LISTA DE EXERCÍCIOS 2 1/2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF. PEDRO T. P. LOPES

Vamos supor que as funções dos exercícios abaixo são sempre de classe C^2.

Exercício 1. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\ &u(t,0) = A, \quad u(t,L) = B, && t \in [0,\infty[, \\ &u(0,x) = f(x), && x \in [0,L]. \end{aligned} \tag{0.1}$$

O objetivo é mostrar que se existir uma solução de (0.1), então ela é única.

i) Mostre que se u_1 e u_2 são soluções de (0.1), então $u = u_1 - u_2$ é solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\ u(t,0) &= u(t,L) = 0, && t \in [0,\infty[, \\ u(0,x) &= 0, && x \in [0,L]. \end{aligned}$$

ii) Defina $E(t) = \int_0^L u(t,x)^2 dx$ e mostre que $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$ e que $\frac{dE}{dt}(t) \leq 0$.

iii) Conclua que $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Use isso para mostrar que $u_1 = u_2$.

Solução: i) Observe que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x) - k\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t,x) - f(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\ &u(t,0) = u_1(t,0) - u_2(t,0) = A - A = 0 \text{ e} u(t,L) = u_1(t,L) - u_2(t,L) = B - B = 0, && t \in [0,\infty[, \\ &u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = f(x) - f(x) = 0, && x \in [0,L]. \end{aligned}$$

Concluímos que u é solução da equação do calor, com condição de contorno de Dirichlet e condição inicial zero.

ii) Vamos agora definir a seguinte função $E : [0,\infty[\to \mathbb{R}$:

$$E(t) = \int_0^L w^2(t,x)dx.$$

Observe que $E(t) \geq 0$ para todo t, pois o integrando é positivo. Note também que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^L w^2(t,x)dx\right) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(w^2(t,x))dx = 2\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t}(t,x)w(t,x)dx \\ &= 2k\int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x)w(t,x)dx = 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)w(t,x)\Big|_0^L - 2k\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)dx \\ &= 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,L)w(t,L) - 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,0)w(t,0) - 2k\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)dx \\ &= -2k\int_0^L |\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Por fim, $E(0) = \int_0^L w^2(0,x)dx = 0$, já que $w(0,x) = 0$.

iii) Concluímos que $E(t) \geq 0$ e $E(t) \leq E(0) = 0$, já que $\frac{dE}{dt} \leq 0$. Portanto $E(t) = 0$. Assim,

$$\int_0^L w^2(t,x)dx = 0.$$

Como a função $(t,x) \mapsto w^2(t,x)$ é contínua e positiva, sua integral é igual a zero se, e somente se, a função for identicamente nula. Concluímos assim que $w(t,x) = 0$ e, portanto, $u_1 = u_2$.

Exercício 2. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\ u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L]. \end{aligned}$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 3. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\ u(t,0) = A, \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\ u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L]. \end{aligned}$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 4. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\ u(t,0) = u(t,L), \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L), && t \in [0,\infty[,\\ u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L]. \end{aligned}$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Soluções dos exercícios 2, 3 e 4:

Repetimos a solução do exercício 1, usando que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(\int_0^L w^2(t,x)dx) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(w^2(t,x))dx = 2\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t}(t,x)w(t,x)dx\\ &= 2k\int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x)w(t,x)dx = 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)w(t,x)\Big|_0^L - 2k\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)dx\\ &= 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,L)w(t,L) - 2k\frac{\partial w}{\partial x}(t,0)w(t,0) - 2k\int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)dx\\ &= -2k\int_0^L |\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)|^2 dx \le 0, \end{aligned}$$

pois $\frac{\partial w}{\partial x}(t,L)w(t,L) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,0)w(t,0)$ para as condições de contorno dos exercícios 2, 3 e 4.

Exercício 5. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) - p(x)u(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B && t \in [0,\infty[,\\ u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L], \end{aligned} \tag{0.2}$$

em que $w(x) \ge C > 0$, $r(x) \ge C > 0$ e $p(x) \ge 0$.

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Dica: Use $E(t) = \int_0^L u^2(t,x)w(x)dx$, em que $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, e u_1 e u_2 são soluções da Equação (0.2).

