Monitoria - 31/05/2021

Def: f uma fç, $p \in dom(f)$. Dizemos que f tem derivada em p se o seguinte limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$ existe e é finito.

7.3. DERIVADAS DE x^n e $\sqrt[n]{x}$

Teorema. Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$.
c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, em que $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$).

$f(x) = x^{t}$, $f'(x) = t\,x^{t-1}$, t real

7.4. DERIVADAS DE e^x e $\ln x$

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação

a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.
b) $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

7.5. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

a) $\text{sen}'x = \cos x$.
b) $\cos' x = -\text{sen}\, x$.
c) $\text{tg}'x = \sec^2 x$.
d) $\sec' x = \sec x \,\text{tg}\, x$.
e) $\text{cotg}'x = -\text{cosec}^2 x$.
f) $\text{cosec}'x = -\text{cosec}\, x \,\text{cotg}\, x$.

5. Seja $g(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

$$e^{\ln(y)} = y$$

$$a^{\log_a x} = x \quad (\text{def. de } \log_a)$$

$$\parallel$$

$$e^{\overbrace{\boxed{\log_a x}}^{g(x)} \cdot \ln(a)} = x$$

$$e^{g(x)\ln(a)} \cdot \ln(a) \cdot g'(x) = 1$$

x

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a x \cdot \ln(a) = \ln(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

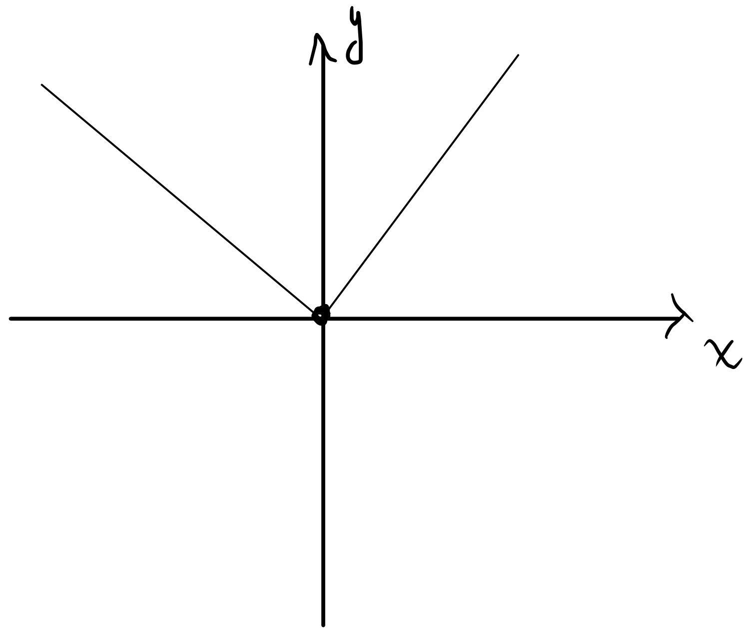
$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x}$$

7.6. Derivabilidade e continuidade

Teorema. Se f for derivável em p, então f será contínua em p.

Uma função pode ser contínua sem ser derivável!



1. Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$.

a) *f* é contínua em 2? Por quê?

b) *f* é derivável em 2? Por quê?

a) continuidade em 'p':

1) $p \in \text{dom}(f)$

2) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

1) ✓

2) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

Portanto, não existe o limite quando x tende a 2.

$\therefore$ A fç não é contínua.

b) f não é derivável em 2 (pois não é contínua)

2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) f é derivável em 0? Justifique.
b) f é contínua em 0? Justifique.

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 .$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(x^2 - 0)}{x} = 0 \therefore \text{o limite existe.}$$

$\therefore$ f é derivável em '0', e $f'(0) = 0$.

b) Sim, pois é derivável em '0'.

7.7. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Teorema 1. Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p e têm-se

(D1) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.
(D2) $(kf)'(p) = kf'(p)$.
(D3) $(f \cdot g)'(p) = f'(p)\, g(p) + f(p)\, g'(p)$.

(D1) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.
(D2) $[kf(x)]' = kf'(x)$.
(D3) $[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

(D4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Teorema 2. (*Regra do quociente*). Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ será derivável em p e

(D4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$.

(Em palavras: *a derivada de um quociente é igual à derivada do numerador multiplicado pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador*.)

Exercícios (7.7)

7. Calcule $f'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$e)$ $5x + \dfrac{x}{x-1}$

$$f'(x) = 5 + \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = 5 \; \frac{-1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

$x^{1/4}$

$h)$ $\dfrac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2+3}$

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{4} x^{-3/4}\right)(x^2+3) - 2x\left(x + \sqrt[4]{x}\right)}{(x^2+3)^2}$$

9. Calcule $f'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \sec'(x) = \frac{+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = tg(x) \cdot \sec(x)$$

g) $\dfrac{\sec x}{3x + 2}$

$$f'(x) = \frac{(tg(x) \cdot \sec(x))(3x+2) - 3\sec(x)}{(3x+2)^2}$$

n) $x^2 + 3x \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = 2x + 3\,tg(x) + 3x \cdot \sec^2(x)$$

12. Calcule $f'(x)$.

c) $f(x) = e^x \cos x$

$$f'(x) = e^x \cdot \cos(x) + e^x(-\operatorname{sen}(x)) = e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$$

i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

14. Calcule $f'(x)$ sendo $f(x)$ igual a

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x + (1+\sqrt{x}) \cdot e^x\right)$$

d) $(1 + \sqrt{x})\, e^x \operatorname{tg} x$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (1+\sqrt{x})\, e^x$$

$$g(x) = \operatorname{tg}(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot \operatorname{tg}(x) + f(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x + (1+\sqrt{x})\, e^x\right) \cdot \operatorname{tg}(x) + (1+\sqrt{x})\, e^x \sec^2(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

tbm vale

7.9. NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

$y = f(x)$ → var. independente

var. dependente

$$\boxed{f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

Notação: Se a função vem dada por $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ é a notação de Leibniz para a derivada de f em x, ou seja, $f'(x)$.

A notação $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ é usada para indicar a derivada de $y = f(x)$ em $x = x_0$: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = f'(x_0)$.

EXEMPLO 6. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis num mesmo conjunto A. Segue das regras de derivação que para todo x em A, tem-se

a) $y = u + v \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[u + v] = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$.

b) $y = uv \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(uv) = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dx}$.

c) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{\dfrac{du}{dx}v - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ em todo $x \in A$, com $v(x) \neq 0$. ■

Exercícios (7.9)

2. Seja $y = \dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}$. Calcule.

$a)\ \dfrac{dy}{dx}$

$b)\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x+\sqrt{x}) - x^3\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2}$$

b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3(2) - \left(1+\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{9/2}{4} = \frac{9}{8}$$

4. Considere a função $y = xt^3$, na qual $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}$ sabendo que $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

7. Seja $y = \dfrac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.