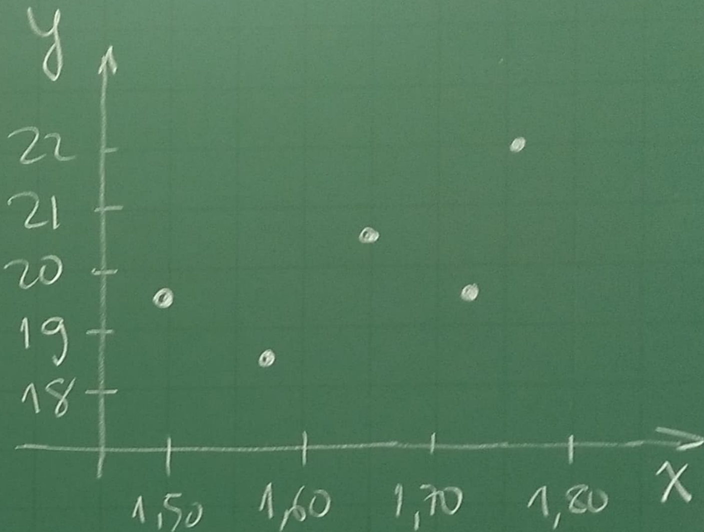
Dados

i	x_i (m)	y_i
1	1,50	19,5
2	1,57	18,5
3	1,65	20,5
4	1,72	19,5
5	1,76	22,0



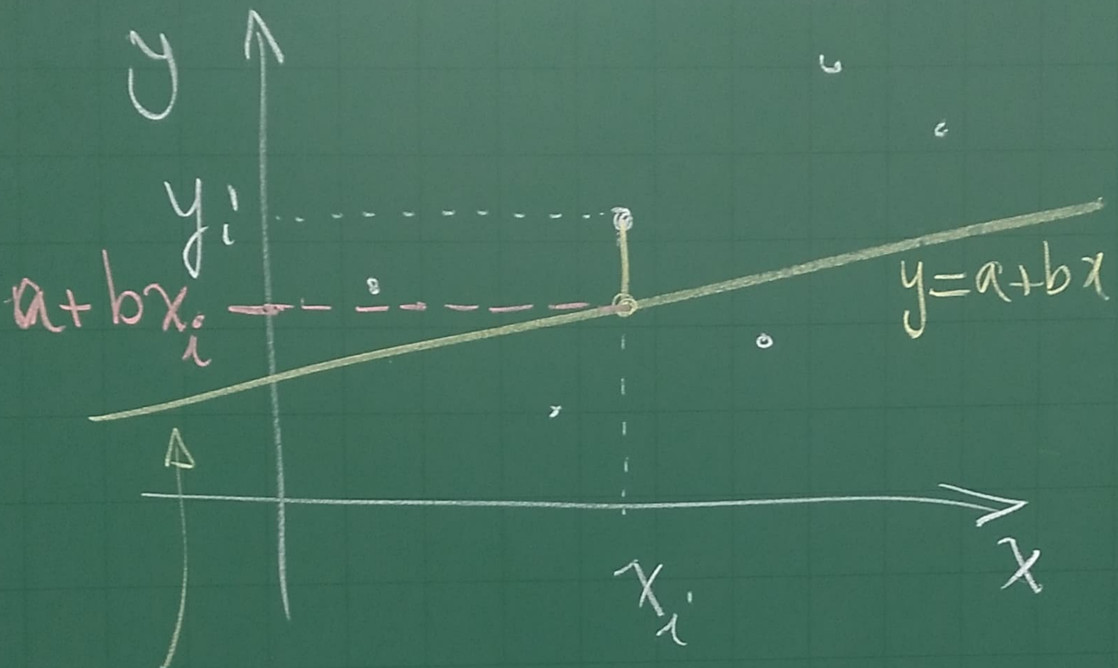
Objetivo

"Ajustar" uma reta

$$a + bx = y$$

por MMQ.

Ideia de MMQ



N pontos (x_i, y_i), $i = 1, \dots, N$

uma reta

$y = a + bx$ ⟵ há infinitas retas

uma p/ cada (a, b)

parâmetros

x, y: variáveis

x_i's, y_i's: dados coletados

Qual é a reta que passa "mais perto" dos dados?

