TVM de Cauchy

Sejam f e g deriváveis em $]a,b[$ e contínuas em $[a,b]$. Então $\exists\, c \in\,]a,b[$ tal que

$$(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a)).f'(c).$$

Dem: Usaremos o TVM na função

$$h(x) = (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x).$$

Claramente h é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$.

Vamos então calcular $h(b)$ e $h(a)$.

$$h(a) = (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a)$$
$$= f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)}$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

$$h(b) = (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b)$$
$$= \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b)$$
$$= -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$
$$\therefore \boxed{h(a) = h(b)}$$

Pelo TVM, existe $c \in]a,b[$ tal que

$h'(c) = 0 \therefore$

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$$

$$\therefore (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c). \blacksquare$$

TVM: Se f é contínua em $[a,b]$ e f é derivável em $]a,b[$ então $\exists\, c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Em particular, se $f(b)=f(a)$, então $f'(c)=0$.

Dem: Lembramos que uma função contínua em um intervalo fechado e limitado possui máximo e mínimo no intervalo. (Teorema de Weierstrass)

1) Vamos primeiro supor que $f(b)=f(a)$.

Pelo teorema de Weierstrass.

f possui máximo e mínimo.

Temos 3 possibilidades:

a) $f(x)=f(a)=f(b)$, $\forall x \in]a,b[$.

b) $\exists x \in]a,b[$ tal que $f(x)>f(a)=f(b)$

c) $\exists x \in]a,b[$ tal que $f(x)<f(a)=f(b)$

No caso a) tome qualquer ponto $c \in]a,b[$. Como f é constante em $]a,b[$, segue que $f'(c)=0$. $\boxed{\text{m}}$

b) Neste caso tome c o máximo de f em $[a,b]$.

Então

$f(c) \geq f(x) > f(a) = f(b).$

Assim $c \in]a,b[$ e $f'(c)$ existe por hipótese.

Af. $f'(c) = 0$. De fato,

Se $h<0$ $\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{h<0} \geq 0$

$\therefore$ $f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$

Se $h>0$ $\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\leq 0}}{h>0} \leq 0$

$\therefore$ $f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

logo $f'(c) \geq 0$

e $f'(c) \leq 0$

$\Rightarrow f'(c) = 0$. $\blacksquare$

c) Neste caso tome c o ponto mínimo de f em $[a,b]$. Então

$$f(c) \leq f(x) < f(a) = f(b)$$

$\therefore$

$c \in]a,b[$.

Por hipótese $f'(c)$ existe.

Af. $f'(c)=0$. De fato,

se $h<0$ então

$$\frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0$$

$$\therefore f'(c)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0.$$

se $h>0$ então

$$\frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0$$

$$\therefore f'(c)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

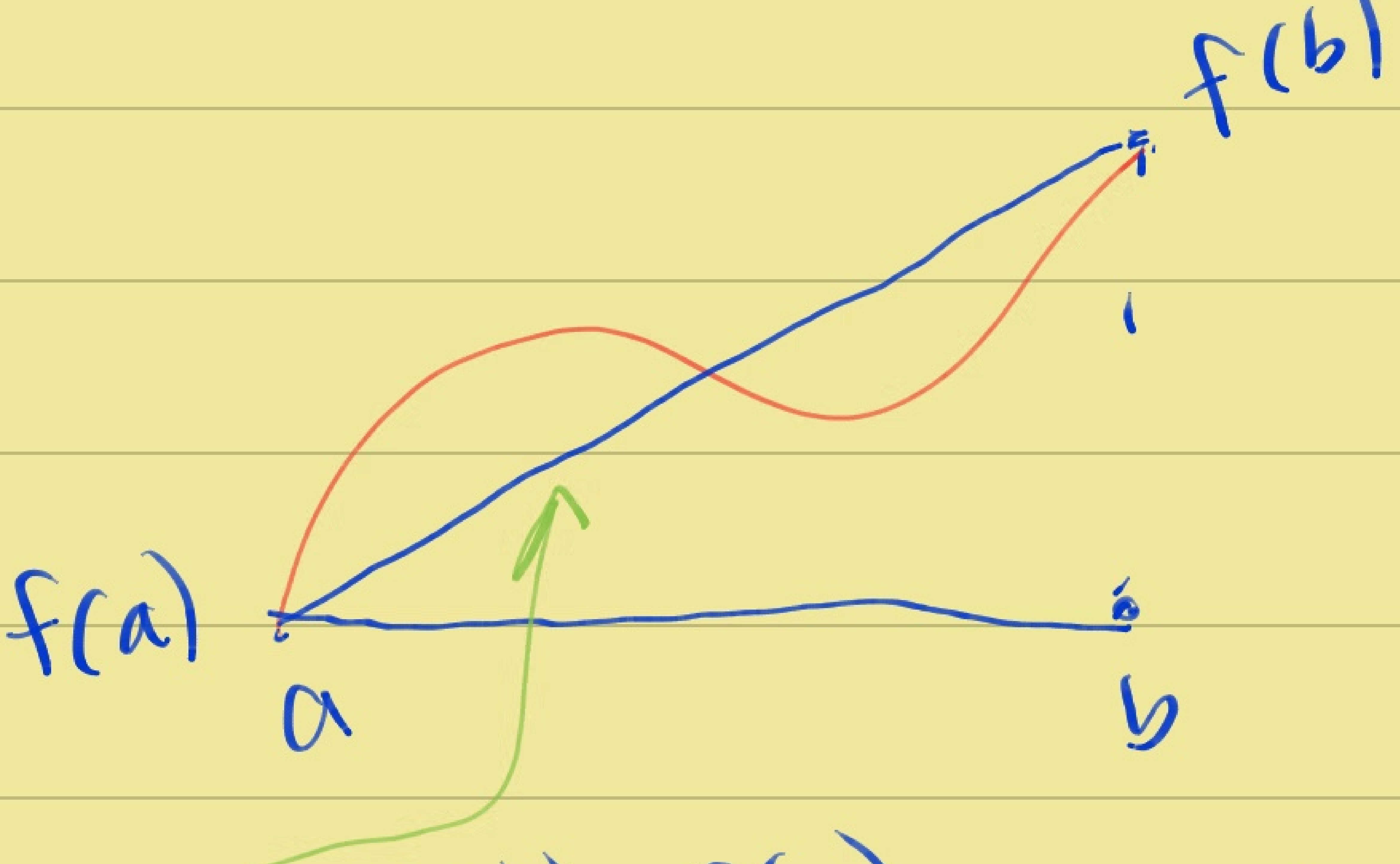
logo

$f'(c) \leq 0$ e $f'(c) \geq 0$

$\Rightarrow f'(c) = 0$. ∎

2) $f(b)$ e $f(a)$ arbitrários

Iremos 'remover' a inclinação $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

$$r(a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a)$$

$$= f(a) + 0 = f(a)$$

$$r(b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a)$$

$$= f(a) + (f(b) - f(a))$$

$$= f(b).$$

$h(x) = f(x) - r(x)$

h è continua in $[a, b]$

e derivabile in $]a, b[$.

$h(a) = f(a) - r(a) = 0$

$h(b) = f(b) - r(b) = 0$

$\therefore$ pelo primeiro caso,
existe $c \in]a, b[$ tal que

$$h'(c) = 0$$

$$\therefore$$

$$0 = h'(c) = f'(c) - r'(c)$$

$$\therefore$$

$$f'(c) = r'(c)$$

$$= \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right)'$$

$$= 0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare$$