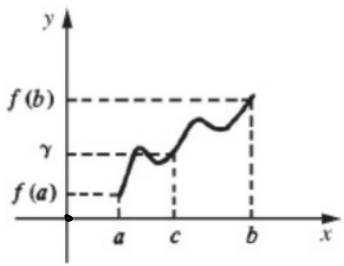
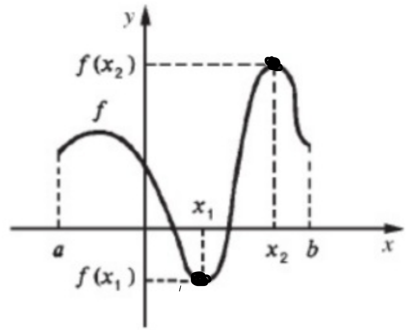
Monitoria - 14/06

Cap. 5 - Teorema do Valor Intermediário e Teorema de Weierstrass.

Teorema *(do valor intermediário).* Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.



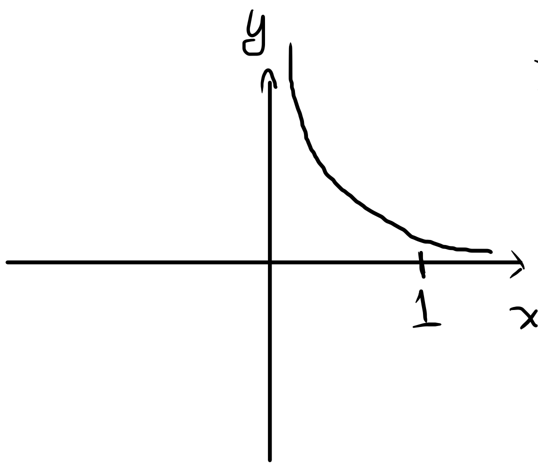
Teorema *(de Weierstrass)*. Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.



M

$x = \frac{1}{M+1}$

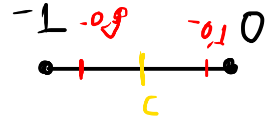
$f(x) = M+1$



$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua

$(0, 1]$

Exercícios



1. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

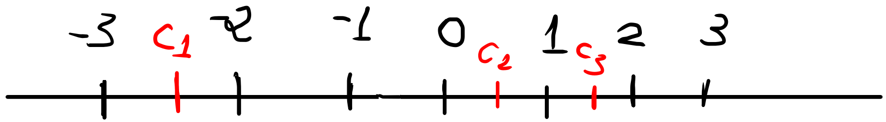
f é contínua em $[-1, 0]$.

raiz: $x \in \mathrm{dom}(f)$ tq $f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\}$$

Pelo T.V.I., $\exists\, c \in [-1, 0]$ tq $f(c) = 0$.

2. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.



$$f(x) = x^3 - 4x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2 > 0 \\ f(-3) = -13 < 0 \end{array}\right\} \text{T.V.I. diz que } \exists\, c_1 \in [-3,-2] \text{ tq } f(c_1) = 0.$$

$f(-1) = 5$

$f(0) = 2$

$f(1) = -1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 17$

TVI diz que $\exists c_2 \in [0, 1]$ tq $f(c_2) = 0$.

TVI diz que $\exists c_3 \in [1, 2]$ tq $f(c_3) = 0$

$\therefore$ c_1, c_2 e c_3 são raízes distintas

5. Prove que cada um dos conjuntos abaixo admite máximo e mínimo.

a) $A = \left\{ \frac{x}{1+x^2} \middle| -2 \leqslant x \leqslant 2 \right\}$

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in [-2,2]$

f é contínua em $[-2,2]$.

Pelo Teo. de Weierstrass, existem $x_1, x_2 \in [-2,2]$ tq $\underbrace{f(x_1)}_{\text{mín}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\text{máx.}}$ $\forall x \in [-2,2]$.

7.

a) Prove que todo polinômio do grau 3 admite pelo menos uma raiz real.

b) Prove que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

a) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

↳ fç def. em $\mathbb{R}$, contínua.

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} ax^3 \left[1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{x^3} \right]$$

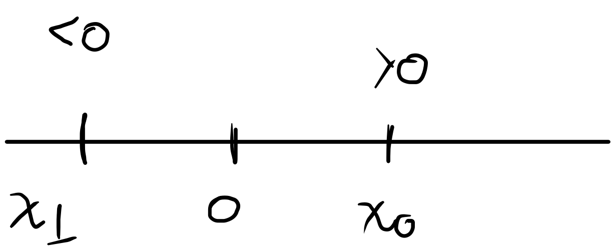
$$= \begin{cases} +\infty, \text{ se } a > 0 \\ -\infty, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a > 0 \\ +\infty, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$a > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \;\therefore\; \exists\, x_0 > 0 \text{ tq } P(x_0) > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \;\therefore\; \exists\, x_1 < 0 \text{ tq } P(x_1) < 0$$



