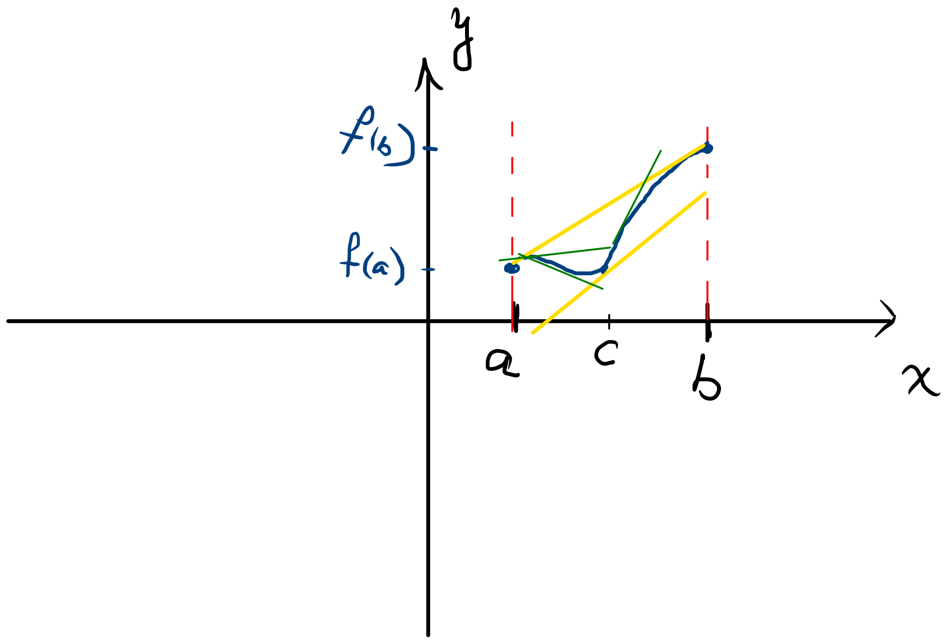
Monitoria - 28/06

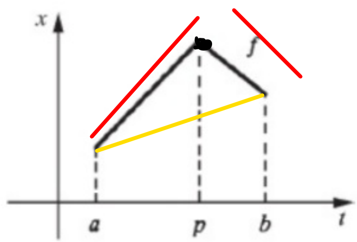
Seção 9.1 - Teorema do Valor Médio

Teorema do valor médio (TVM). Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

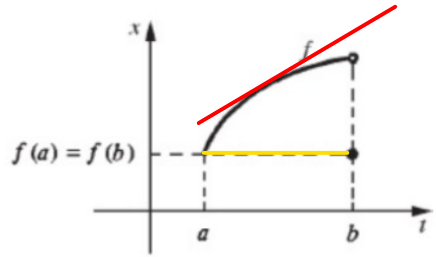
① $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{ou} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



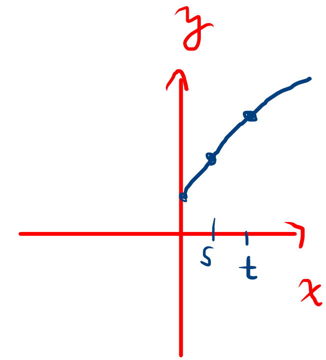
As situações que apresentamos a seguir mostram-nos que as hipóteses "f contínua em $[a, b]$ e f derivável em $]a, b[$" são indispensáveis.



f não é derivável em p; não existe c verificando ①.



f não é contínua em $[a, b]$; não existe c verificando ①.

