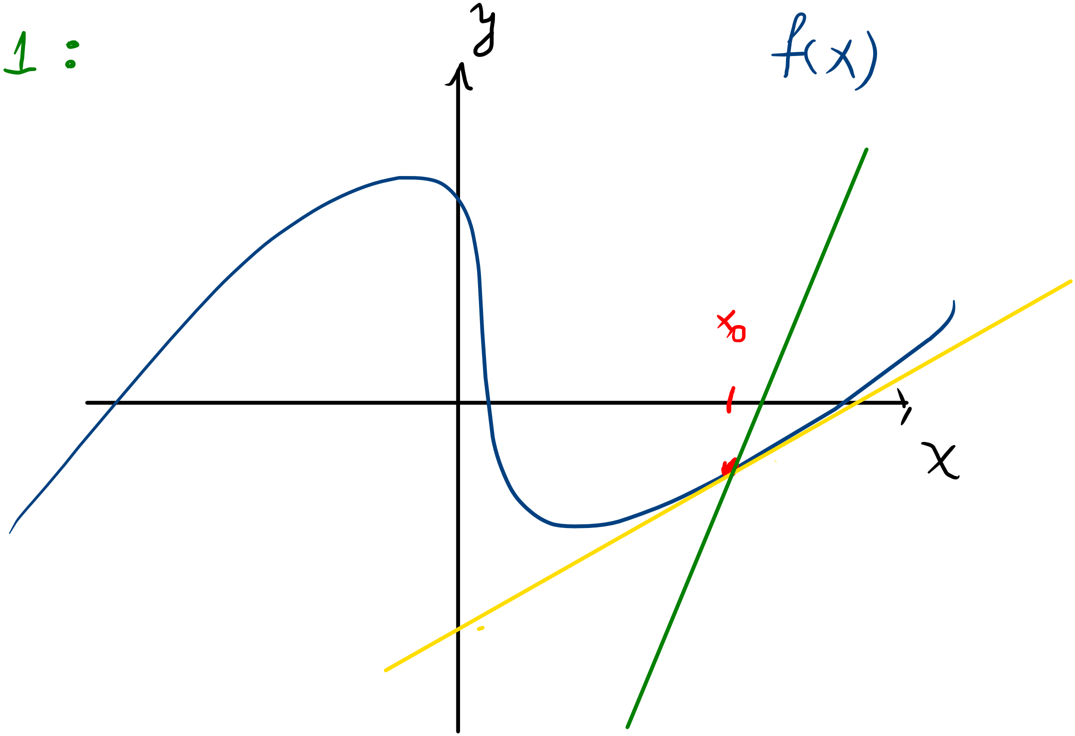
Monitoria - 05/07

# Capítulo 16 - Polinômio de Taylor

Objetivo: Aproximar funções complicadas por polinômios.

- Achar a melhor aproximação possível por um polinômio de ordem até $k > 0$.

Ordem 1 :




$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \qquad \left( T'(x_0) = f'(x_0) \right)$$

Qual é o erro cometido na aproximação?

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$E(x) = f(x) - \left( f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right) =$$

$$= \left( f(x) - f(x_0) \right) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $x_0$.

$$\boxed{P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Como estimar o erro?

**_Teorema._** Seja $f$ derivável até a 2.ª ordem no intervalo $I$ e sejam $x$, $x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos $x$ e $x_0$ tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{E(x)}.$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x)$$

# Exercícios (16.1)

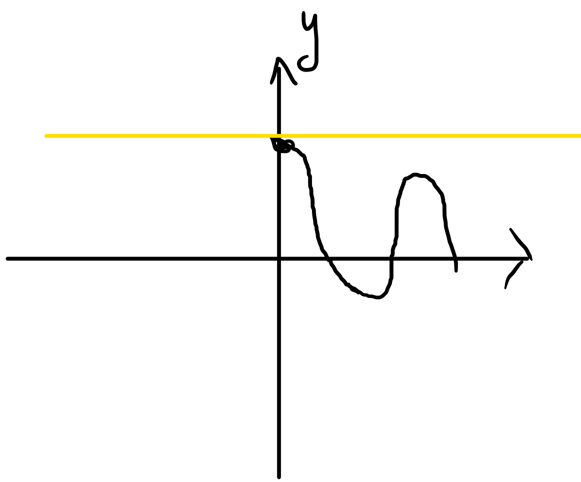
1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de $x_0$ dado.

$e) \; f(x) = \cos 3x, x_0 = 0$

$f(0)$ $f'(0)$

$$P_1(x) = \cos(0) - 3\,\text{sen}(0) \cdot (x - 0)$$

$$P_1(x) = 1$$



2. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.

c) sen 0,02

$f(x) = \text{sen}(x)$ , $f'(x) = \cos(x)$

$\cos(x)$

0,02 está próximo de 0.

