Monitoria - 03/05

Seção 1.4 - Guidorizzi - Intervalos

Sejam a e b dois reais, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

]

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ $\quad$ ($-\infty$ = menos infinito)

Observação. $-\infty$ não é número, $-\infty$ é apenas um símbolo.

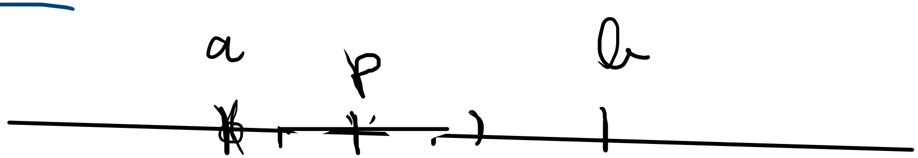
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

- são chamados intervalos abertos
- é chamado intervalo fechado.

3. Sejam $a < b$ dois reais e $p \in]a, b[$. Determine $r > 0$ de modo que $]p - r, p + r[\subset]a, b[$.

$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Sol:



$$\begin{cases} r = \min\{p-a,\, b-p\} \leq p-a \implies \boxed{a-p \leq -r} \\ r \leq b-p \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{a \leq p-r} \\ \boxed{p+r \leq b} \end{array}\right\} \quad]p-r, p+r[\subseteq]a, b[$$

$x \in]p-r, p+r[$

$a \leq p-r < x < p+r \leq b \implies a < x < b$

$\implies x \in]a, b[$

4. Expresse o conjunto das soluções das inequações dadas em notação de intervalo.

b) $\dfrac{2x - 1}{x + 3} > 0$

Seção 1.5 - Guidorizzi - Propriedade dos intervalos encaixantes e propriedade de Arquimedes.

Propriedade dos Intervalos Encaixantes. Seja $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, … uma *sequência* de intervalos satisfazendo as condições:

(i) $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ (ou seja, cada intervalo da sequência contém o seguinte);

(ii) para todo $r > 0$, existe um natural n tal que

$$b_n \cancel{- a_n} < r$$

(ou seja, à medida que n cresce o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ vai tendendo a zero).

Nestas condições, *existe um único* real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real α tal que, para todo natural n, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

$$r = \frac{1}{100}$$

$$x = \frac{1}{100}$$

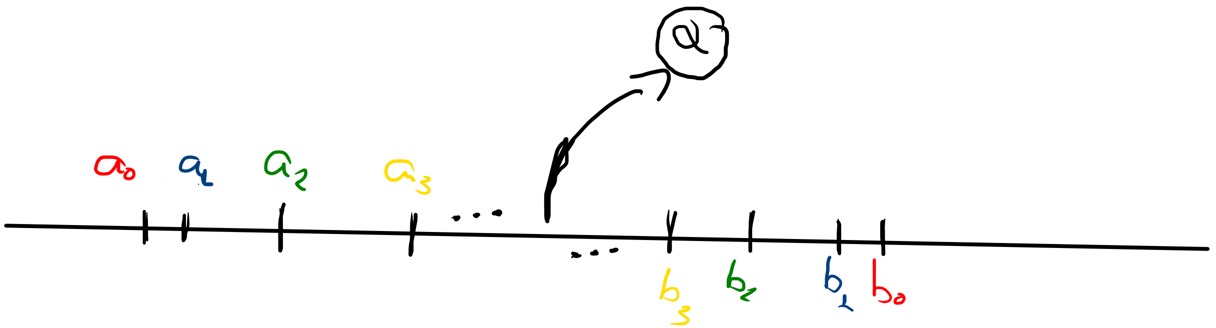
$$y = \frac{10}{3}$$

$$\underset{1\,000}{N} \cdot \frac{1}{100} > \frac{10}{3}$$

Propriedade de Arquimedes. Se $x > 0$ e y são dois reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que

$$nx > y.$$

$$0 \to y = \frac{1}{x}$$



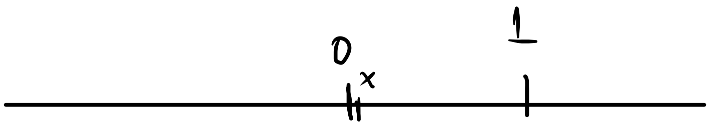
O comprimento dos intervalos vai diminuindo.

- Propriedade dos intervalos encaixantes.

Propriedade de Arquimedes - Exemplo

Dado $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

Sol:



$\exists\, n$ tq $n \cdot x > 1$

Seção 1.6 - Existência de Raízes

Exemplo: A equação $x^2=2$ admite uma única raiz positiva real.

Sol: $1^2 = 1 < 2$ $\quad a_0 = 1$

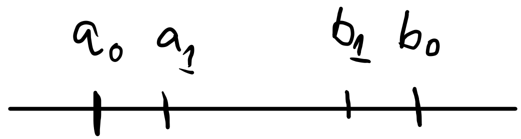
$2 < 2^2 = 4$ $\quad b_0 = 2$

Seja A_1 o maior dentre os números $0, 1, 2, \dots, 9$ tal que $\left(1 + \frac{A_1}{10}\right)^2 \leq 2$.