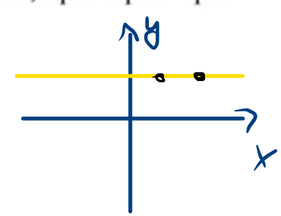


Antes de passarmos à próxima seção vamos relembrar as seguintes definições. Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f. Dizemos que f é *estritamente crescente* (*estritamente decrescente*) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t) \qquad (f(s) > f(t)).$$

Por outro lado, dizemos que f é *crescente* (decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

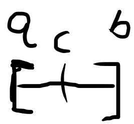
$$s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t) \qquad (f(s) \geq f(t)).$$



Seção 9.2 - Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema. Seja f contínua no intervalo I, f derivável no interior de I.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.
b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.

a) 

$b > a$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) > 0$$

Exercícios (9.2)

1. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários).

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

l) $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

$f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} = e^{x}(2e^{x} - 1)$

$e^{x} > 0$: O sinal de $2e^{x}-1$ será o sinal de f'.

- $2e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Leftrightarrow} x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ s t

  ↳ e^{x} é crescente

- $2e^{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $2e^{x} - 1 = 0$ se $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) > 0 \iff x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) < 0 \iff x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

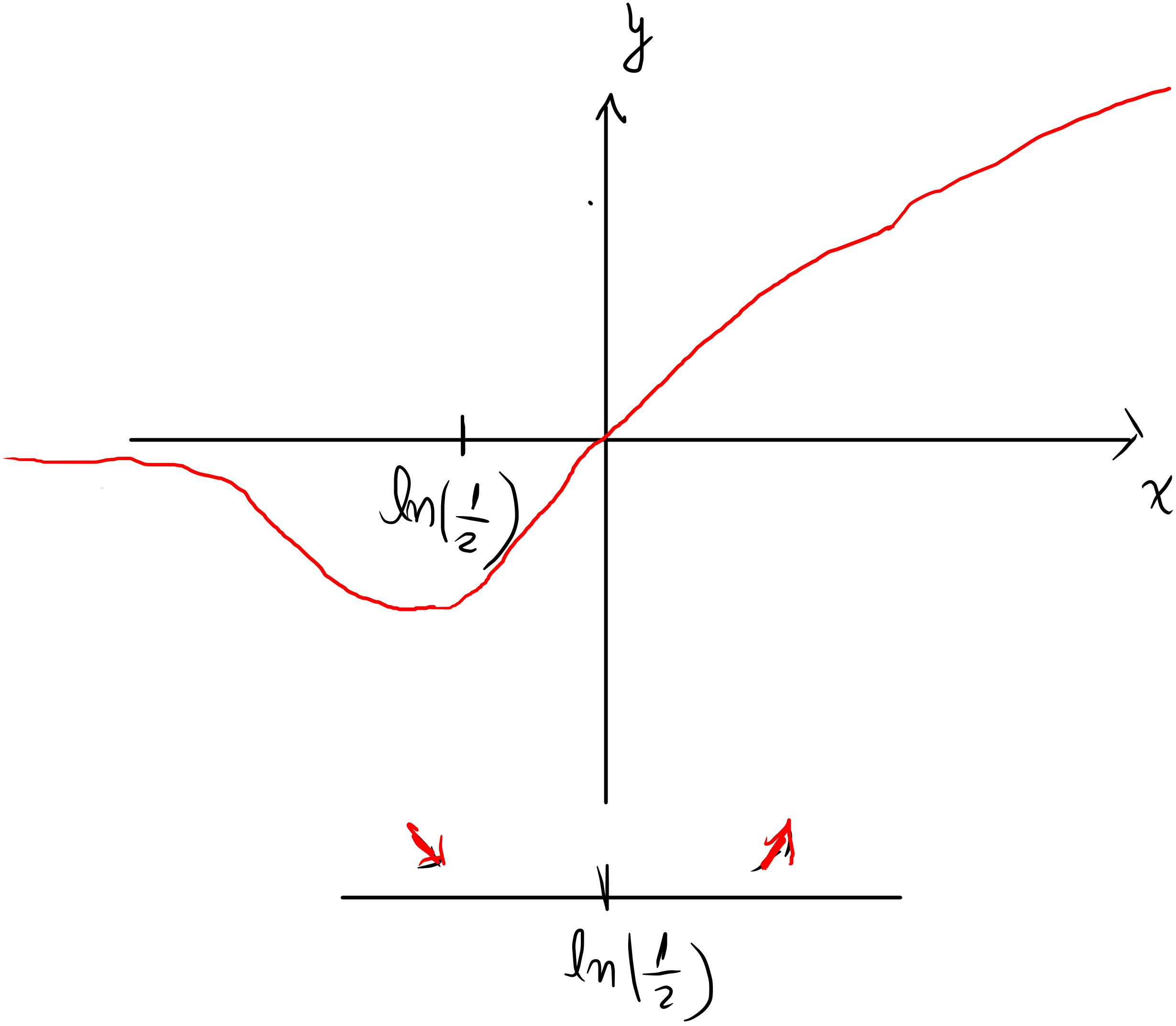
$f'(x) = 0 \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Raízes de f: $f(x) = e^{2x} - e^{x} = 0$

