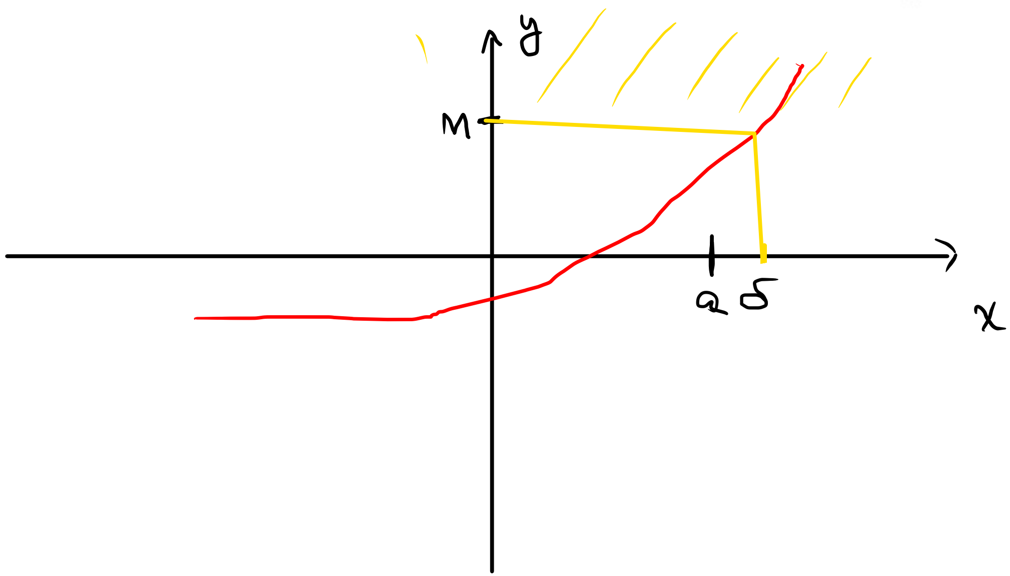
Seção 4.2 - Limites Infinitos

Definição 1. Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$(a)\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$$

$$(b)\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$$



a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \text{ real}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty & \text{se } L > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty$

a) $\infty + \infty = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

c) $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

b) $+\infty \cdot L = +\infty$, se $L > 0$

$+\infty \cdot L = -\infty$, se $L < 0$

$$d)\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \text{ real}, \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$e)\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \text{ real}, \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$f)\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \text{ real}, \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = -\infty & \text{se } L > 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty & \text{se } L < 0. \end{cases}$$

<u>Ind</u>:

$$\left.\begin{aligned} &+\infty + (-\infty) \\ &\pm\infty \cdot (0) \end{aligned}\right\} \text{indeterminado}$$

Exercício

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\operatorname{sen}\left(1/x\right)\to$ Não tem limite

$g(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=2 \quad (*)$$

$$f(x)=\begin{cases}(*), & \text{se } x\neq 1\\ 2, & \text{se } x=1\end{cases}$$

Provar:

$$\lim_{x \to 1} (x^2+1) =$$

Quero: $\forall \epsilon > 0 \, , \exists \delta > 0$ tq

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-3| < \epsilon$$

Seja ϵ

Binômio de Newton

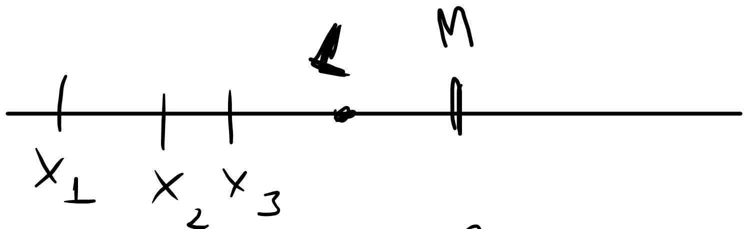
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \frac{n!}{n!\,0!} b^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!} a\, b^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{0!\,n!} a^n$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$\binom{n}{i} = C_{n,i} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

Teor: Dada uma seq. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reais, se ela for limitada superiormente e crescente, então tem limite.