Então $\left(1 + \frac{(A_1+1)}{10}\right)^2 > 2$ $\quad 1,A_1 = 1 + \frac{A_1}{10}$

Definimos:

$a_0 \le a_1 \le b_1 \le b_0$



$a_n \le b_0$

$b_n \le b_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$1{,}A_1$

$2^2 > 2$

$(1{,}A_1)^2 < 2$

$\vdots$

$(1{,}4)^2 < 2$

$(1{,}5)^2 > 2$

$\boxed{A_1 = 4}$

$(1{,}4)^2 < 2$

$$a_1 = 1 + \frac{A_1}{10} \quad ; \quad b_1 = 1 + \frac{(A_1+1)}{10} \qquad b_1 - a_1 = \frac{1}{10}$$

Próximo passo (segundo dígito):

Seja $\boxed{A_2}$ o maior entre $0, 1, \dots, 9$ tal que $\left(1 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{100}\right)^2 < 2$.

$$a_2 = 1 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{100} \quad ; \quad b_2 = 1 + \frac{A_1}{10} + \frac{(A_2+1)}{100}$$

$$a_2^2 \leq 2 \qquad b_2^2 > 2 \qquad b_2 - a_2 = \frac{1}{100}$$

$$b_n - a_n = 10^{-n}$$

Prosseguindo assim, obtemos intervalos

$[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ...

tais que:

i) $a_n^2 < 2 < b_n^2$ ✓, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $b_n - a_n = 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ✓

iii) $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ ✓

iv) Dado $r > 0$, pela propriedade de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$.

Em particular, $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < r$. ✓

$n < 10^n$

Propriedade dos Intervalos Encaixantes. Seja $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, … uma *sequência* de intervalos satisfazendo as condições:

(i) $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ (ou seja, cada intervalo da sequência contém o seguinte);

(ii) para todo $r > 0$, existe um natural n tal que

$$b_n - a_n < r$$

(ou seja, à medida que n cresce o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ vai tendendo a zero).

Nestas condições, *existe um único* real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real α tal que, para todo natural n, $a_n \le \alpha \le b_n$.

Propriedade de Arquimedes. Se $x > 0$ e y são dois reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n tal que

$$nx > y.$$

Portanto:

$$a_n - b_n < \varepsilon$$

Pela Propriedade dos intervalos encaixantes existe um único $\underline{\alpha}$ tal que $a_n \leq \alpha \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ($\Leftrightarrow$ $\underline{a_n^2 \leq \alpha^2 \leq b_n^2}$)

Quem é α?

Observe que $[a_0^2, b_0^2]$, $[a_1^2, b_1^2]$, ... também satisfaz a $\underline{\text{P.I.}}$E. De fato:

$$0 \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$$

$$0 \leq a_{n-1}^2 \leq a_n^2 \leq b_n^2 \leq b_{n-1}^2$$

EXEMPLO 4. Suponha $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Prove:

a) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

b) $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

c) $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

(i) é satisfeita, conforme o exemplo acima

(ii) Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n).(a_n + b_n) \leq (b_n - a_n).2b_0$

→ Dado $r > 0$, por hipótese, existe n' tal que $a_{n'} - b_{n'} < \dfrac{r}{2b_0}$. Portanto:

$(b_{n'}^2 - a_{n'}^2) \leq (b_{n'} - a_{n'}).2b_0 < r.$

Quero: Dado $r>0$, exista n natural tq

$b_n^2 - a_n^2 < r$.

$$\left.\begin{matrix} b_n \leq b_0 \\ a_n \leq b_0 \end{matrix}\right\} a_n + b_n \leq 2b_0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

- $(b_n^2 - a_n^2) = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq (b_n - a_n) 2b_0$

$\rightarrow r' = \dfrac{r}{2b_0} > 0$. Aplicar PIE (item ii)

$\Rightarrow \exists n' \in \mathbb{N}$ $(b_{n'} - a_{n'}) \leq r' = \dfrac{r}{2b_0} \Rightarrow 2b_0(b_{n'} - a_{n'}) \leq$

$\leq r$

$\Rightarrow (b_{n'}^2 - a_{n'}^2) \leq r$

Portanto, $\alpha^2 = 2$, por unicidade da PIE.

Conclusão: Existe um real $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = 2$. Está provada a existência.

Unicidade: Se $\beta > 0$ também é tal que $\beta^2 = 2$, então $\alpha^2 = \beta^2$ e, portanto, $\alpha = \beta$.

> ***Teorema.*** Sejam $a > 0$ um real e $n \geq 2$ um natural. Então existe um único real $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha^n = a$.

Notação. Sejam $a > 0$ um real e $n \geq 1$ um natural. O único real positivo α tal que $\alpha^n = a$ é indicado por $\sqrt[n]{a}$. Dizemos que α é a *raiz n-ésima* (ou de ordem n) positiva de a.

$\sqrt{x^2} = |x|$

Sejam $a > 0$ e $b > 0$ dois reais, $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois naturais e p um inteiro. Admitiremos a familiaridade do leitor com as seguintes propriedades das raízes:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} &=&\ \sqrt[n]{ab}\\
&(2)\ \sqrt[n]{a^p} &=&\ \sqrt[mn]{a^{mp}}\\
&(3)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &=&\ \sqrt[mn]{a}\\
&(4)\ a < b &\Leftrightarrow&\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.
\end{aligned}
$$

→ Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $n \in \mathbb{N}$ for ímpar, então existe um único real α tal que $\alpha^n = a$.

Sol: