Monitoria - 10/05/2021 - Exercícios do Capítulo 3.

- Def. de limite e continuidade
- Teo do confronto
- Propriedades de limite e continuidade

Exercícios 3.1

1. Esboce o gráfico da função dada e, [redacted], determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

   a) $f(x) = 2$

   b) $f(x) = x + 1$

   c) $f(x) = x^2$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \geqslant 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

   f) $f(x) = x^2 + 2$

$x \neq 0$

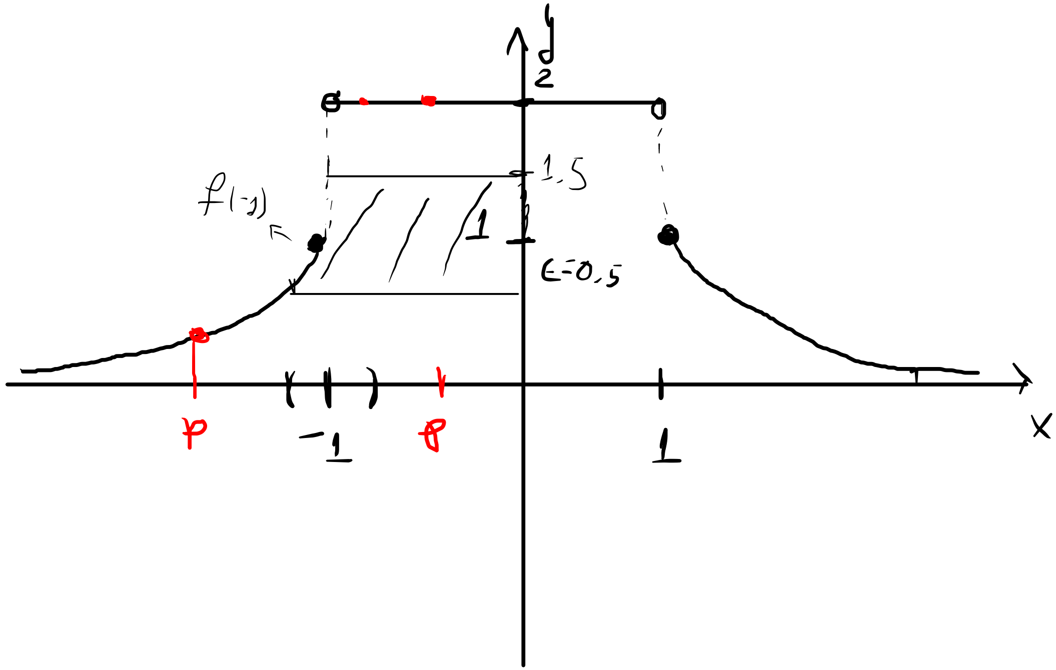
$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

e)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \geqslant 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

$|x| \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$

$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$



Se $|x| > 1$: é contínua.

Se $|x| < 1$: é contínua

Se $x = 1$ ou $x = -1$: não é contínua

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$$

$\rightarrow$ f é contínua em p ($p \in dom(f)$)

se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 4 = L.$$

12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

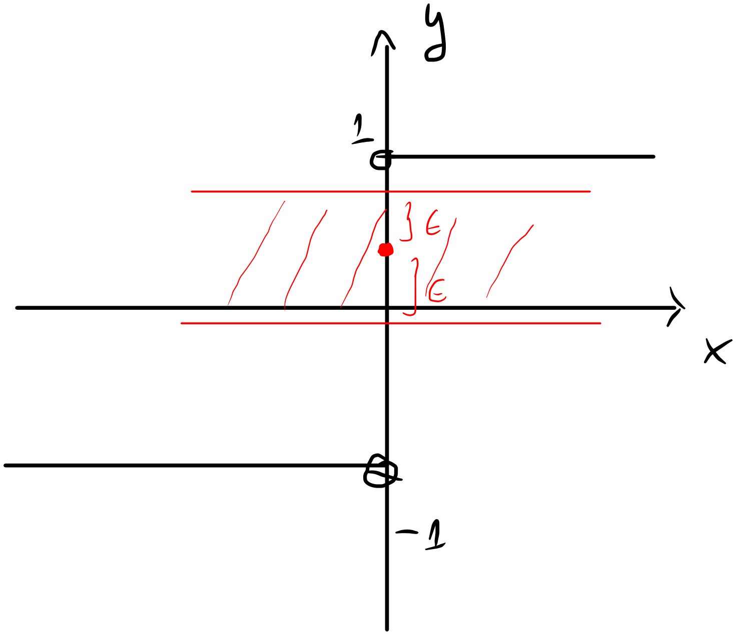
c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$, se existir o limite.