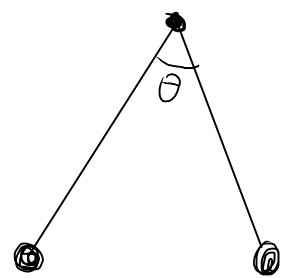
$$P_1(x) = \text{sen}(0) + \cos(0) \cdot (x - 0) = x$$

$$P_1(0{,}02) = 0{,}02$$

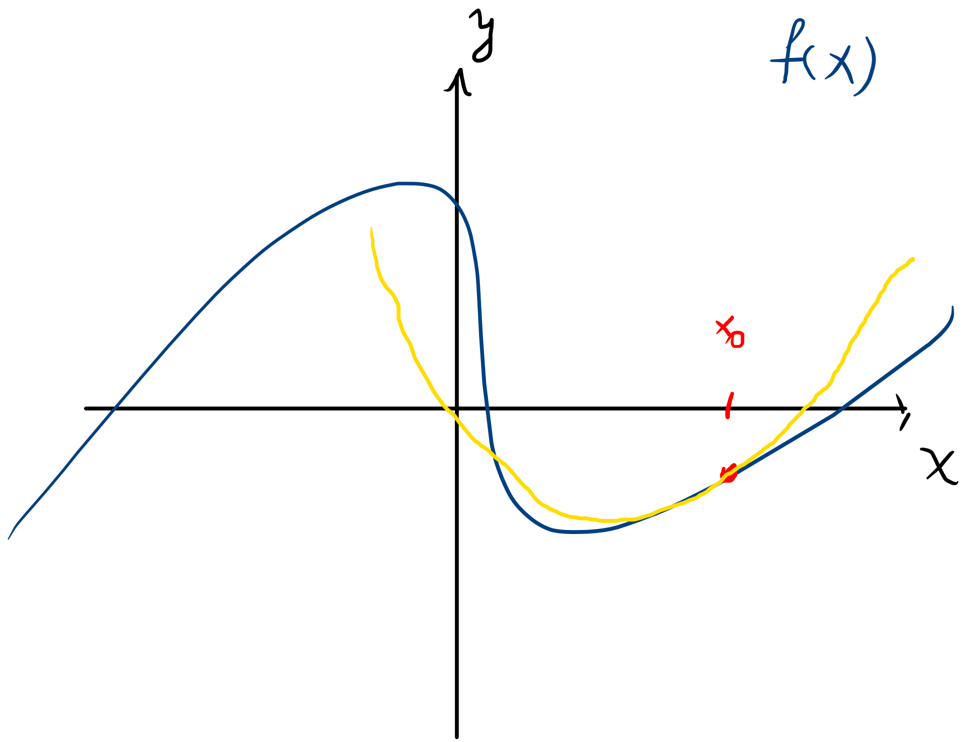
Teor: Dado $x = 0{,}02$, existe $\bar{x}$ entre 0 e 0,02 tq $E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2$

$$\underbrace{E(x)}_{0,02} = -\frac{\operatorname{sen}(\bar{x})}{2} \cdot \left(\frac{2}{10^2}\right)^2$$

$$\Big|\underbrace{E(x)}_{0,02}\Big| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\bar{x})}{2} \cdot \frac{4}{10^4}\right| \leq \left|\frac{2}{10^4}\right| = \frac{1}{5000}$$



**Ordem 2:** A aproximação melhora quando podemos aproximar também por parábolas.



O polinômio de Taylor de ordem 2 tem as duas primeiras derivadas iguais às de $f$

$$\boxed{P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0)$$

$$E(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

Como estimar o erro?

***Teorema.*** Seja $f$ derivável até a 3.ª ordem no intervalo $I$ e sejam $x_0$, $x$ em $I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ entre $x$ e $x_0$ tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3}_{E_2(x)}$$

# Exercícios (16.2)

1. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 2, de $f$ em volta de $x_0$ dado.

$a)\ f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$P_2(x) = 0 + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

2. Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

$$\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

*b*) $\sqrt{4{,}1}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$P_2(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 2 + 2(x-4) - \frac{1}{4 \cdot 8 \cdot 2}(x-4)^2}$$

$$E(x) = \frac{f'''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^3}{3!}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$E(4{,}1) = \frac{f'''(\bar{x}) \cdot}{10^3 \cdot 6}$$

$$\bar{x} \in [4\,,\,4{,}1]$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4{,}1^5}} \leq f'''(\bar{x}) \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}}$$

$$E(4,1) \leq \frac{1}{6 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{32} \leq \frac{1}{192000}$$

# Polinômio de Taylor de Ordem n (16.3)

Seja $f$ derivável até a ordem $n$ no intervalo $I$ e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de* $x_0$.

***Teorema.*** (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Seja $f$ derivável até a ordem $n+1$ no intervalo $I$ e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos $x_0$ e $x$ tal que

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{E(x)}$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

**EXEMPLO 6.** Mostre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ em que $a > 0$ é um real fixo.

Exercícios (16.3)

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de $x_0$ dado.

$a)\ f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$

2. Sejam $n$ um natural ímpar e $f(x) = \text{sen } x$. Mostre que, para todo $x$,

$$\left| \text{sen } x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Exercício: Encontre $k$ tal que $\text{sen}(1)$ pode ser aproximado com erro menor que $10^{-15}$.

3. Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a $10^{-5}$. (*Sugestão*: utilize o Exercício 2.) (Usando apenas as operações básicas)

4. Mostre que, para todo $x$,

$$\text{sen } x = \lim_{n \to +\infty} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$