Monitoria - 12/05/2021

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

- $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$

- $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}$

$\forall x \neq 5$: $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}} \cdot \dfrac{(\sqrt{x+5} + \sqrt{10})}{(\sqrt{x+5} + \sqrt{10})} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x+5} + \sqrt{10})}{(x-5)} =$

$$= \frac{(\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{5}})(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})(\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{5}})}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{2},$$

$$= f(5) = L$$

$$\therefore \boxed{L = \sqrt{2}}$$

5. Calcule.

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x - 6 & x - 2 \\ \hline
-x^4 + 2x^3 & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
\overline{\quad 2x^3 - 5x - 6} & \\
-2x^3 + 4x^2 & \\
\overline{\quad 4x^2 - 5x - 6} & \\
-4x^2 + 8x & \\
\overline{\quad 3x - 6} & \\
-3x + 6 & \\
\overline{\quad 0} &
\end{array}
$$

$x^4 - 5x - 6 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3)$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \;\Big|\; x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2$$

$$-x^3 + 2x^2$$

$$-3x^2 + 8x - 4$$

$$+3x^2 - 6x$$

$$2x - 2$$

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x - 2)(x^2 - 3x + 2)$$

Seção 3.5 - Limite de função composta.

Suponha que f e g sejam funções tais que $Im(f) \subseteq D_g$. Queremos estudar $\lim_{x \to p} g(f(x))$.

Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$, é razoável esperar que

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Mas, cuidado, isso não vale sempre. Veremos os casos em que vale.

Exemplo: (Não vale sempre)

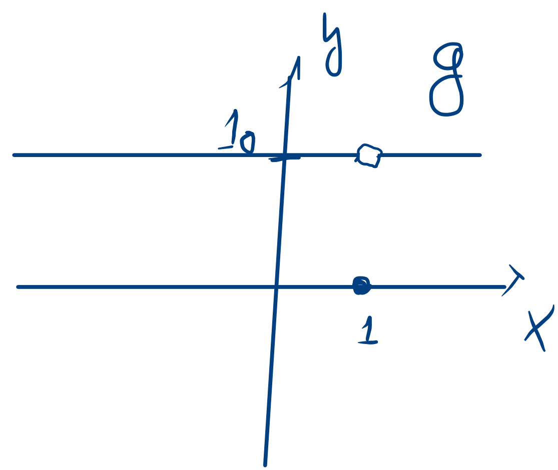
$$g(u) = \begin{cases} 10, & \text{se } u \neq 1 \\ 0, & \text{se } u = 1 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} \overset{1}{f(x)} = 1 \quad ; \quad \lim_{u \to 1} g(u) = 10$$

$$\neq$$

Mas $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 0$.

$$g(f(x)) = g(1) = 0$$



$F(x) = g(f(x))$, $x \in D_f$

Suponhamos que existam funções $g(u)$ e $u = f(x)$, no qual g ou é contínua em a ou não está definida em a, tais que

$$F(x) = g(u) \text{ em que } u = f(x),\ x \in D_f,\ \lim_{x \to p} f(x) = a \ (u \to a \text{ para } x \to p)$$

e que $\lim_{u \to a} g(u)$ exista. Então $g(f(x))$

$$\lim_{x \to p} F(x) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Ou seja:

Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$, $\lim_{u \to a} g(u)$ existir,

e se vale

i) g não está definida em "a";

<u>ou</u>

ii) g é contínua em "a",

então $\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u)$.

Teorema 1. Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im} f \subset D_g$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$ contínua em a, então,

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Teorema 2. Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im} f \subset D_g$, $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e $\lim_{u \to a} g(u) = L$. Nestas condições, se existir um $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$, então $\lim_{x \to p} g(f(x))$ existirá e

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Exercícios -

1. Calcule.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

$x \to 1, \quad u \to 4$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$.

$$x^2+3 = u \Rightarrow x^2 = u-3 \Rightarrow x^2-1 = u-4$$

$$\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} = \frac{\sqrt{u}-2}{u-4} = \frac{\cancel{\sqrt{u}-2}}{(\cancel{\sqrt{u}-2})(\sqrt{u}+2)} = \frac{1}{\sqrt{u}+2} = g(u)$$

$$\lim_{x \to 1} g(f(x)) = \lim_{u \to 4} g(u) = \frac{1}{4}.$$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1}$

$x \to 1 \ , \ u \to 8$

$u = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{u-5}{3}$

$x^2 = \frac{(u-5)^2}{9}$

$$\frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{u} - 2}{\frac{(u-5)^2}{9} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{u} - 2)9}{u^2 - 10u + 16}$$

$$u^2 - 10u + 16 = 0 \qquad u = \frac{10 \pm 6}{2} \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Delta = 36$$

$$u^2 - 10u + 16 = (u-2)(u-8)$$

$$u - 8 = (\sqrt[3]{u} - 2)(\sqrt[3]{u^2} + 2\sqrt[3]{u} + 4)$$

$$\frac{9(\cancel{\sqrt[3]{u} - 2})}{(u-2)(\sqrt[3]{u^2} + 2\sqrt[3]{u} + 4)\cdot(\cancel{\sqrt[3]{u} - 2})}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1} = \frac{9}{(u-2)\left(\sqrt[3]{u^2}+2\sqrt[3]{u}+4\right)}$$