$\iff e^{x}(e^{x} - 1) = 0 \iff e^{x} = 1 \iff \boxed{x = 0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{e^{x}}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0\right)$$

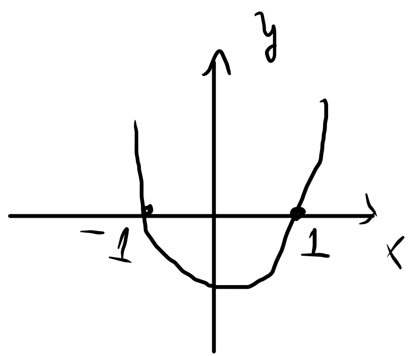

y
x
ln(1/2)
ln(1/2)

f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1) = 15x^2(x+1)(x-1)$

$$\boxed{15x^2 \geq 0}$$

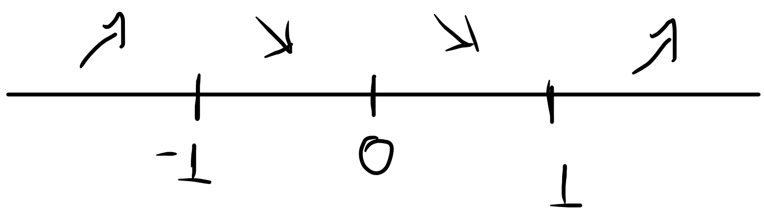
A menos que $x=0$ (em que $f'(x)=0$), o sinal de f' será o mesmo de (x^2-1).



$\therefore f'(x) > 0$ se $x < -1$ ou $x > 1$.

$f'(x) < 0$ se $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$.

$f'(x) = 0$ se $x = 1$, $x = -1$ ou $x = 0$.

