Monitoria 30/06

2. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.

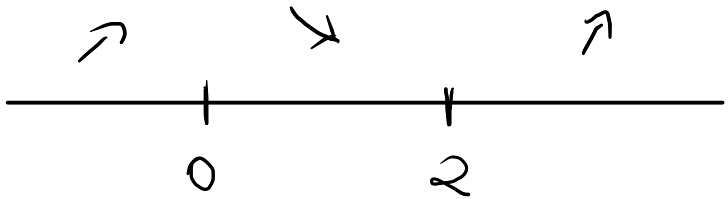
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ (contínua)

$f(-2) = -8 - 12 + 6 = -14 < 0$

$f(-1) = -1 - 3 + 6 = 2 > 0$

$\therefore$ Pelo TVI, existe $c \in [-2, -1]$ tq

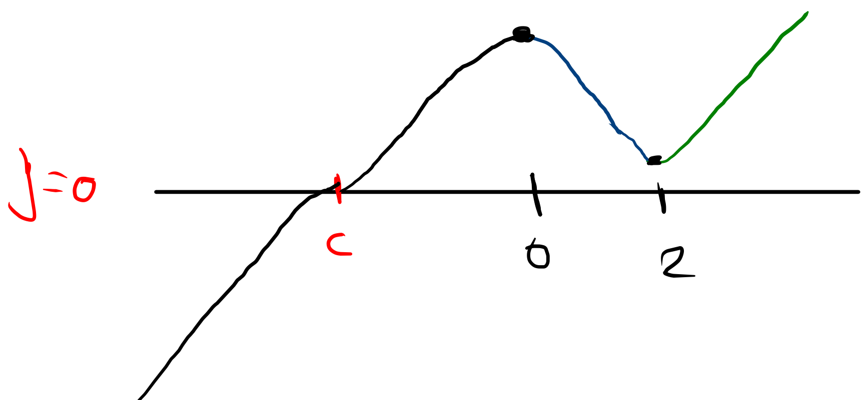
$f(c) = 0$.



$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$

$f'(x) > 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$

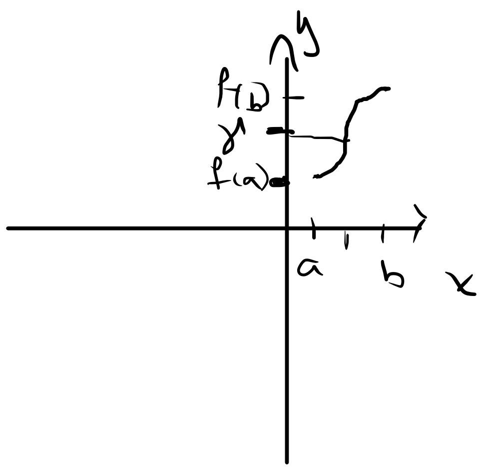


$f(2)$ é o mínimo de f em $[0,2]$

$f(2) = 2$

$\therefore f$ só tem uma raiz c, que está no intervalo $[-2,-1]$.

TVI: Se f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então dado γ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$



4. Determine a, para que a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

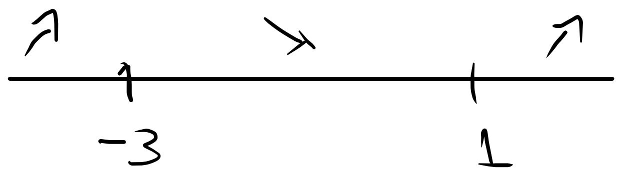
admita uma única raiz real.

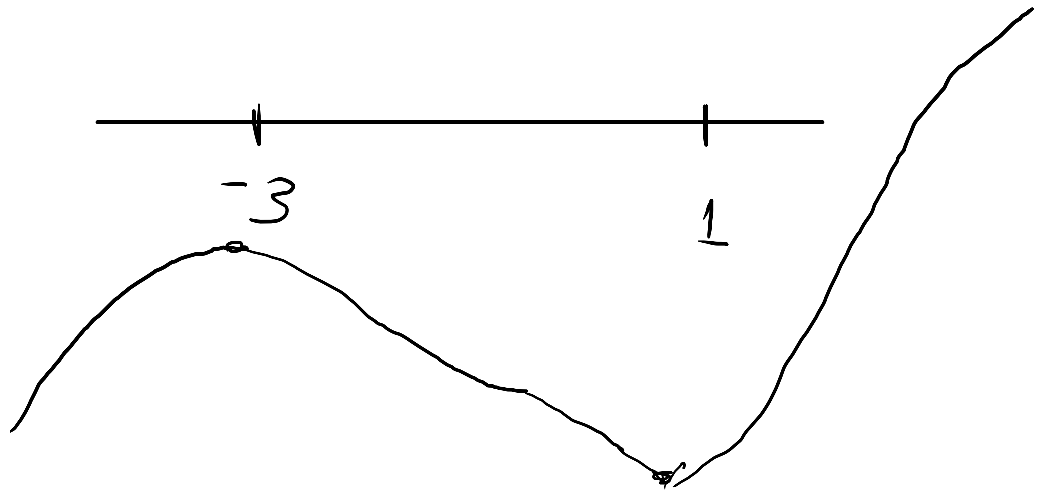
$(x-1)^2(x+2)$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a$

Com certeza f admite pelo menos uma raiz real.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$