$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

def: $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$$

$u = 3x \quad \therefore \quad x = \frac{u}{3}$

$x \to 0, u \to 0$

$$3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \cdot 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \lim_{u\to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 3$$

- $$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u\cdot(u+2)} = \frac{1}{2}$$

$f(x)$

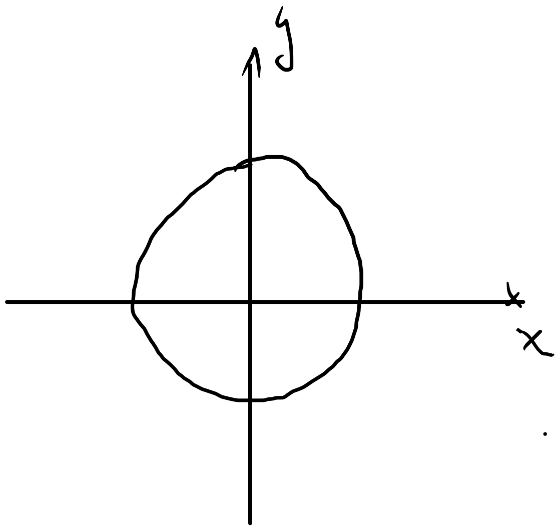
$$\frac{\operatorname{sen}(\underbrace{x-1}_{u})}{(x+1)\cdot(\underbrace{x-1}_{u})}$$

$u = x-1 \Rightarrow x+1 = u+2$

$x\to 1,\ u\to 0$

$\text{sen}(2k\pi) = 0$, $\forall k > 0$ natural

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $\forall k > 0$ natural



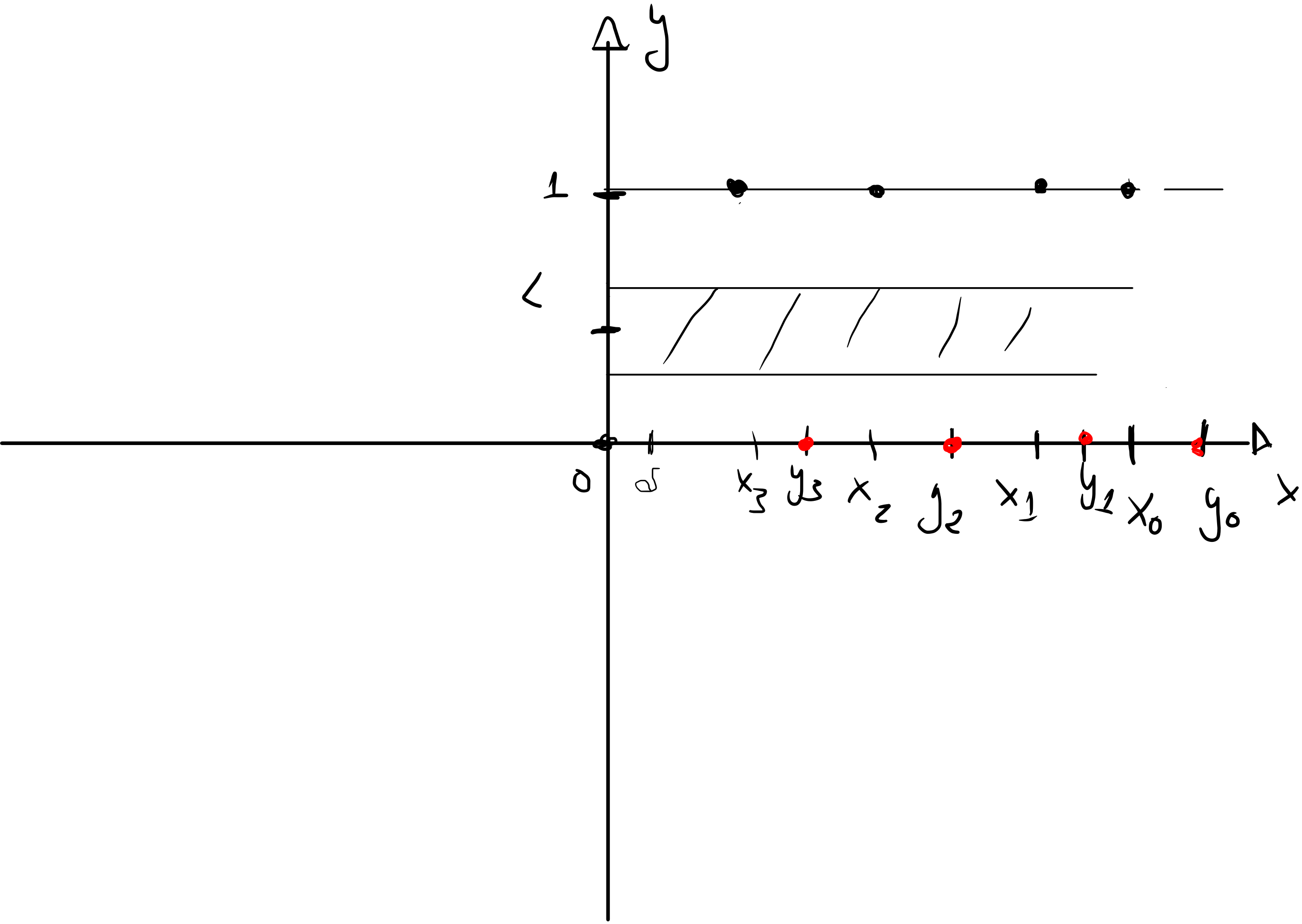
$f(x_k) = 1$

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x_k = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$$