Se $x > 0$: $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

Se $x < 0$: $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$

Não existe.

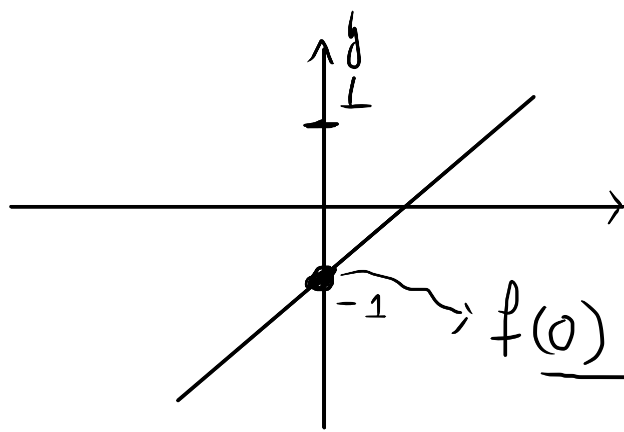


y
1
}ε
}ε
x
−1

12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ em $p = 0$

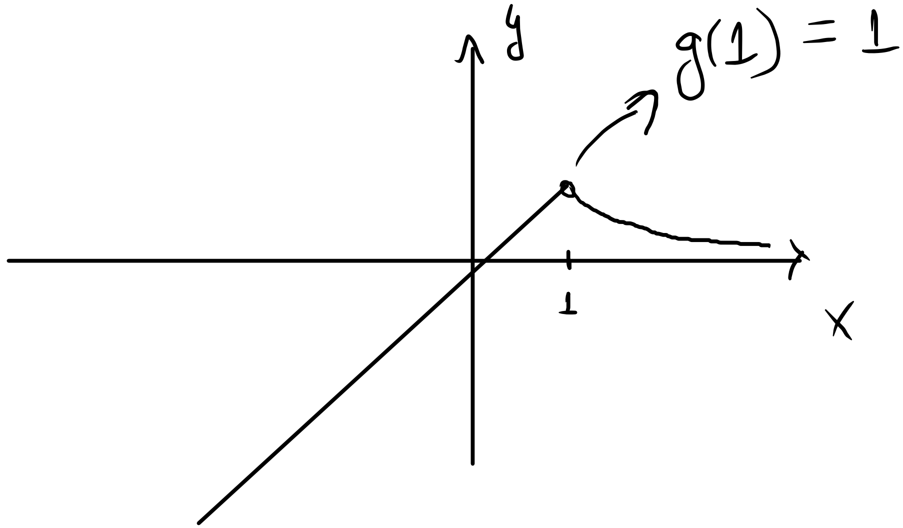
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = (x-1) \quad \forall x \neq 0.$$



$f(0) = -1$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x-1) = -1$$

$$e)\ g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{em } p = 1$$



$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.3: ex1. Calcule e justifique

o) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}}{(\sqrt{x} + 1)\cancel{(\sqrt{x} - 1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$(x - 1) = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$$

s) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(x - 2) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[4]{2^3})$$

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{\cancel{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}}{\cancel{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{x} \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[4]{2^3})} \right] =$$

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}}$$

t) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$ $= \frac{-1}{2}$

u) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{5}}$

$$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2x+3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3} + \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{2x+3} + \sqrt{5})}{2x - 2} =$$

$$= \frac{1(\sqrt{x} - 1)}{2(x - 1)} \cdot (\sqrt{2x+3} + \sqrt{5}) = \frac{1(\sqrt{2x+3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{x} + 1)}$$

$$\hookrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{2x+3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em -1? E em 0? Por quê?

Em -1:

$$\lim_{x \to -1} \left(\underbrace{\frac{x^2 + x}{x+1}}^{f(x)} \right) = \lim_{x \to -1} \frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = -1$$

$\therefore$ f não é contínua em -1

$\therefore$ É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5. Calcule.

$$h)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$$

$o)\ \lim\limits_{x \to p} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$