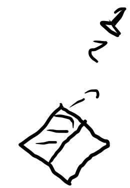
26/04/2021 - Monitoria

Seções 1.1, 1.2 e 1.3 - Guidorizzi

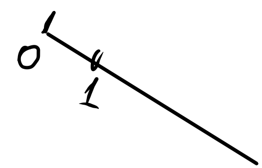
conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

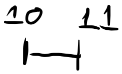
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

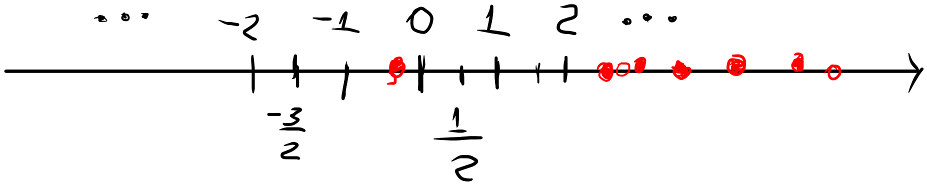


$$\mathbb{R} = ?$$

$$\frac{102}{10} = \frac{100}{10} + \frac{2}{10} = 10 + \frac{2}{10}$$



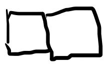
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

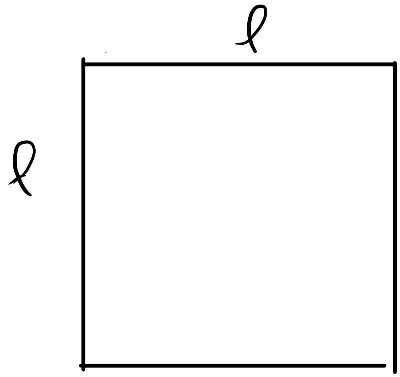


↘ Cada número racional é representado por um ponto da reta.

Pergunta: Todo ponto da reta é racional?

Quero um campo quadrado com área de $2m^2$.





Onde devo marcar a régua?

1,41

$$\ell^2 = 2$$

ℓ pode ser racional? Vamos supor que sim.

$\ell^2 = 2$

(*) $\ell = \dfrac{a}{b}$ (fração irredutível)

$\dfrac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow \overset{\text{par}}{a^2} = 2 \cdot b^2$ (*)

a^2 par $\Rightarrow$ a par $\Rightarrow$ a é divisível por 2.

$\dfrac{a}{2} = \overset{\text{inteiro}}{x} \Rightarrow a^2 = 4x^2 = 2 \cdot (2x^2)$ (*) $b^2 = 2x^2$

b é divisível por 2.

Absurdo. Logo, ℓ não é racional.

→ A nossa régua tem "buracos".

$\mathbb{R}$: completar a régua.

$a \leq b$

A ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$:

Propriedades:

para todo

O1 (Reflexiva): $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq x$ ✓

O2 (Anti-simétrica): $\forall x, y \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y)$

O3 (Transitiva): $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

O4: $\forall x, y \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

OA (compatibilidade com a adição):

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$$

OM (compatibilidade com a multiplicação):

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x \leq y \text{ e } \underline{0 \leq z} \Rightarrow xz \leq yz)$$

- Todos os outros fatos sobre ordem são demonstrados a partir das propriedades acima.

Exemplos:

1) Para todos $x, y, z, w \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ e \\ z \leq w \end{array}\right\} \Rightarrow x+z \leq y+w$$

dem:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \overset{OA}{\Rightarrow} x+z \leq \overset{\overset{z+y}{\uparrow \text{com.}}}{y+z} \\ z \leq w \overset{OA}{\Rightarrow} z+y \leq w+y \end{array}\right\} \overset{O3}{\ } x+z \leq w+y$$

2) Lei do Cancelamento

Quaisquer que sejam x, y, z reais,

$$x + z \leq y + z \Rightarrow x \leq y$$

dem:

$$x + z \leq y + z \overset{OA}{\Rightarrow} (x+z) + (-z) \leq (y+z) + (-z)$$

Ass.

$$\Rightarrow x + (\underbrace{z - z}_{0}) \leq y + (\underbrace{z - z}_{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq y.$$

3) Para todos x, y, z, w reais,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ \quad e \\ 0 \leq z < w \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yw$$

dem:

Quaisquer que sejam os reais x, y, z, w, tem-se:

a) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
b) $z > 0 \Leftrightarrow z^{-1} > 0$.
c) $z > 0 \Leftrightarrow -z < 0$.
d) se $z > 0$, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$.
e) se $z < 0$, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

(Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número ne vo, o sentido da desigualdade muda.)

f) $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ \text{e} \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yw.$

g) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

h) (*Tricotomia.*) Uma e somente uma das condições abaixo se verifica:

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y.$$

i) (*Anulamento do produto.*)

$$xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

(Um produto é nulo se e somente se um dos fatores for nulo.)

[Monitoria]

Ex: Resolva a inequação $2x+3 < 7x-1$.

Sol:

Estudo do sinal

i) Estude o sinal de $2x + 4$.

Sol:

ii) Estude o sinal de $\dfrac{x+4}{2x-1}$.

Exemplo: Resolva a inequação $\frac{2x-1}{x+3} \geq 1$.

Importante: - Questão 5 da seção 1.2

5. Verifique as identidades.

a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

d) $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$
e) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$
onde $n \neq 0$ é um natural.

As fatorações acima são importantes para fazer o estudo do sinal de expressões mais complicadas.