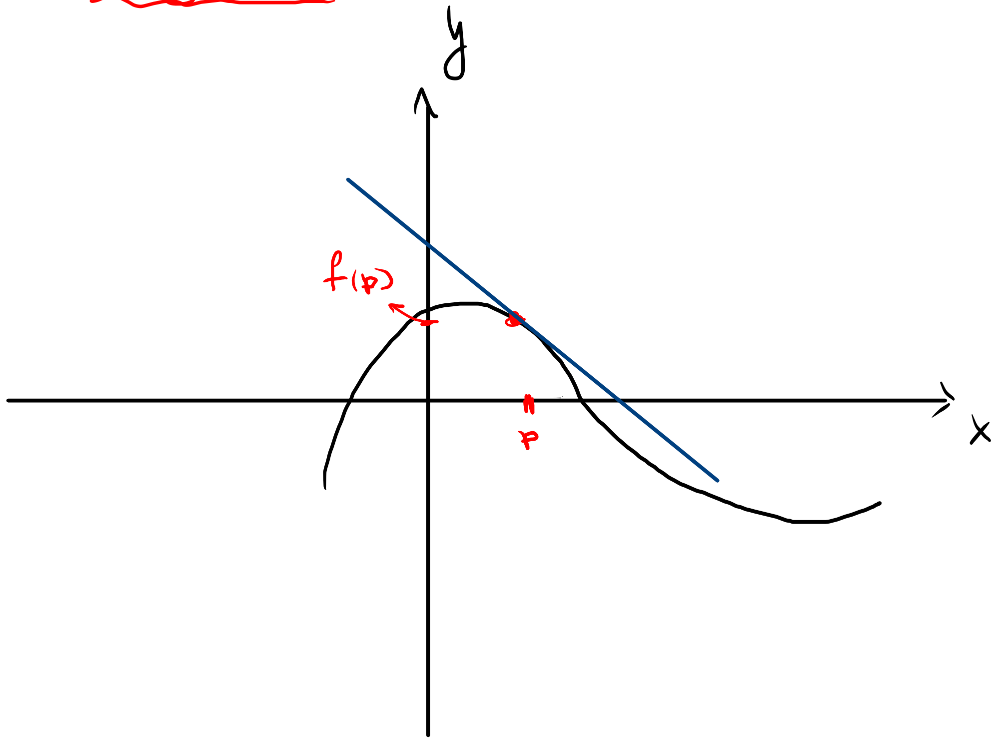
Monitoria - 16/06

Reta Tangente



• f função derivável em p.

Reta Tangente (em $(p, f(p))$):

- Tem coeficiente angular $f'(p)$. ✓
- Passa pelo ponto $(p, f(p))$. ✓

$$y = ax + b$$

$$y = f'(p)\,x + b \Rightarrow f(p) = f'(p) \cdot p + b$$

$$\boxed{b = f(p) - f'(p) \cdot p}$$

$$y = f'(p)x + f(p) - p \cdot f'(p)$$

$$\boxed{y - f(p) = f'(p) \cdot (x - p)}$$

↳ Reta tangente de f em $(p, f(p))$.

Seção 7.2 - Exercícios

5. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 2$

$f(2) = \frac{1}{2}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)}$$

d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$

$f(1) = 0$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(1) = 1$

$y - 0 = 1.(x - 1)$

$$\boxed{y = x - 1}$$

Seção 7.3 - Exercícios

8. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

$$r: \quad y - f(p) = f'(p)(x-p)$$

$$y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x-p)$$

intercepta o eixo x: $y=0$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x-p) \Rightarrow p = (x-p)$$

$$\boxed{x = 2p}$$

9. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e pararela à reta $y = 4x + 2$.

$my = nx + p \quad m \neq 0$

coef. ang: $\frac{n}{m}$

Digamos que a reta pedida é tangente no ponto $(p, f(p))$.

Precisamos determinar "p".

Reta paralela: Mesmo coef. angular.

coef. ang. da reta tangente: $f'(p)$

coef. ang. de $y = 4x + 2$: 4

$$\underset{\substack{\| \\ 2p}}{f'(p)} = 4 \quad \therefore \quad \boxed{p = 2}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$\boxed{y - 4 = 4(x - 2)}$$

Seção 7.16 - Problemas envolvendo reta tangente e reta normal ao gráfico de uma função.

Vimos: Se f é derivável em p,

$$y = f'(p)(x-p) + f(p)$$

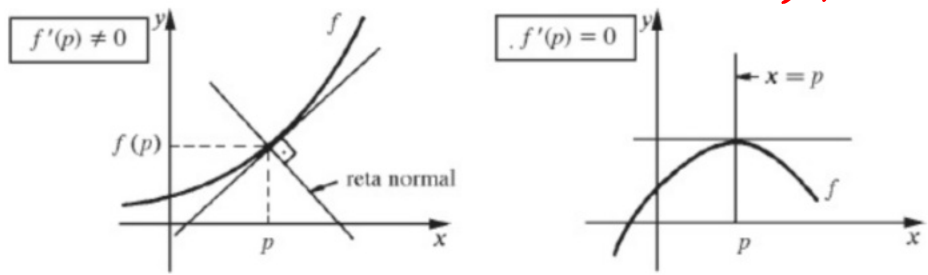
é a eq. da reta tangente em $(p, f(p))$.

A reta que passa por $(p, f(p))$, e que é perpendicular à reta tangente acima, denomina-se *reta normal* ao gráfico de f em $(p, f(p))$. Se $f'(p) \neq 0$, a equação da reta normal no ponto de abscissa p será

$$-\frac{1}{f'(p)} \cdot f'(p) = -1$$

$$\boxed{y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x - p).}$$

→ reta $x=p$ é normal.



Retas normais têm o produto dos coef. angulares igual a (-1).

$y = mx + a \qquad m \cdot n = -1$

$y = nx + b \qquad m, n \neq 0$

Seção 7.16 - Exercícios

1. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto de abscissa 8

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $f'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{2^6}} = \dfrac{1}{3.4} = \dfrac{1}{12}$

$f(8) = 2$

Tangente: $y - 2 = \dfrac{1}{12}(x-8)$

Normal: $y - 2 = -12(x-8)$

6. A reta s passa pelo ponto (3, 0) e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b).

a) Determine (a, b). ✓

b) Determine a equação de s.

$p=0$

$f'(p)=0$

$x=0$

$f'(x)=2x$

s: Normal em (a, b). $b=f(a)$

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$$

Substituindo (3,0):

$$-a^2=-\frac{1}{2a}(3-a) \Rightarrow -2a^3=-3+a$$

$$2a^3+a-3=0$$

$$\therefore \boxed{a=1}$$

$$
\begin{array}{rl}
2a^3 + a - 3 & \underline{|\, a - 1} \\
-\ \underline{2a^3 - 2a^2} & 2a^2 + 2a + 3 \\
2a^2 + a - 3 & \\
-\ \underline{2a^2 - 2a} & \\
3a - 3 & \\
-\ \underline{3a - 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$(2a^3 + a - 3) = (a - 1)(2a^2 + 2a + 3)$$

$$2a^2 + 2a + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$$

$\therefore$ Não tem raízes reais

$b = f(1) = 1$

a) $(a, b) = (1, 1)$

b) $\boxed{y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)}$

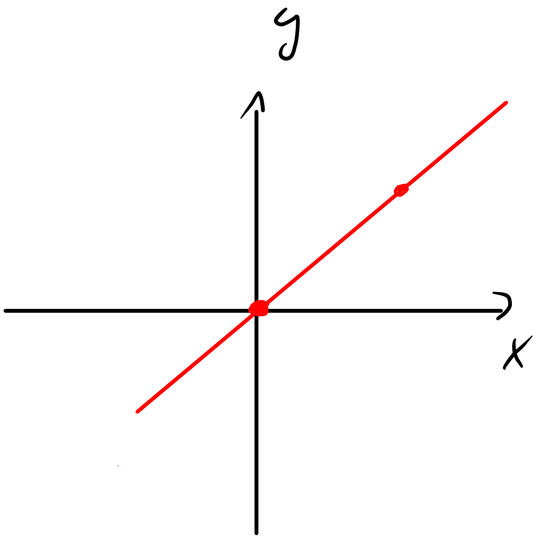
10 - Sabe-se que r é uma reta que passa pelo ponto (0, 2) e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$. Determine r.

11. Determine a equação de uma reta, não vertical, que passa pelo ponto $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ e que seja normal ao gráfico de $y = x^3$.

$y = f(x)$, $f'(x) = 3x^2$

• $\frac{dy}{dx} \neq 0$.

$3x^2 \neq 0$ $\quad (\therefore x \neq 0)$



r :