Solução: Se u_1 e u_2 são soluções de (0.2), então $u = u_1 - u_2$ é solução do problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) - p(x)u(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 && t \in [0,\infty[,\\ u(0,x) &= 0, && x \in [0,L], \end{aligned}$$

Definindo $E(t) = \int_0^L u^2(t,x)w(x)dx$, vemos que $E(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty[$, $E(0) = \int_0^L u^2(0,x)w(x)dx = 0$ e

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(\int_0^L u^2(t,x)w(x)dx) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u^2(t,x))w(x)dx = 2\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)u(t,x)w(x)dx \\
&= 2\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)u(t,x)dx - 2\int_0^L p(x)u(t,x)^2 w(x)dx \\
&= -2\int_0^L r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)dx - 2\int_0^L p(x)u(t,x)^2w(x)dx + 2r(L)\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)u(t,L) - 2r(0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)u(t,0) \leq 0 \\
&= -2\int_0^L r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)dx - 2\int_0^L p(x)u(t,x)^2w(x)dx \leq 0
\end{aligned}$$

Logo E é não crescente. Assim, $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$ para $t > 0$, ou seja, $E(t) = 0$ para todo t. Logo $\int_0^L u^2(t,x)w(x)dx = 0$ para todo $t > 0$. Portanto, $u^2(t,x)w(x) = 0$ (pois é uma função contínua e positiva), o que implica que $u = 0$ e $u_1 = u_2$.

Exercício 6. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
&u(t,0) = A, \quad u(t,L) = B, && t \in [0,\infty[, \\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L], \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), && x \in [0,L].
\end{aligned} \tag{0.3}$$

O objetivo é mostrar que se existir uma solução do Problema (0.3), então ela é única.
i) Mostre que se u_1 e u_2 são soluções de (0.3), então $u = u_1 - u_2$ é solução de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
&u(t,0) = u(t,L) = 0, && t \in [0,\infty[, \\
&u(0,x) = 0, && x \in [0,L], \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, && x \in [0,L].
\end{aligned}$$

ii) Defina $E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right)dx$ e mostre que $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$ e que $\frac{dE}{dt}(t) = 0$.
iii) Conclua que $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Use isso para mostrar que $u_1 = u_2$.

Solução:
i. Basta observar que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
&u(t,0) = u_1(t,0) - u_2(t,0) = A - A = 0 \text{ e} u(t,L) = u_1(t,L) - u_2(t,L) = B - B = 0, && t \in [0,\infty[, \\
&u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = f(x) - f(x) = 0, && x \in [0,L]. \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = g(x) - g(x) = 0, && x \in [0,L].
\end{aligned}$$

ii. Note que $E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right)dx \geq 0$, pois o integrando é não negativo.

$$E(0) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(0,x)^2\right)dx = 0,$$

pois $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$ e, derivando $u(0,x) = 0$ em x, obtemos $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = 0$.
Por fim,

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}(t) &= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) dt \\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) dt \\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right) dt + \frac{\partial u}{\partial t}(t,L)\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0,
\end{aligned}
$$

em que usamos que $u(t,0) = u(t,L) = 0$. Derivando, temos $\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,L) = 0$.

iii. Concluímos que E é constante. Como $E(0) = 0$, temos $E(t) = 0$ para todo t. Assim, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2 = 0$, o que implica que $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$. Logo u é constante. Como $u(0,x) = 0$, concluímos que $u = 0$. Logo $u_1 = u_2$.

Exercício 7. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) &= B, && t \in [0,\infty[, \\
u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 8. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
u(t,0) = u(t,L), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(t,L), && t \in [0,\infty[, \\
u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 9. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L], \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad u(t,L) &= B, && t \in [0,\infty[, \\
u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Solução dos exercícios 7, 8 e 9:
Repetimos o argumento do exercício 6., observando que

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}(t) &= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) dt \\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) dt \\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right) dt + \frac{\partial u}{\partial t}(t,L)\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0,
\end{aligned}
$$

já que $\frac{\partial u}{\partial t}(t,L)\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)$ para todos esses exercícios. (Em 7, pois $\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$. Em 8, observamos que $u(t,0) = u(t,L)$ implica $\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,L)$. Em 9, usamos que $u(t,L) = 0$ implica $\frac{\partial u}{\partial t}(t,L) = 0$).

Exercício 10. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), && x \in [0,L],
\end{aligned} \tag{0.4}$$

em que $w(x) \geq C > 0$, $r(x) \geq C > 0$. Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

(Dica: Use $E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 w(x) + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right)dx$, em que $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, e u_1 e u_2 são soluções da Equação (0.4).

Solução: Se u_1 e u_2 são soluções de (0.2), então $u = u_1 - u_2$ é solução do problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = 0, && x \in [0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, && x \in [0,L],
\end{aligned}$$

Definindo $E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 w(x) + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right)dx$, vemos que $E(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty[$, $E(0) = \int_0^L u^2(0,x)w(x)dx = 0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}(t) &= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)w(x) + r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)dt\\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) + r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)dt\\
&= 2\int_0^L \left(-r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)dt\\
&\quad + 2\frac{\partial u}{\partial t}(t,L)r(L)\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) - 2\frac{\partial u}{\partial t}(t,0)r(0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.
\end{aligned}$$

Concluímos que E é constante. Como $E(0) = 0$, temos $E(t) = 0$ para todo t. Assim, $w(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2 = 0$, o que implica que $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$. Logo u é constante. Como $u(0,x) = 0$, concluímos que $u = 0$. Logo $u_1 = u_2$.