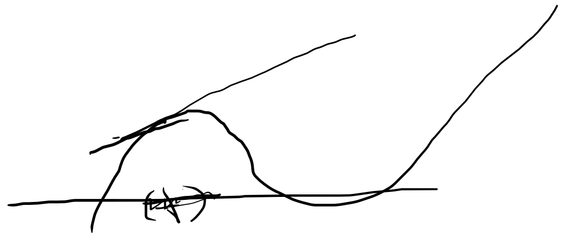
Teor. Seja f uma função inversível com inversa g em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$ e se g for contínua em p então g será derivável em p.

Se f é contínua e estritamente crescente ou estritamente decrescente então f é inversível

Teorema da função inversa.



5. Seja $f(x) = x + x^3$

a) Mostre que f admite função inversa g.

b) expresse $g'(x)$ em termos de g

c) calcule $g'(0)$.

a) $x_0 \neq x_1 \Rightarrow f(x_0) \neq f(x_1)$ [injetora]

$f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$

$\Rightarrow$ f é estritamente crescente

$x_0 \neq x_1 \Rightarrow x_0 < x_1$ ou $x_1 < x_0 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ ou $f(x_1) < f(x_0)$ $\Rightarrow f(x_0) \neq f(x_1)$.

f é sobrejetora

$\forall y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = y$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} (\underbrace{1+x^2}_{\to +\infty}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} (\underbrace{1+x^2}_{\to +\infty}) = +\infty$$

f é contínua em $\mathbb{R}$.

$h(x) = f(x) - y$ é contínua em $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$$\neg \exists x \; h(x) = 0$$

$$f(x) - y = 0$$

$$f(x) = y$$

$\therefore$ f é sobrejetora

$\therefore$ f é bijetora e inversível

$\therefore \exists g.$

b) $1 = x' = (f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \underline{\frac{1}{1+3g^2(x)}}$$

$$f'(x) = 1 + 3x^2$$

c) $g'(0) = \dfrac{1}{1+3g^2(0)} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

$g(0) = x \iff f(x) = 0$

$f(x) = x + x^3 = 0$ $\quad f(0) = 0 \therefore$

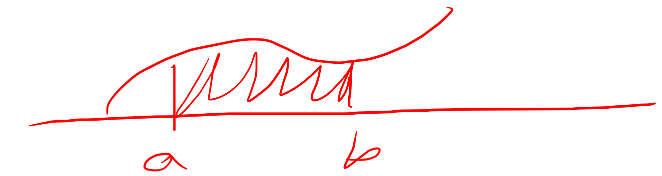
$g(0) = 0$ (já vimos que f é bijetora)

→ Primitiva

Diciamo che F è primitiva di f se

$$F' = f.$$

→ f integrabile e F è prim. di f allora $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$



9 a) $$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\overset{F}{x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}}\Big] = \overset{f}{\underline{\operatorname{arctg} x}}$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg} x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{1+x^2}\cdot\cancel{2}x$$

$$= \operatorname{arctg} x + \cancel{\frac{x}{1+x^2}} - \cancel{\frac{x}{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$$

$\boxed{\int f\,dx}$ primitiva de f

$$\int \cos x\,dx = \underbrace{\operatorname{sen} x + C}_{\text{família de funções}}$$

família de funções

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$(\ln|x|)' \underset{x<0}{=} (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot -1 = \frac{1}{x}$$

$x>0$ $(\ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

19/07 às 10:00
Mecânica

Soltura P2 de Cálculo
19/07 à tarde

→ Entrega 27 à tarde (16:00)