Aula 03_Limite e Continuidade de Funções

09:46

Vamos analisar algumas situações

1. Uma empresa montadora de computadores determina que um empregado após x dias de treinamento, monta m computadores por dia, onde:

$$m(x) = \frac{20x^2}{x^2 + x + 5}$$

$x \rightarrow$ dias de treinamento
$m(x) \rightarrow$ nº computadores montados após x dias de treinamento

- Se o empregado não passar por nenhum dia de treinamento ($x = 0$), quantos computadores ele conseguirá montar por dia?
  $$m(0) = \frac{20(0)^2}{(0)^2+(0)+5} = \frac{0}{0+0+5} = 0$$
- Se o empregado passar por um treinamento de 10 dias, quantos computadores ele conseguirá montar?
  $$m(10) = \frac{20(10)^2}{(10)^2+(10)+5} = \frac{2.000}{100+10+5} = \frac{2.000}{115} = 17{,}4$$
- Se o empregado passar por um treinamento de 30 dias, quantos computadores ele conseguirá montar?
  $$m(30) = \frac{20(30)^2}{(30)^2+(30)+5} = \frac{18.000}{900+30+5} = \frac{18.000}{935} = 19{,}2$$
- Se o empregado passar por um treinamento de 50 dias, quantos computadores ele conseguirá montar?
  $$m(50) = \frac{20(50)^2}{(50)^2+(50)+5} = \frac{50.000}{2.500+50+5} = \frac{50.000}{2.555} = 19{,}6$$
- Se o empregado passar por um treinamento de 100 dias, quantos computadores ele conseguirá montar?
  $$m(100) = \frac{20(100)^2}{(100)^2+(100)+5} = \frac{200.000}{10.000+100+5} = \frac{200.000}{10.105} = 19{,}8$$

- Se o empregado passar por um "looooongo" treinamento, quantos computadores ele conseguirá montar por dia?
- Quantos dias vc recomendaria para o treinamento?

$$y = \frac{20 * x^2}{x^2 + x + 5}$$

2. Um governo determina que o custo (em dólares) para despoluir $x\%$ de metais pesados que contaminam uma reserva de água doce é dado por:

$$C(x) = \frac{120.000x}{100 - x}$$

$x \rightarrow$ porcentagem de metais pesados a serem retirados (% despoluição)
$C(x) \rightarrow$ custo para despoluição de $x\%$ da reserva

- Qual o custo para eliminar a metade dos metais pesados?
- Com um orçamento de $1.000.000 dólares, que percentual da reserva fica despoluída?
- É economicamente viável despoluir totalmente a reserva?

$$y = \frac{120000 * x}{100 \ldots}$$

- Com um orçamento de $1.000.000 dólares, que percentual da reserva fica despoluída?
- É economicamente viável despoluir totalmente a reserva?

$$y = \frac{120000 * x}{100 - x}$$

LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Começaremos com a ideia intuitiva de limites, ou seja, estudaremos o comportamento de uma função $f(x)$ quando o valor da variável x aproxima-se de um determinado valor númério (que não necessariamente pertence ao domínio da função). Por exemplo, considere a função:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

Podemos perceber que o domínio desta função é:
$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$

Estudaremos o comportamento da função quando os valores de x aproximam-se de 1, mas sem atingir $x = 1$.
Pensando na reta numérica, temos que:

Vamos construir uma tabela de valores de x aproximando-se de 1, pela esquerda (valores menores do que 1) e pela direita (valores maiores do que 1) e os correspondentes valores de $f(x)$.

Notação:
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

Lê-se: O número real L é o limite da função $f(x)$ quando x aproxima-se do valor a.