↳ tem que ser medido

MMQ

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a + b x_i) \right]^2$$

↳ resíduo quadrático da reta $y = a + bx$

Outra forma de ver (equivalente)

Ideal: passar a reta por todos os pontos.

ou seja: (x_i, y_i) sobre a reta $y = a + bx$, $\forall i$

ou seja:

$$a + b x_i = y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

ou seja:

$$\begin{cases} a + bx_1 = y_1 \\ a + bx_2 = y_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ a + bx_N = y_N \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \cdot a + x_1 \cdot b = y_1 \\ 1 \cdot a + x_2 \cdot b = y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 \cdot a + x_N \cdot b = y_N \end{cases}$$

Sistema linear
nas 2 incógnitas $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$
com N equações.
(Hipótese: $N \geqslant 2$)

Se $N = 2$ e os x_i são diferentes $\Rightarrow$ tem solução
(mas isso é exceção)

Em geral: $\underline{N > 2}$.

$\hookrightarrow$ sistema linear sobredeterminado

A "qualidade" de uma escolha de (a,b) vai ser dada por

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\underbrace{y_i}_{\substack{\text{lado}\\ \text{direito}\\ \text{(termo}\\ \text{independente)}}} - \underbrace{(a + b x_i)}_{\substack{\text{lado}\\ \text{esquerdo}}} \Big]^2$$

O objetivo agora é matemático:

achar (a,b) que minimiza $Q(a,b)$

Se for mínimo, tem que ser pt. crítico.

Então nós procuramos pts. <u>críticos</u> de Q.

<u>Obs</u>: $\longrightarrow$ vai ser único (em geral)

$\longrightarrow$ vai ser mínimo.

crítico: (*) $\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases}$ 2 incógnitas e 2 equações

O que garante que essas 2 equações serão lineares em $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$ é a forma da função Q (quadrática em $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$)

Explicitamos (*) na aula passada e chegamos em:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} 1\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{cases}$$

NO NOSSO EXEMPLO:

$$\sum_{i=1}^{N} 1 = N = 5 \qquad \sum x_i = 8{,}2$$

$$\sum y_i = 100 \qquad \sum x_i^2 = 13{,}49$$

$$\sum x_i y_i = 164{,}38$$

$$\begin{cases} 5a + 8{,}2b = 100 \\ 8{,}2a + 13{,}49b = 164{,}38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8{,}2a + 13{,}49b = 164{,}38 & (L_1) \\ 5a + 8{,}2b = 100 & (L_2) \end{cases}$$

Quero $\underline{\underline{m}}$ t.q.

$$L_2 - m L_1$$

dois-um

p/ que o coef. (21) se anule.

Calculando o $\underline{\underline{m}}$:

$$\underset{L_2}{5} - m \cdot \underset{L_1}{8{,}2} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = \frac{5}{8{,}2}} \quad \left(= \frac{1^{\circ}\text{ elem. da } L_2}{1^{\circ}\text{ elem. da } L_1} \right)$$

nova L_2: $L_2' = L_2 - \frac{5}{8{,}2} L_1$

$$L_2': \; 0 \cdot a + \underbrace{\boxed{8{,}2 - \frac{5}{8{,}2} \cdot 13{,}49}}\, b = \underbrace{\boxed{100 - \frac{5}{8{,}2} \cdot 164{,}38}}$$

PARÊNTESES

Calculadoras e computadores trabalham com ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE

$$164{,}38 = \underbrace{1.6438} \times 10^{2}$$

computador: $\underbrace{+}_{\text{sinal}}\; \underbrace{\boxed{1}\boxed{6}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{8}}_{\text{mantissa}}\; \underbrace{+}_{\text{sinal}}\underbrace{02}_{\text{expoente}}$

Além disso, o computador reserva um número finito de algarismos p/ a mantissa e p/ o expoente

número de algarismos significativos.

não vamos pensar nisso.

E como o computador lida c/ as contas?

VAMOS SUPOR 5 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

$$\frac{1{,}6438 \times 10^{2}}{8{,}2000 \times 10^{0}} = 2{,}0046 \times 10^{1}$$

Entre nós, seres humanos,
podemos incorporar o expoente
mudando o pt. decimal:

tudo bem fazer:

$$\frac{164.38}{8.2} = 20.046$$

O computador faz operação por operação

<u>Nossa convenção</u>: arredondar

a cada anotação de uma conta

FECHA PARÊNTESES.

-0.0256097

$\hookrightarrow -0,025610 \quad b = -0,2317\cancel{0}\cancel{7}$ 1

$$b = \frac{-0,23171}{-0,025610} = 9,0476$$

Substituindo na L1

$8,2a + 13,49b = 164,38$

$$a = \frac{164,38 - 13,49b}{8,2} = 5,1619$$

$\boxed{a = 5,1619}$ $\boxed{b = 9,0476}$