$f(g(x))$ $\qquad$ $g(u)$

$x \to 1$ e $\therefore$ $u \to 8$

$u = 3x+5 = f(x)$

$$\lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{u\to 8} g(u) = \frac{9}{6 \cdot 12} = \frac{1}{8}$$

Seção 3.6 - Teorema do confronto

Teorema (*do confronto*). Sejam f, g, h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

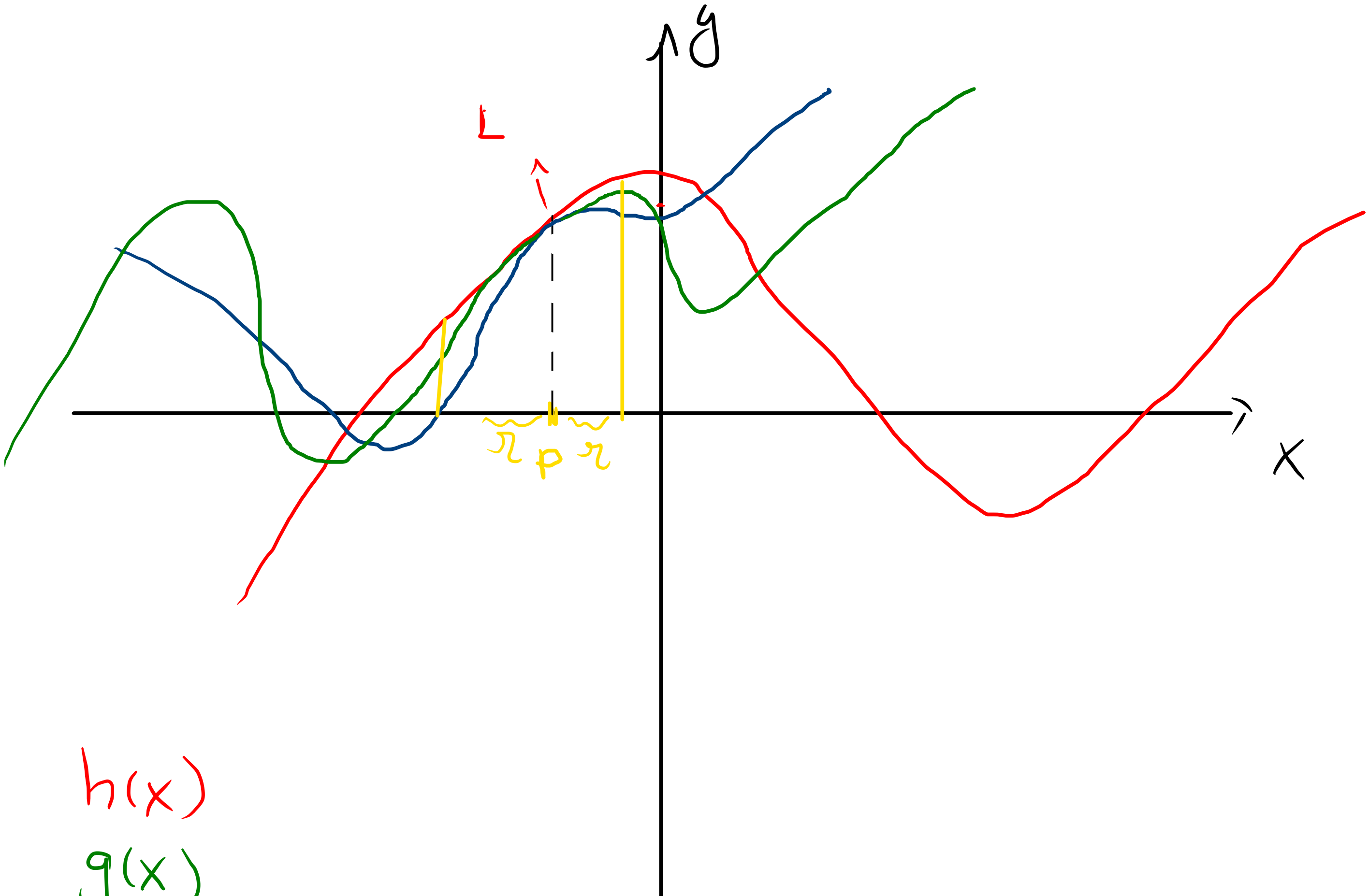
$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



$h(x)$

$g(x)$

$f(x)$

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

EXEMPLO 2. Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A tais que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $| g(x) | \leq M$ para todo x em A, em que $M > 0$ é um número real fixo. Prove que

1

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0.$$

1. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$, $-x^2 + 3x \leqslant f(x) < \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$(x+1)(x-1)$$

$$\lim_{x \to 1} (-x^2 + 3) = 2 \quad e \quad \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$f(x) = -2$, $h(x) = 2$

$g(x) = \operatorname{sen}(x)$

$-2 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 2 \quad \forall x$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 0} h(x) = 2$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

4. *a*) Verifique que $\lim_{x \to 0} \text{sen} \frac{1}{x}$ não existe.

b) Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} x \, \text{sen} \frac{1}{x}$. (Justifique.)

$\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitado.

$\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \lim_{x \to 0} x \, \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\underset{f(x)}{x^2} \cdot \underset{g(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 1$