$$



Ordem 2: A aproximação melhora quando podemos aproximar também por parábolas.



O polinômio de Taylor de ordem 2 tem as duas primeiras derivadas iguais às de f

$$\boxed{P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0)$$

$$E(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Como estimar o erro?

Teorema. Seja f derivável até a 3.ª ordem no intervalo I e sejam x_0, x em I. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3}_{E_2(x)}$$

Exercícios (16.2)

1. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

$a)\ f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$P_2(x) = 0 + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

2. Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

$$\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

b) $\sqrt{4,1}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4 ; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$P_2(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 2 + 2(x-4) - \frac{1}{4 \cdot 8 \cdot 2}(x-4)^2}$$

$$E(x) = \frac{f'''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^3}{3!}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$E(4,1) = \frac{f'''(\bar{x}) \cdot}{10^3 \cdot 6}$$

$$\bar{x} \in [4, 4,1]$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4,1^5}} \leq f'''(\bar{x}) \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}}$$

$$E(4,1) \le \frac{1}{6 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{32} \le \frac{1}{192000}$$

Polinômio de Taylor de Ordem n (16.3)

Seja f derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = \underline{\underline{\underline{f(x_0)} + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de* x_0.

P(x) tem as "n" primeiras derivadas iguais a f em x_0.

Teorema. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e sejam x, $x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{E(x)}$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n(x)$$

EXEMPLO 6. Mostre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ em que $a > 0$ é um real fixo.

Tome $N > 0$ tq $\frac{a}{N} < \frac{1}{2}$.

$$\frac{a}{N+1} < \frac{1}{2} \quad \ldots \quad \frac{a}{N+p} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{N+2} < \frac{1}{2} \qquad p \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a^p}{(N+1)\dots(N+p)} < \left(\frac{1}{2}\right)^p$$ (Multiplicar as inequações)

Agora, multiplico tudo por $\frac{a^N}{N!}$:

$$\frac{a^{N+p}}{(N+p)!} < \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{a^N}{N!}$$

Fazemos a mudança $n = N+p$

$$\frac{a^n}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \cdot \frac{a^N}{N!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{a^N}{N!} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{0}{n-N}} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdots a}{n \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Exercicios (16.3)

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

$a)\ f(x) = \text{sen}\, x \quad \text{e} \quad x_0 = 0$

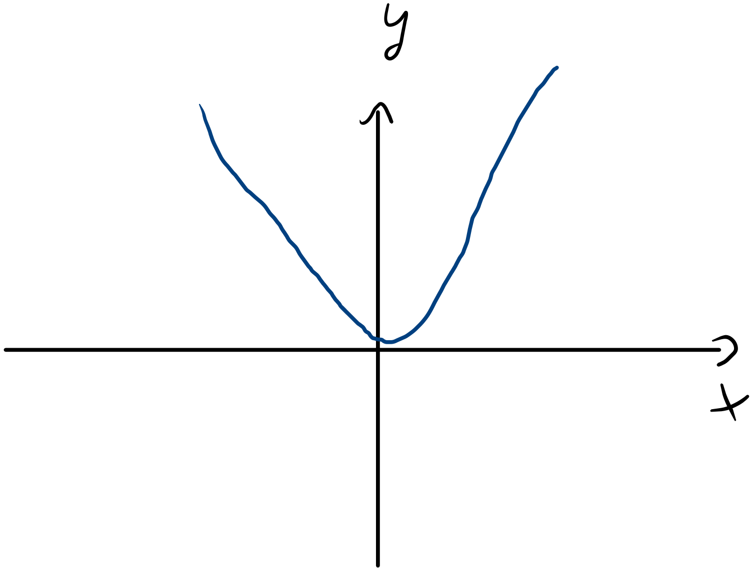
$$f'(x) = \overset{1}{\cos(x)}, \quad f''(x) = \overset{0}{-\text{sen}(x)}; \quad f'''(x) = \overset{-1}{-\cos(x)}$$

$$f^{(4)}(x) = \overset{0}{\text{sen}(x)}, \quad f^{(5)}(x) = \overset{1}{\cos(x)}$$

$$P_5(x) = \overset{0}{f(0)} + f'(0).(x-0) + \frac{\overset{0}{f''(0)}}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{\overset{0}{f^{(4)}(0)}}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$\boxed{P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$$

$$P_6(x) = P_5(x)$$



2. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = \operatorname{sen} x$. Mostre que, para todo x,