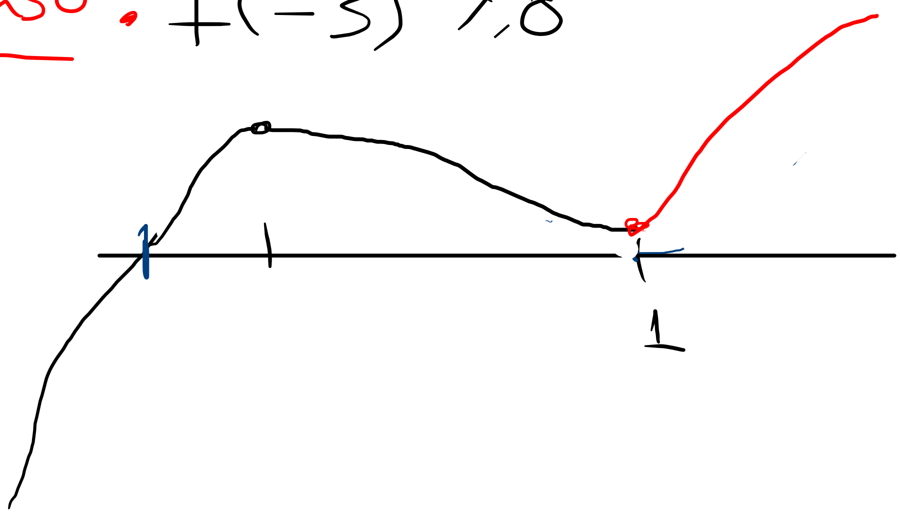
Se $f(-3) < 0$: só tem uma raiz

$f(-3) = 27 + a < 0 \iff a < -27$

1º caso: $f(-3) < 0$: só tem uma raiz.

$\boxed{a < -27}$

2º caso: $f(-3) \geq 0$



Para que só tenha uma raiz:

$f(1) > 0$

$f(-3) = 27 + a > 0$ e $f(1) = -5 + a > 0$

$a > -27$ e $a > 5$

ou seja, $\boxed{a > 5}$

Temos duas opções: $a > 5$ ou $a < -27$

Exemplo Importante:

Vamos verificar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ($\alpha > 0$) qualquer!

Para isso, usamos o seguinte:

$\frac{e^x}{x} > 1$

$e^x \to +\infty$

EXEMPLO 6.

a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.

b) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.

c) Conclua de (b) que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$f(x) = e^x - x$

$f'(x) = e^x - 1 > 0$ se $x > 0$

f é est. cresc em $[0, +\infty)$

$f(x) \geq 1 > 0$ $\forall x > 0$

$e^x > x$ $\forall x > 0$

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ $\forall x > 0$

b) $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, +\infty)$

$g'(x) = e^x - x$

Pela letra a), $g'(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$

$\therefore$ g é estritamente crescente em $[0, +\infty)$.

$g(0) = 1 > 0$, então se $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) > 0$

$$e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \quad \forall x \geq 0 .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$$

$$\left(\frac{e^x}{x^\alpha} \right) = \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} \right)^\alpha \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^{u}}{2u} = +\infty$$

$\ +\infty$

$$u = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2u$$

$x \to +\infty$

$u \to +\infty$

portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x}\right)^2 = +\infty$$

5. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$

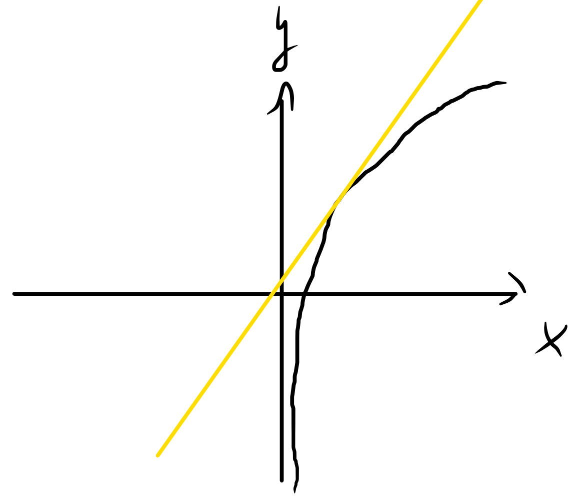
$(\alpha = 3)$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$

$u = \dfrac{1}{x}$; $x \to 0^+$, $u \to +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

L'Hopital: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$



$e^{\ln(x)} = x$: def. do ln

$\boxed{u = \ln(x)}$

$x \to +\infty$, $u \to +\infty$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^u}{u}\right)} = 0$$

$$\log_2(x)$$

$$2^{\log_e(x)} = x$$

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

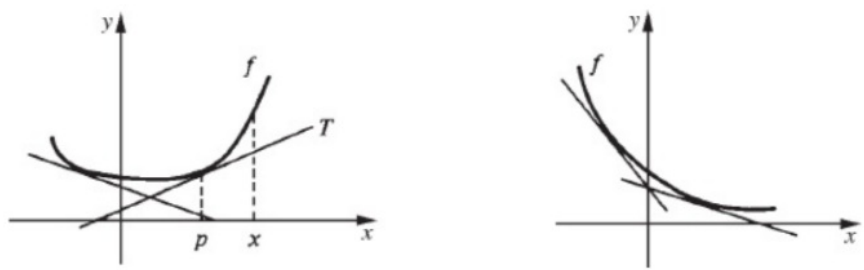
Seção 9.3 - concavidade e pontos de inflexão.

Se uma fç f é derivável em int. aberto I, $p \in I$, a reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é o gráf. de: $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$

Definição 1. Dizemos que f tem a *concavidade para cima* no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.



Definição 2. Dizemos que f tem a *concavidade para baixo* no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

Definição 3. Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é *ponto de inflexão* de f se existirem números reais a e b, com $p \in \,]a, b[\, \subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.

Teorema. Seja f uma função que admite derivada até a 2.ª ordem no intervalo aberto I.

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

EXEMPLO 4. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p. Prove que $f''(p) = 0$ é *condição necessária* (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f.

Exercícios (9.3)

1. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão. (e esboce o gráf.)

$a) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

f) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

l) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$