LISTA DE EXERCÍCIOS 2 1/2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF. PEDRO T. P. LOPES

Suponha que todas as funções dos exercícios abaixo sejam de classe C^2.

Observe que os exercícios são muito semelhantes! As soluções dos exercícios 2, 3 e 4 são quase idênticas a do exercício 1. As soluções dos exercícios 7, 8 e 9 são quase idênticas a do exercício 6. Os exercícios 1 e 6 foram essencialmente feitos em sala de aula.

Exercício 1. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&u(t,0) = A, \quad u(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

O objetivo é mostrar que se existir uma solução de (0.1), então ela é única.

i) Mostre que se u_1 e u_2 são soluções de (0.1), então $u = u_1 - u_2$ é solução de

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&u(t,0) = u(t,L) = 0, && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = 0, && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

ii) Defina $E(t) = \int_0^L u(t,x)^2 dx$ e mostre que $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$ e que $\frac{dE}{dt}(t) \leq 0$.

iii) Conclua que $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Use isso para mostrar que $u_1 = u_2$.

Exercício 2. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 3. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&u(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 4. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
&u(t,0) = u(t,L), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L), && t \in [0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 5. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) - p(x)u(t,x), && t\in[0,\infty[, x\in[0,L],\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B && t\in[0,\infty[,\\
&u(0,x) = f(x), && x\in[0,L],
\end{aligned} \tag{0.2}$$

em que $w(x) \geq C > 0$, $r(x) \geq C > 0$ e $p(x) \geq 0$.

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Dica: Use $E(t) = \int_0^L u^2(t,x)w(x)dx$, em que $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, e u_1 e u_2 são soluções da Equação (0.2).

Exercício 6. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t\in[0,\infty[, x\in[0,L],\\
u(t,0) = A, \quad u(t,L) &= B, && t\in[0,\infty[,\\
u(0,x) &= f(x), && x\in[0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x\in[0,L].
\end{aligned} \tag{0.3}$$

O objetivo é mostrar que se existir uma solução do Problema (0.3), então ela é única.

i) Mostre que se u_1 e u_2 são soluções de (0.3), então $u = u_1 - u_2$ é solução de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t\in[0,\infty[, x\in[0,L],\\
u(t,0) &= u(t,L) = 0, && t\in[0,\infty[,\\
u(0,x) &= 0, && x\in[0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= 0, && x\in[0,L].
\end{aligned}$$

ii) Defina $E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right)dx$ e mostre que $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$ e que $\frac{dE}{dt}(t) = 0$.

iii) Conclua que $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Use isso para mostrar que $u_1 = u_2$.

Exercício 7. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t\in[0,\infty[, x\in[0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) &= B, && t\in[0,\infty[,\\
u(0,x) &= f(x), && x\in[0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x\in[0,L].
\end{aligned}$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 8. Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), && t\in[0,\infty[, x\in[0,L],\\
u(t,0) = u(t,L), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(t,L), && t\in[0,\infty[,\\
u(0,x) &= f(x), && x\in[0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x\in[0,L].
\end{aligned}$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 9. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), \quad && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= A, \quad u(t,L) = B, && t \in [0,\infty[,\\
u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x \in [0,L].
\end{aligned}
$$

Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

Exercício 10. Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) + f(t,x), \quad && t \in [0,\infty[, x \in [0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= A, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = B && t \in [0,\infty[,\\
u(0,x) &= f(x), && x \in [0,L],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), && x \in [0,L],
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

em que $w(x) \geq C > 0$, $r(x) \geq C > 0$. Mostre que se existir uma solução do problema, ela é única.

(Dica: Use $E(t) = E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 w(x) + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2\right) dx$, em que $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, e u_1 e u_2 são soluções da Equação (0.4).