PROPRIEDADES DE LIMITES

P1) Sejam m e b duas constantes quaisquer, então, se $f(x) = mx + b$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(mx + b) = m(a) + b$$

Exemplos:

1. Calcule o limite da função $f(x) = 2x + 1$ quando x tende a 2 ($x \rightarrow 2$)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(2x + 1) = 2(2) + 1 = 5$$

2. Calcule o limite da função $f(x) = \frac{5x}{3} - 4$ quando x tende a 1 ($x \to 1$)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{5x}{3} - 4\right) = \frac{5(1)}{3} - 4 = \frac{5 - 12}{3} = -\frac{7}{3}$$

P2) Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são tais que $f(x) = g(x)$, exceto em um ponto $x = a$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

desde que exista um dos limites.

Esta propriedade nos permite "simplificar" as funções antes de calcular os limites. Essa simplificação é feita por meio da fatoração das funções. Veremos alguns tipos de fatoração por meio de exemplos.

Caso 1: Qualquer expressão do tipo $ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita (ou fatorada) como:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

em que x_1 e x_2 são as raízes da equação do 2º grau.

Voltando ao exemplo do início da aula (noção intuitiva), temos:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

- Qual o limite da função $f(x)$ quando x tende a 1 ($x \rightarrow 1$)?

O resultado 0/0 é uma INDETERMINAÇÃO, não é um resultado válido!

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}\right) = \frac{2(1)^2 - (1) - 1}{(1) - 1} = \frac{0}{0}$$

A saída, neste caso, é encontrar uma função g(x), equivalente à função f(x), que não resulte em uma indeterminação. Para isso vamos fatorar a expressão do numerador da função f(x) e verificar se é possível cancelar um de seus fatores com a expressão do denominador da mesma função.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$2x^2 - x - 1 = a(x - x_1)(x - x_2)$

Usando báskara....

Logo, a função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ é equivalente à função $g(x) = 2x + 1$.

Usando a P2, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Veja a grade (tabela) de valores que construímos em noção intuitiva de limites

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3.$$

<u>Exercícios:</u> Calcule o limite das funções $f(x)$ a seguir quando $x \to k$

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x + 5}$

P3) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

desde que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

OBS: Note que esta propriedade não pode ser usada nos exemplos anteriores pois o limite da função g(x) no denominador era igual a zero.

Exemplo:

1) Calcular o limite

   $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x-5}{x^3-7}\right)$

2) Calcular o limite

   $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

★ *Caso 2: Qualquer expressão do tipo $a^2 - b^2$ pode ser reescrita (ou fatorada) como:*

$$(a + b)(a - b)$$

Logo, a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pode ser reescrita (ou é equivalente) como $g(x) = x + 1$ e o cálculo do limite fica....

3) Calcular o limite

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right) =$

Caso 3: Quando nas funções aparecem raízes (e não consigo fatorar) resultando em uma indeterminação, a saída é multiplicar o numerador e denominador da função pelo conjugado, ou seja,

4) Calcular o limite

$\lim_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right) =$

Exercícios

No exercício 1 faça 6 itens (a sua escolha)

1. Calcule os seguintes limites usando tabelas:

(a) $\lim_{x\to 1}(3x-8)$

(b) $\lim_{x\to 1}(3x-2)$

(c) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(d) $\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}$

(e) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+1}$

(f) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+5x-4}{x-1}$

(g) $\lim_{x\to 0}(x^2-\frac{2^x}{1000})$

(h) $\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)^2}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{x^2+1}$

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^2+x+2}$

(k) $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{x-1}$

No exercício 3 faça 10 itens (a sua escolha)

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$

(c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2\,a\,x + a^2}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^6 + 2}{10x^7 - 2}$

(g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{2 - \sqrt{2x}}$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(t + h)^2 - t^2}{h}$

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{3x^2 - 4x + 1}$

(j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8 - x^3}{x^2 - 2x}$

(k) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$

(l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x}$

(m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

(n) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

(o) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$

(p) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x + 2}}$

(q) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(r) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(s) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2\,x^2 + 5\,x - 7}$

(t) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{\sqrt{x + 2}}$