9.8 $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ em $[0, \pi]$.

↑ contínua ↑ compacto

$f(0) = 0 - 1 = -1$ valor mínimo

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ valor máximo

$f(\pi) = 0 - (-1) = 1$

$\therefore$ f assume máximo e mínimo.

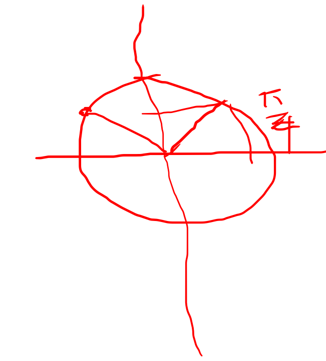
$f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

$f'(x) = 0 \iff \cos x = -\operatorname{sen} x$

$\iff x = \frac{3\pi}{4}$

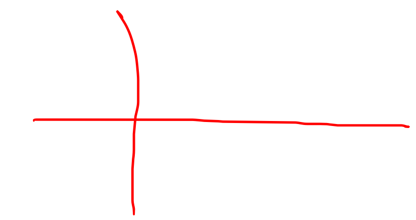
Ponto crítico em $]0, \pi[$: $\frac{3\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}$



$|\cos x| = |\operatorname{sen} x|$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$



0 é ponto de mínimo

$\frac{3\pi}{4}$ é ponto de máximo.

candidatos a extremante:

$0, \frac{3\pi}{4}$ e π

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-2x^2}$ em $]0,2[$

$$f'(x) = \frac{-(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2)^2}$$

$(x^3-2x^2)^2 > 0 \quad \forall x \in]0,2[$

$$-(3x^2-4x)=0 \Leftrightarrow -x(3x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{4}{3}$$

	0		$\frac{4}{3}$		2
$-(3x^2-4x)$	$-$ 0	$+$	0	$-$	$-$ $-$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	

Ponto de máximo

não tem mínimo

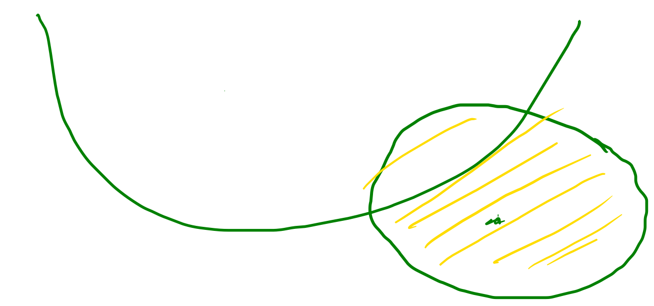
Pg 276 Ex. 13

Qual o ponto P da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo de $(3,0)$? Seja $(a,b) = P$ tal ponto.

Mostre que a reta que passa por $(3,0)$ e (a,b) é normal à curva em (a,b).

distância entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1)

$$= \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$



$f(x)$ distância ao quadrado entre $(3,0)$ e (x, x^2)

$$f(x) = (3-x)^2 + (x^2-0)^2$$
$$= 9 - 6x + x^2 + x^4$$
$$f'(x) = -6 + 2x + 4x^3$$
$f'(x) = 0$ se $x = 1$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 + 0x^2 + 2x - 6 & x-1 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 4x^2 & 4x^2 + 4x + 6 \\ \hline \quad 4x^2 + 2x & \\ \quad -4x^2 + 4x & \\ \hline \qquad 6x - 6 & \\ \qquad -6x + 6 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$f'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

$2x^2 + 2x + 3 = 0$: $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$

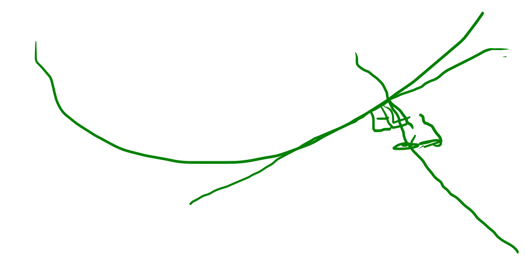
$\therefore$ não possui raízes.

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

a distância é mínima em $P = (1, 1^2) = (1, 1)$.

$g(x) = x^2$

reta tangente ao gráfico de g em $(1,1)$:



$g'(x) = 2x$

$g'(1) = 2$

$s \quad \boxed{(y-1) = 2(x-1)}$

a reta r que passa por $(3,0)$ e $(1,1)$

inclinação é $\dfrac{1-0}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$

$2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \implies$ r e s são normais

$\therefore$ r é normal ao gráfico de g em $(1,1)$.

Pg 276 4. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.