Pelo TVI, $\exists c \in [x_1, x_0]$ tq

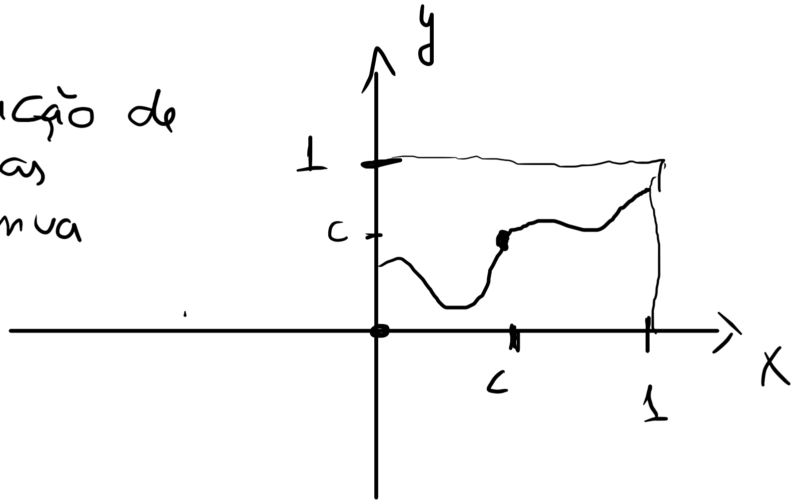
$f(c) = 0$. (c é raiz)

O caso $a < 0$ é similar.

b) Análogo.

11. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que, para todo x em $[0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
Prove que existe c em $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

subtração de contínuas é contínua



$[0,1]$

Considere $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$g(x) = f(x) - x$ (g é contínua)

Quero: $\exists c$ tq $g(c) = 0$.

$g(0) = f(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

Se $g(0)=0$ ou $g(1)=1$, então conseguimos (nesse caso, $c=0$ ou $c=1$)

Então podemos assumir $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$.

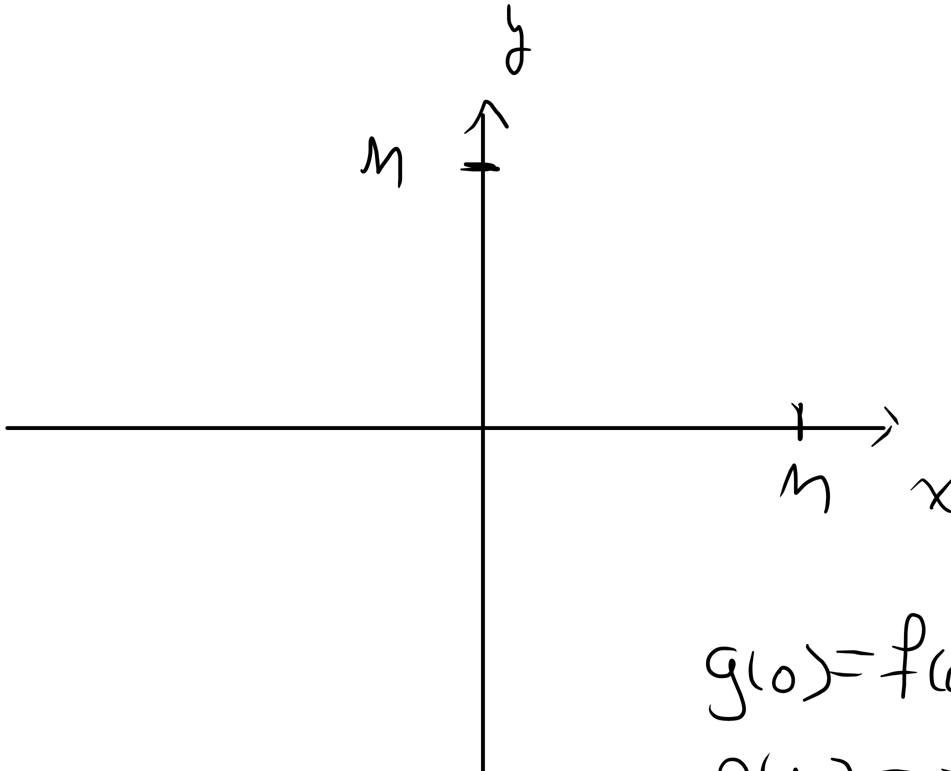
Pelo TVI, $\exists c \in [0,1]$ tq $g(c)=0$

