Teo: (L'Hospital $\frac{0}{0}$).

Sejam $f$ e $g$ deriváveis em todos os pontos $\neq a$ suficientemente próximos de $a$ com $g'(x) \neq 0$, $\forall x \neq a$ suf. próximos de $a$. Então se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe

e é igual a $L$.

Dem: ① Fixe $\varepsilon > 0$ e suponha $\boxed{L \in \mathbb{R}}$. Podemos tomar $\varepsilon \leq 1$.

Iremos primeiro fazer

manipulações antes de

acharmos $\delta > 0$, tal que

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$.

considere $y$ entre $x$ e $a$.

$\delta > 0$ será escolhido tal que

$g'(t) \neq 0$ se $0 < |t-a| < \delta$!

Então $g(x) - g(y) \neq 0$

(se fosse 0, $\exists c$ entre

$x$ e $y$ tal que $g'(c) = 0$.

$\therefore c \in ]x, a[$ $\therefore$

$0 < |c-a| < \delta \Rightarrow g'(c) \neq 0$.

$\}$.

Então pelo TVM de Cauchy, existe $c_y$ entre $x$ e $y$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}$$

$$\therefore$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1-\frac{f(y)}{f(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}\right) = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}\right)$$

Vamos começar a demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixe $x$ tal que

$0 < |x - a| < \delta$.

Como $x$ está fixado

$$\lim_{t \to a} \frac{1 - \frac{g(t)}{g(x)}}{1 - \frac{f(t)}{f(x)}} = 1$$

Existe $\gamma > 0$, $\gamma < \delta$ tal que

$0 < |t-a| < \gamma \Rightarrow$

$$\left| 1 - \frac{1 - \frac{g(t)}{g(x)}}{1 - \frac{f(t)}{f(x)}} \right| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

Fixe $y$ tal que (basta algum $y$)

$0 < |y-a| < \gamma$

e $y$ entre $x$ e $a$.

Pelo cálculo já feito,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \left( \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \right)$$

Se $\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} = 0$ então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} \right[.$$

$|c_y - a| < \delta$

$\Rightarrow \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \in \left]L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right[ \Rightarrow$ $\subseteq \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[$

Vamos supor que

$\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \neq 0$. Primeiro,

assumimos que

$$\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} > 0.$$

Então $\qquad 0 < \qquad (\varepsilon \leq 1)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right), \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right) \right[$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2} , \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

$$\left| \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \leq |L|+1 \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |c_y - a| < \delta$$

$$L - \varepsilon \leq L - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} < L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Se $\frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} < 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right), \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(1-\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right) \right[$$

$$\subseteq \left] \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

e o resto é como antes.

e $\quad L-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L+\varepsilon.$

Se $L = +\infty$ e $N > 0$

$\exists \delta > 0 \quad \forall t$

$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right| > 2N$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \left(\frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}\right)$$

Queremos um $y$

$$> \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \frac{1}{2} > N$$

$\exists \gamma > 0$

$0 < \gamma < \delta$

$$0 < |t - a| < \gamma \Rightarrow \left|\frac{1 - \frac{g(t)}{g(x)}}{1 - \frac{f(t)}{f(x)}} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

Entonces tome $y$

tal que

$0 < |y-a| < \gamma$

e $y$ entre $x$ e $a$.

Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}$$

$$\geq \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)} \cdot \frac{1}{2} > \frac{2N}{2}$$

$= N$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Si $L = -\infty$

basta aplicar L'Hospital em $-f(x)$ e $g(x)$.

Então $\lim_{x\to a} -f(x)$

$$= \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

e $\lim_{x\to a} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = +\infty$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0}$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right) \to 0}{g\left(\frac{1}{u}\right) \to 0}$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{u^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{u^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Similarmente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)^{\to 0}}{g(x)_{\to 0}} \quad e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \to 0^-} \frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})} =$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{u^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{u^2}\right)}} =$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

O caso $\frac{\infty}{\infty}$ é um pouco mais delicado. Se usar

$$\frac{\overset{\to +\infty}{f(x)}}{\underset{\to +\infty}{g(x)}} = \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{g(x)}}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{f(x)}}}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

assim, se soubermos que

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe e $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L^*$

com $L^* \in \mathbb{R} - \{0\}$

então

$$L^* = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$L^* = L^{*2} \cdot \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L^*$$

Mas no Teorema de L'Hospital

não assumimos

que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) \to +\infty}{g(x) \to +\infty}$

existe.