Teo: (L'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$).

Sejam f e g deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em todos os pontos suficientemente próximos de a e $\neq a$

com $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe

(1) e é igual a L.

Dem: Vamos supor que $\boxed{L \in \mathbb{R}}$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty = \lim_{x \to a} g(x)$.

Iremos primeiro fazer

manipulação antes de achamos $\delta > 0$, tal que

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$.

considere y entre x e a.

$\delta > 0$ será escolhido tal que $g'(t) \neq 0$ se $0 < |t-a| < \delta$!

então $g(x) - g(y) \neq 0$

(se fosse 0, $\exists c$ entre x e y tal que $g'(c) = 0$.

$\therefore c \in]x, a[$ $\therefore$ $0 < |c-a| < \delta \Rightarrow g'(c) \neq 0$.

).

Então pelo TVM de Cauchy, existe c_y entre x e y tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}$$

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left(\frac{1-\frac{f(y)}{f(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} \right)$ $\to 0$

$\therefore$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \cdot \left(\frac{\frac{f(x)}{\underbrace{f(y)}_{\to +\infty}} - 1}{\frac{g(x)}{\underbrace{g(y)}_{\to +\infty}} - 1} \right) = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}.$$

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(\frac{1-\frac{g(x)}{g(y)}}{1-\frac{f(x)}{f(y)}} \right)$$

Vamos começar a demonstração. Seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |t-a| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\min\{\varepsilon,1\}}{2}$$

Fixe x_0, x_1 tais que

$0 < |x_i - a| < \delta_1$. $i \in \{0,1\}$

com $x_0 < a < x_1$

basta um x_i de cada lado.

$$\lim_{t\to a} \frac{1 - \frac{g(x_i)}{g(t)}}{1 - \frac{f(x_i)}{f(t)}} = 1$$

$\to 0$

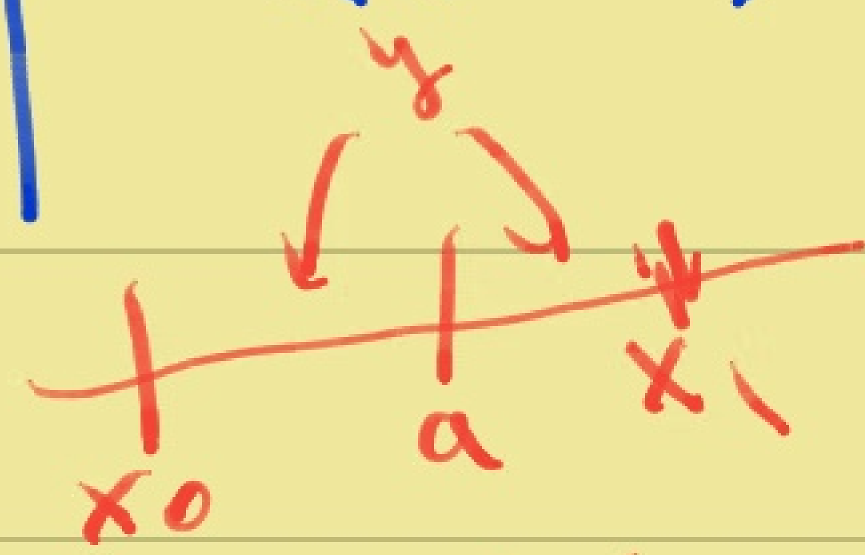
$\to 0$

Existe $\delta < \min\{|a-x_0|, |a-x_1|\}$ tal que

$0<|t-a|<\delta \Rightarrow$

$$i=\{0,1\}, \quad \left| 1 - \frac{1-\frac{g(x_i)}{g(t)}}{1-\frac{f(x_i)}{f(t)}} \right| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

$\Downarrow$ todo y



$|y-a| < \delta < |x_i - a|$

$\Downarrow$ vizinhança

Tome y tal que

$0 < |y-a| < \delta$

e escolha x_j tal que y entre x_j e a.

Pelo cálculo já feito,

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \left(\frac{1-\frac{g(x_j)}{g(y)}}{1-\frac{f(x_j)}{f(y)}} \right)$$

Se $\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} = 0$ então

$$\frac{f(y)}{g(y)} = 0 \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

$|c_y - a| < \delta_1 \rightarrow$ $\subseteq \left] L - \varepsilon, L + \varepsilon \right[$

Vamos supor que $\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \neq 0$. Primeiro, assumimos que

$$\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} > 0.$$

Então

$$\frac{f(y)}{g(y)} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right), \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right) \right[$$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \in \left]\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2}\right[$$

$$\left|\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \leq |L|+1 \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

$0 < |c_y - a| < \delta_1$

$$L - \varepsilon \leq L - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{f(y)}{g(y)} < \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} < L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \varepsilon$$

Se $\dfrac{f'(c_y)}{g'(c_y)} < 0$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right), \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right) \right[$$

$$\subseteq \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

e o resto é como antes.

e $\quad L - \varepsilon < \dfrac{f(y)}{g(y)} < L + \varepsilon.$

(2) Se $\boxed{L = +\infty}$ $\forall N$

$\exists \delta_1 > 0$ $\forall$

$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \dfrac{f'(t)}{g'(t)} > 2(N+1)$

Tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{\delta_1, |x_0 - a|, |x_1 - a|\}$

e $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow$

$$\left| 1 - \left(\frac{1 - \frac{g(x_i)}{g(t)}}{1 - \frac{f(x_i)}{f(t)}} \right) \right| < \frac{1}{2}$$

$\forall i \in \{0, 1\}$

Tome y tal que

$0 < |y - a| < \delta$.

e escolha j tal que

y e x_j estão ambos

do mesmo lado.

como $|y-a| < |x_j - a|$,

segue que

y está entre x_j e a.

assim c_y está entre

x_j e a $\therefore$ $|c_y - a| < \delta$,

Pelas contas já feitas,

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(\frac{1 - \frac{g(x_j)}{g(y)}}{1 - \frac{f(x_j)}{f(y)}} \right)$$

$$> 2N \cdot \frac{1}{2} = N$$

$\therefore\ 0 < |y - a| < \delta$

$$\Rightarrow \frac{f(y)}{g(y)} > N$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Para os outros casos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

basta usar $\pm f(x)$ e $\pm g(x)$.

P/ $x \to \pm\infty$

basta tomar

$y = \frac{1}{x}$ e

aplicar L'Hospital

P/ $a = 0^+$ ou $a = 0^-$

(similar ao

que foi feito

P/ $\frac{0}{0}$.)