pois g é contínua em $[0,1]$

$$g(c) = f(c) - c = 0 \quad \therefore f(c) = c.$$

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1=f(x)$$

f

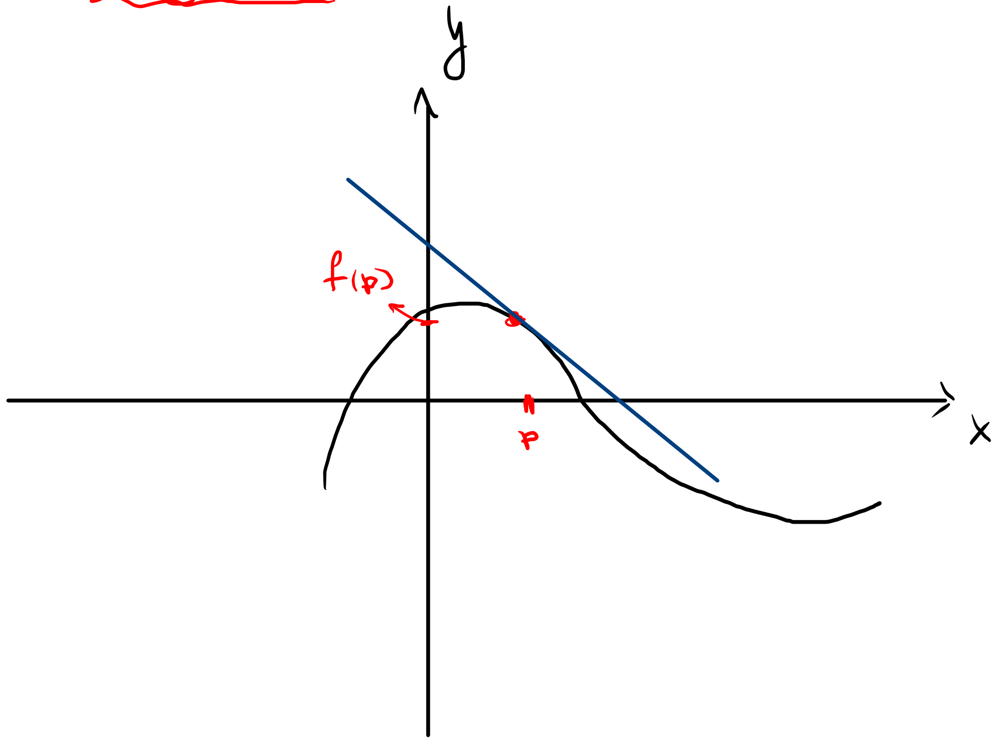


$g(0) = f(0) \geq 0$

$g(n) = f(n) - n \leq 0$

$g(x) = f(x) - x$

Reta Tangente



f função derivável em p.

Reta Tangente (em $(p, f(p))$:

- Tem coeficiente angular $f'(p)$.
- Passa pelo ponto $(p, f(p))$.

Seção 7.2 - Exercícios

5. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

$b)$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$

$d)$ $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$

Seção 7.3 – Exercícios

8. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

9. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e pararela à reta $y = 4x + 2$.

Seção 7.16 - Problemas envolvendo reta tangente e reta normal ao gráfico de uma função.

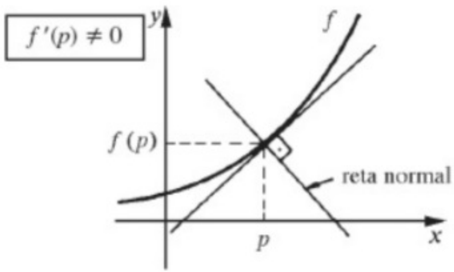
Vimos: Se f é derivável em p,

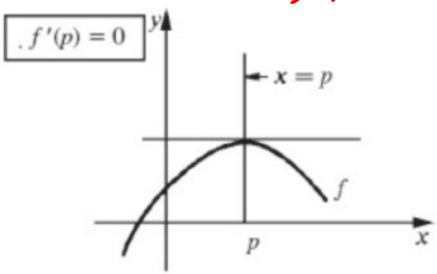
$$y = f'(p)(x-p) + f(p)$$

é a eq. da reta tangente em $(p, f(p))$.

A reta que passa por $(p, f(p))$, e que é perpendicular à reta tangente acima, denomina-se *reta normal* ao gráfico de f em $(p, f(p))$. Se $f'(p) \neq 0$, a equação da reta normal no ponto de abscissa p será

$$\boxed{y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x - p).}$$





→ reta $x = p$ é normal.

Seção 7.16 - Exercícios

1. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto de abscissa 8

6. A reta s passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b).

a) Determine (a, b).

b) Determine a equação de s.

10. Sabe-se que r é uma reta que passa pelo ponto (0, 2) e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$. Determine r.

11. Determine a equação de uma reta, não vertical, que passa pelo ponto $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ e que seja normal ao gráfico de $y = x^3$.

12. Determine todos os pontos (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tais que por (a, b) passem duas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$.

15. Sabe-se que r é uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e de $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$. Determine r.