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

$5 \quad 7$

x^n

6

$n = 1 \rightsquigarrow \frac{(n-1)}{2} = 0$

$n = 3 \rightsquigarrow \frac{(n-1)}{2} = 1$

$n = 5 \rightsquigarrow \frac{(n-1)}{2} = 2$

$n = 7 \rightsquigarrow \frac{(n-1)}{2} = 3$

...

Resto de Lagrange:

Teorema. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e sejam x, $x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que 0

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

No caso do seno:

$$|E_n(x)| = \left| \frac{|sen(x)|^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

$$p_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\boxed{|E_{2n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+2)}(\bar{x}) \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|}$$

Exercício: Encontre k tal que $\sin(1)$ pode ser aproximado com erro menor que 10^{-15}

Sol:

$$|E_{2k+1}(1)| \leq \frac{1}{(2k+2)!} < 10^{-15}$$

$$\iff (2k+2)! > 10^{15}$$

$$10! = 10 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{> 1000} \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{> 100} \cdot 1 \quad \therefore 10! > 10^6$$

$10 \cdot$

10^6

$\therefore$

$$19! = \underbrace{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}_{>10^9} \cdot \underbrace{10!}_{>10^6} > 10^{15}$$

$$(2k+2) \geq 19 \Rightarrow k \geq \frac{17}{2} \quad \therefore \boxed{k=9}$$

3. Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-3}. (*Sugestão*: utilize o Exercício 2.) (usando apenas as operações básicas)

$$(2k+2)! > 10^4$$

$$8! > 10^4$$

$$(2k+2) = 8 \quad \therefore \quad \boxed{k = 3}$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$2k+1$

$$P_7(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

$$|\operatorname{sen}(1) - P_7(1)| < 10^{-4}$$

$x_2 = 0{,}083333$

$$\frac{1}{3!} \cong 0{,}1666667 = x_1 \quad , \quad \frac{1}{5!} = 0{,}08\overline{3}$$

$$\left|x_1 - \frac{1}{3!}\right| < 10^{-5} \qquad \left|x_2 - \frac{1}{5!}\right| < 10^{-5}$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}00019841\ldots$$

$x_3 = 0{,}000198$

$$\left|x_3 - \frac{1}{7!}\right| < 10^{-5}$$

$$\text{sen}(1) = 1 - x_1 + x_2 - x_3 + \underbrace{\text{ERRO}}_{E}$$

$$|E| = |\text{sen}(1) - 1 + x_1 - x_2 + x_3| =$$

$$|\text{sen}(1) - P_7(1) + P_7(1) - 1 + x_1 - x_2 + x_3| =$$

$$= \left|\text{sen}(1) - P_7(1) - \frac{1}{3!} + x_1 + \frac{1}{5!} - x_2 - \frac{1}{7!} + x_3\right|$$

$1-\frac{1}{3!} \quad 1-\frac{1}{3!}$

- $-10^{-4} < P_7(1) - \sin(1) < 10^{-4}$

- $-10^{-5} < -x_1 + \frac{1}{3!} < 10^{-5}$

- $-10^{-5} < x_2 - \frac{1}{5!} < 10^{-5}$

- $-10^{-5} < -x_3 + \frac{1}{7!} < 10^{-5}$

$$-3.10^{-5} - 10^{-4} < -10^{-3} < 1 - \overbrace{x_1 + x_2 - x}_{} {}_3 - \sin(1) < 10^{-3}$$

4. Mostre que, para todo *x*,

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n \to +\infty} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$