$$y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x - p)$$

$$y - p^3 = -\frac{1}{3p^2}(x - p)$$

$$\frac{4}{3} - p^3 = \frac{-1}{3p^2}(0 - p)$$

$$\frac{4}{3} - p^3 = \frac{1}{3p} \Rightarrow 4p - 3p^4 = 1$$

$$3p^4 - 4p + 1 = 0$$

- $\underline{1}$ é raiz: $p = 1$ fornece uma solução

Obs: Há outras

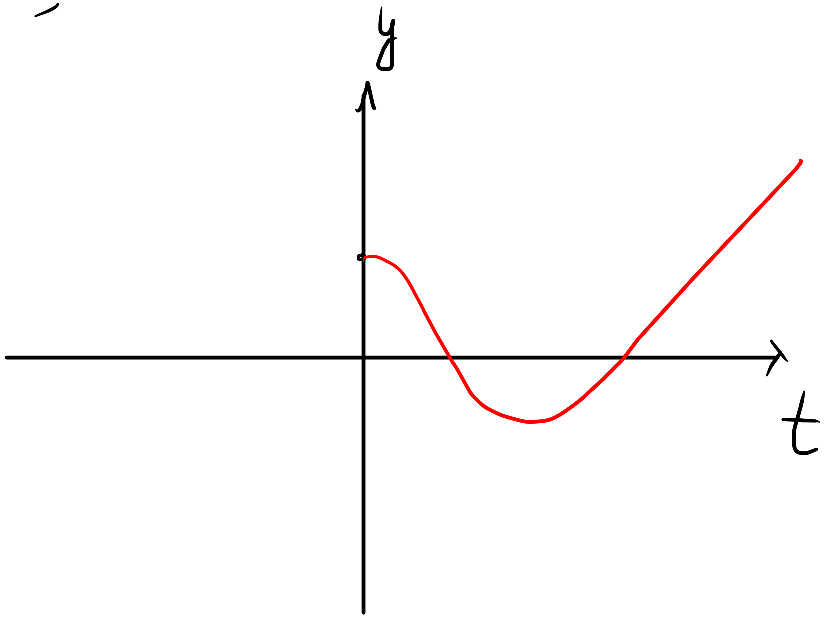
$$\boxed{y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 1)}$$

12. Determine todos os pontos (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tais que por (a, b) passem duas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$.

15. Sabe-se que r é uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e de $g(x) = \dfrac{1}{2} + x^2$. Determine r.

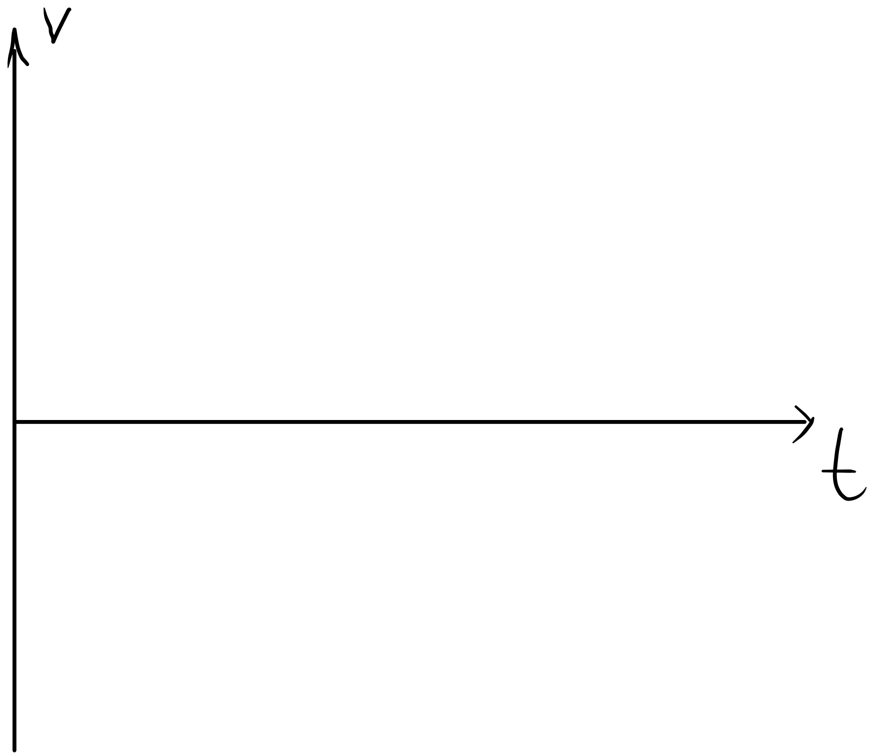
Seção 7.15 - Velocidade e aceleração. Taxa de variação.

Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma reta com função de posição $y = f(t)$, $t \geq 0$.



$$v(t) = \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

↳ Velocidade instantânea.



$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

↳ aceleração instantânea

Dada uma função $y = f(x)$, a razão $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a taxa média de variação de f entre x e $(x+\Delta x)$.

A derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ é a taxa de variação de f em x (a taxa de variação de y com relação a x).

Seção 7.15 – exercícios

1. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = 3 + 2t - t^2$, $t \geq 0$.

   a) Qual a velocidade no instante t?

   b) Qual a aceleração no instante t?

   c) Estude a variação do sinal de $v(t)$.

   d) Esboce o gráfico da função de posição.

10. A equação do movimento de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x é $x = e^{-t} \operatorname{sen} t$, $t \geq 0$.

a) Determine a velocidade e a aceleração no instante t.

b) Calcule $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} \operatorname{sen} t$.

c) Esboce o gráfico da função.

d) Interprete tal movimento.

12. Um ponto P move-se ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ de tal modo que a sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 5 (m/s). Qual a velocidade de y no instante em que $x = 10$ m?

16. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 (m/s), com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?

20. Um ponto P move-se sobre a parábola $y^2 = x$, $x > 0$ e $y > 0$. A abscissa x está variando com uma aceleração que, em cada instante, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada y. Mostre que a ordenada está variando com aceleração nula.