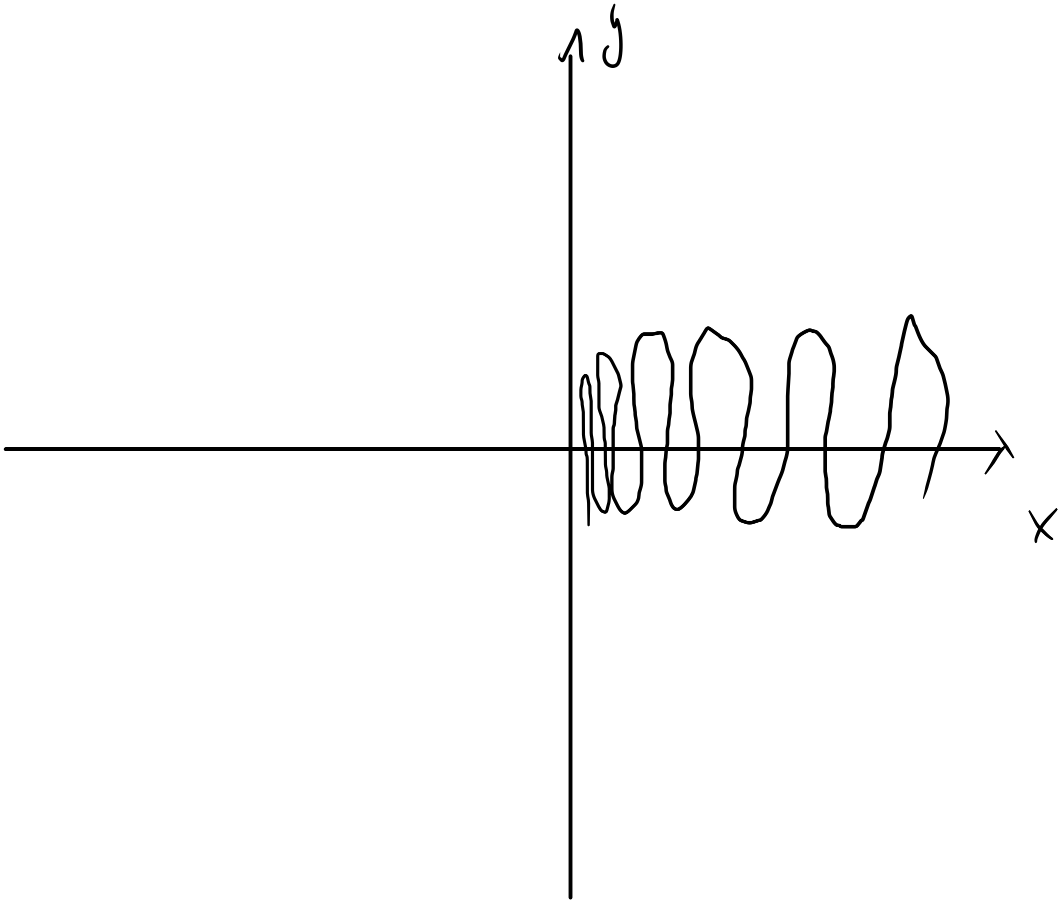
$$x_1 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{\pi/2 + 4\pi}, \quad \ldots$$

$$y_j = \frac{1}{2j\pi}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

$$f(y_j) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_j}\right) = 0$$



y
1
L
0
δ
x3
y3
x2
y2
x1
y1
x0
y0
x


y
x

As propriedades continuam válidas substituindo "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$".

Obs: $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\forall n > 0$ natural.

O

Exercícios (4.2)

1. Calcule.

b) $\lim_{x \to +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

i) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$

2.