Sol: $x > 0$

$\rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ é mínimo

$$f'(x) = 1 - 2\frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$

$$x^3 - 2 = 0 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

a soma é mínima p/ $x = \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - 2 = \underline{(x - \sqrt[3]{2})}\underbrace{(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})}$$

$\Delta = \sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} < 0$

não tem raízes reais

		0		$\sqrt[3]{2}$	
$x^3 - 2$	−	−	—	0	+
x^3	−	0	+	+	+
f'			—	0	+
			↘	→	↗

ponto de mínimo

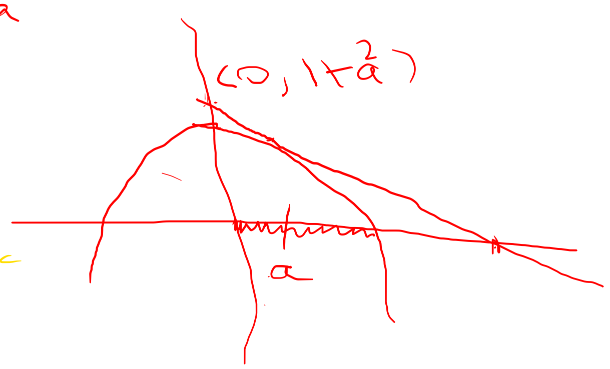
276 8. Considere $y = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$. Traçar uma tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma seja mínima.

área triângulo associada a $(a, f(a))$

é

$$\boxed{h(a) = \frac{1+a^2}{2a} \cdot \frac{(1+a^2)}{2}}$$ altura

base



$f'(a) = -2a$

reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

é

$$\boxed{(y - f(a)) = (x-a)(-2a)}$$

$$\boxed{y - 1 + a^2 = (x-a)(-2a)}$$

$y = 0$

$0 - 1 + a^2 = (x-a)(-2a)$

$x - a = \dfrac{1-a^2}{2a}$

$x = \dfrac{1-a^2}{2a} + a = \dfrac{1-a^2+2a^2}{2a} = \dfrac{1+a^2}{2a}$

$x = 0 \Rightarrow y = (-a)(-2a) + 1 - a^2$

$= 2a^2 + 1 - a^2 = 1 + a^2$

$$h(x) = \frac{(1+x^2)^2}{4x} \qquad \underbrace{0 < x \leq 1}$$

$$h'(x) = \frac{2(1+x^2)\cdot 2x \cdot 4x - (1+x^2)^2 \cdot 4}{16x^2}$$

$$> 0 \wedge x > 0$$

$$= \frac{1+x^2}{16x^2}\left[16x^2 - 4 - 4x^2\right]$$

$$= \frac{1+x^2}{16x^2}\left[12x^2 - 4\right]$$

$$12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

é a área do triângulo de área mínima

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1	
$12x^2-4$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1+x^2}{16x^2}$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
h'				$-$	0	$+$	$+$	
h				$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$		

o ponto de mínimo de h em $]0,1]$ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ex 9.5

Esboce o gráfico

16. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$

$x^2+2x+5=0$ $\qquad \Delta = 4-4\cdot 1\cdot 5<0$

ñ tem raízes reais

$\therefore\ x^2+2x+5>0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$

$\therefore\ \mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\cdot\underbrace{(2x+2)}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$\boxed{x+1=0 \iff x=-1}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\cdot(2x+2)}{x^2+2x+5}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+5-(\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1)}{(x^2+2x+5)\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{4}{(x^2+2x+5)^{3/2}}>0$$

$x+1$

coef. positive (eq linear)

x		-1	
f'	$-$	0	$+$
	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
f''	$+$	$+$	$+$
	$\cup$	$\cup$	$\cup$

$$\sqrt{x^2+2x+5} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

asymptote/$+\infty$

$|x|=x,\ x\to\infty$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$

$|x|=x,\ x\to\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+5-\cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\overbrace{\left(2+\frac{5}{x}\right)}^{\to 2}}{\cancel{x}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}_{\to 2}} = 1$$

$a = 1$
$b = 1$

asimptota p/ $+\infty$
$y = x + 1$

---

asimptota p/ $-\infty$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$|x| = -x,\ x<0$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} \underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}_{\to 1} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+5}+x)(\sqrt{x^2+2x+5}-x)}{(\sqrt{x^2+2x+5}-x)}$$

$|x| = -x,\ x<0$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+5-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}(2+\frac{5}{x})}{-\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)} = -1$$

$\to 2$

$\to 2$

$a = -1$

$b = -1$

a asymptota p/ $-\infty$

e

$$\boxed{y = -x - 1}$$

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2 + 5} = 2$$