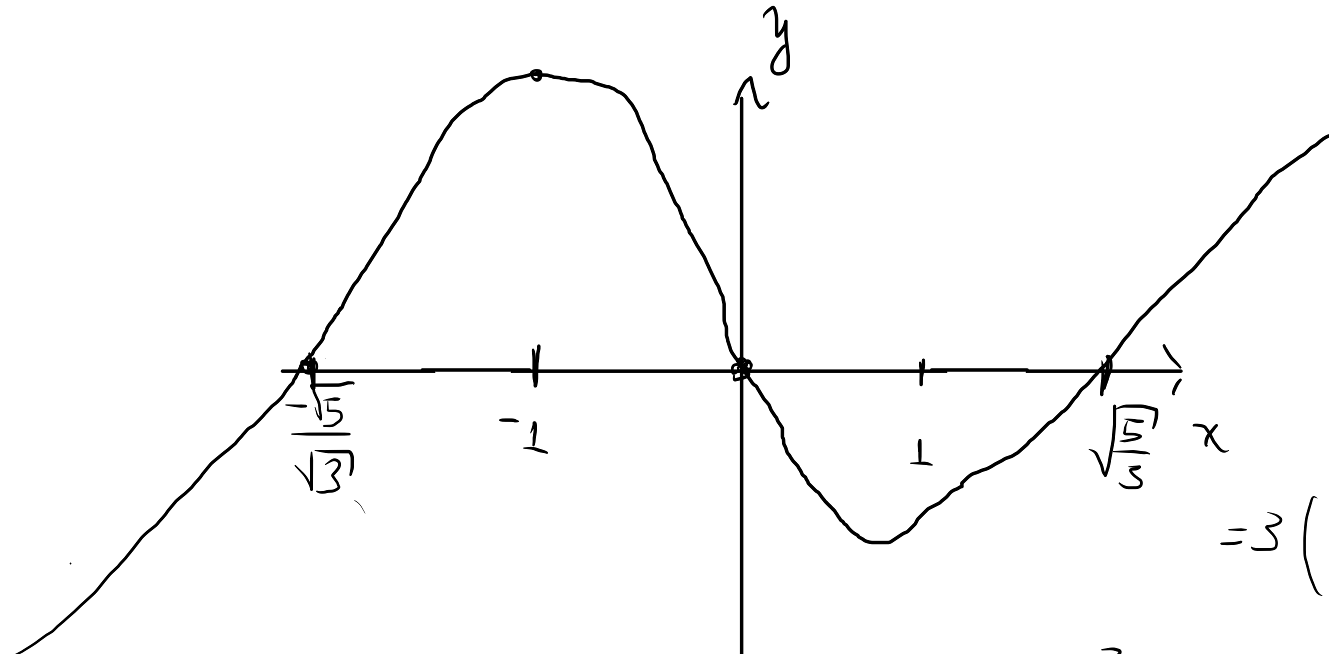


$I = (-\infty, -1]$

$f'(x) > 0$ no int. de I

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^5-5x^3)=\lim_{x\to+\infty}x^5\left(3-\frac{5}{x^2}\right)=+\infty$$

$-$ $-$ $-\infty$



$3x^2-5=$
$(\sqrt{3}x+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}x-\sqrt{5})$
$=3\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

$$f(x)=3x^5-5x^3=x^3(3x^2-5)=3x^3\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

2. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.

4. Determine a, para que a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

admita uma única raiz real.

Exemplo Importante:

Vamos verificar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha > 0)$

qualquer!

Para isso, usamos o seguinte:

EXEMPLO 6.

a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.

b) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.

c) Conclua de (b) que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

5. Calcule.

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

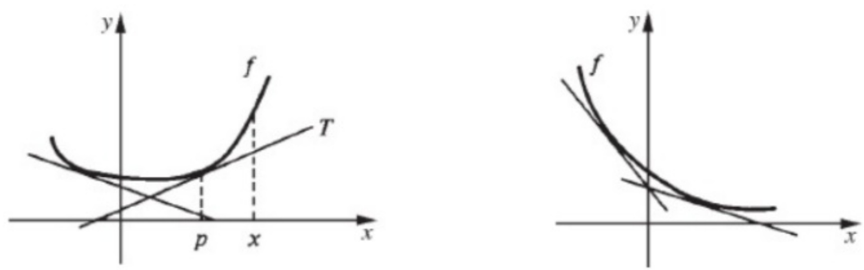
Seção 9.3 - Concavidade e pontos de inflexão.

Se uma fç f é derivável em int. aberto I, $p \in I$, a reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é o gráf. de: $T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$

Definição 1. Dizemos que f tem a *concavidade para cima* no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.



Definição 2. Dizemos que f tem a *concavidade para baixo* no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

Definição 3. Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é *ponto de inflexão* de f se existirem números reais a e b, com $p \in\ ]a, b[\ \subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.

Teorema. Seja f uma função que admite derivada até a 2.ª ordem no intervalo aberto I.

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

EXEMPLO 4. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p. Prove que $f''(p) = 0$ é *condição necessária* (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f.

Exercícios (9.3)

1. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão. (e esboce o gráf.)

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

f) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

l) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$