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$

d) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{3x^3 + 2})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}\right)$

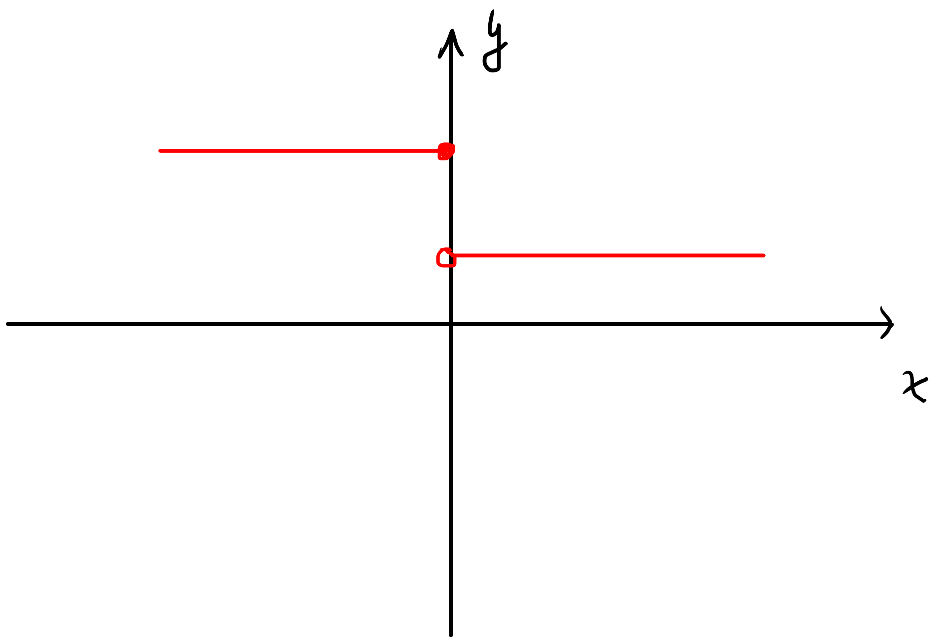
6. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

7. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

Seção 3.4 - Limites Laterais

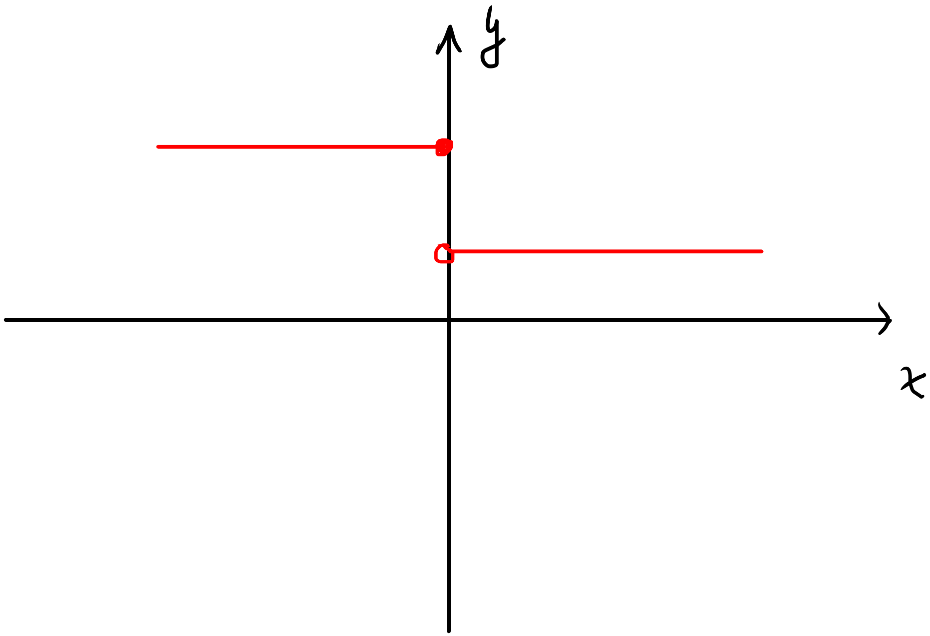
Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$



Suponhamos, agora, que exista um real a tal que $]a, p[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que} \\ p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$



Exemplo:

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}$$

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$$

Teorema. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ \text{e } \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Observações

1. Se $\lim_{x \to p^+} f(x)$ e $\lim_{x \to p^-} f(x)$ existirem e forem *diferentes*, então $\lim_{x \to p} f(x)$ não existirá.

2. Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e se, em p, um dos limites laterais não existir, então $\lim_{x \to p} f(x)$ não existirá.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{|x-1|} \quad \text{existe?}$$

Exercícios (3.4)

1. Calcule, se existir. Se não existir, justifique.

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

2. A afirmação

"$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f$ conínua em p" é falsa ou verdadeira? Justifique.

Definição 2. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{com } p + \delta < b, \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$$

EXEMPLO 6. Suponha que $\lim_{x \to p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Prove que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exercícios (4.2)

4. Calcule:

b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{4}{x-3}$

e) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x+1}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^2 - x}$

m) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

r) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x^2 - 4}{1 - x^2}$