LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e Djairo. (F. X, ex.Y) e (D. X, ex.Y) indicam o exercício Y do capítulo X do livro do Folland (F) e Djairo (D).

Exercício 1. (F. 3.1, ex.2) Suponha que $\{y_1, ..., y_n\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ (não necessariamente ortonormal). Seja $y \in \mathbb{C}^n$ e a_1, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n.$$

i) Calcule $\langle y, y_j \rangle$ e mostre que $\langle y, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

ii) Conclua que

$$y = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Resolução:

i) Basta observar que $\langle y_j, y_k \rangle = 0$ se $j \neq k$. Assim,

$$\langle y, y_j \rangle = \langle a_1 y_1 + ... + a_n y_n, y_j \rangle = a_1 \langle y_1, y_j \rangle + ... + a_n \langle y_n, y_j \rangle = a_j \langle y_j, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2 .$$

Logo $a_j = \frac{\langle y, y_j \rangle}{\|y_j\|^2}$

ii) Usando o resultado anterior, concluímos que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Exercício 2. (F. 3.1, ex.4) Sejam $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2i, -2i, 0)$, $u_2 = \frac{1}{5}(2 - 4i, -2, i, 0)$, $u_3 = \frac{1}{15}(4 + 2i, 5 + 8i, 4 + 10i, 0)$ e $u_4 = (0, 0, 0, i)$.

i) Mostre que $\{u_1, ..., u_4\}$ é um conjunto ortonormal de $\mathbb{C}^4$, ou seja, mostre que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases} .$$

(Lembremos que o produto interno é dado por $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_4 \overline{y_4}$.

ii) Expresse os vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 10 - i, 10 - 9i, -3)$ como combinação linear dos vetores $\{u_1, ..., u_4\}$. Use que

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 + \langle u, u_4 \rangle u_4.$$

Resposta do item ii)

$$(1, 0, 0, 0) = \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{5}(2 + 4i) u_2 + \frac{1}{15}(4 - 2i) u_3$$
$$(2, 10 - i, 10 - 9i, -3) = 6u_1 - 5u_2 - 15iu_3 + 3iu_4.$$

Exercício 3. (F. 3.2, ex.1) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases} .$$

Exercício 4. (F. 3.2, ex.2) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \ n = m \\ 0, \ n \neq m \end{cases} .$$

Exercício 5. (F. 3.3, ex.9) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal para o intervalo (a,b). Mostre que para todas funções contínuas por partes f e g, temos

$$\langle f,g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \overline{\langle g,\phi_n\rangle}.$$

Dica: Use $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \phi_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g,\phi_n\rangle \phi_n$ e as propriedades de ortonormalidade.
Resolução:

Basta observar que

$$\langle f,g\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \phi_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle g,\phi_m\rangle \phi_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \langle f,\phi_n\rangle \phi_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle g,\phi_m\rangle \phi_m \right\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle \langle f,\phi_n\rangle \phi_n, \langle g,\phi_m\rangle \phi_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \overline{\langle g,\phi_m\rangle} \langle \phi_n,\phi_m\rangle =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \langle \phi_m, g\rangle \delta_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \langle \phi_n, g\rangle .$$

Exercício 6. (F. 3.5, ex.1) Sobre que condições nas constantes c e c' as condições de contorno $f(b) = cf(a)$ e $f'(b) = c'f'(a)$ são condições de contorno auto-adjuntas (isto é, $r\left(f'\overline{g} - f\overline{g'}\right)\big|_a^b = 0$) para o operador $L(f) = (rf')' + pf$ em $[a,b]$?

Resposta: A condição é que $c\overline{c'} = \frac{r(a)}{r(b)}$.

Exercício 7. (F. 3.5, ex.3) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(l) = 0$ em $[0,l]$? (Dica: Procure soluções da forma $\operatorname{sen}(Ax+B)$)

Resposta: Os autovalores são $\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)$, para $n = 1,2,3,...$

Exercício 8. (F. 3.5, ex.4) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f'(0) = 0$, $f(l) = 0$ em $[0,l]$? (Dica: Procure soluções da forma $\cos(Ax+B)$)

Resposta: Os autovalores são $\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)$, para $n = 1,2,3,...$

Exercício 9. (F. 3.5, ex.7) Ache os autovalores e as autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(1) = -f(1)$ em $[0,l]$?

Resposta:Os autovalores são $\lambda_n = \nu_n^2$, em que ν_n são as soluções positivas de $tan(\nu) = -\nu$. As autofunções (autovalores) normalizados são $\phi_n(x) = c_n \operatorname{sen}(\nu_n x)$, $c_n = \left[\frac{2}{(1+cos^2\nu_n)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Exercício 10. (F. 3.5, ex.12) Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r\frac{df}{dx}\right) + pf + \lambda f = 0, \quad f(a) = f(b) = 0.$$

i) Mostre que se f é uma solução do problema anterior, então

$$\lambda \int_a^b |f|^2\, dx = \int_a^b r\,|f'|^2\, dx - \int_a^b p\,|f|^2\, dx.$$

Dica: Use o fato de que $\lambda f = -(rf') - pf$ e integre por partes.
ii) Deduza que se $p(x) \le C$ para todo x, então os autovalores do problema acima satisfazem $\lambda \ge -C$.

Resolução:
i) Vemos que $\lambda f = -(rf')' - pf$. Logo

$$\lambda \int |f(x)|^2\, dx = \lambda \int f(x)\overline{f(x)}dx = -\int (r(x)f'(x))'\, \overline{f(x)}dx - \int pf(x)\overline{f(x)}dx =$$
$$-(rf')\,\overline{f}\big|_a^b + \int r(x)f'(x)\overline{f'(x)}dx - \int pf(x)\overline{f(x)}dx =$$
$$\int r(x)\,|f'(x)|^2\, dx - \int p(x)\,|f(x)|^2\, dx.$$

ii) Assim, se $p(x) \le C$ e f é uma autofunção com autovalor λ, obtemos

$$\lambda \int |f(x)|^2\, dx = \int r(x)\,|f'(x)|^2\, dx - \int p(x)\,|f(x)|^2\, dx \ge$$

$$\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - C\int \left|f(x)\right|^2 dx.$$

Como assumimos sempre no problema de Sturm-Liouville que $r(x) > 0$, concluímos que $\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx \geq 0$. Logo

$$\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - C\int \left|f(x)\right|^2 dx \geq -C\int \left|f(x)\right|^2 dx.$$

Concluímos por fim, que

$$\lambda \int \left|f(x)\right|^2 dx \geq -C\int \left|f(x)\right|^2 dx \implies \lambda \geq -C.$$

Exercício 11. (D. 4.7, ex.3.1 e 3.2) Consideremos o problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ t>0\ x\in\left]0,l\right[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = g_0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = g_1(t),\ t>0 \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\left]0,l\right[\end{array}\right. .$$

Ache uma função $u_0(t,x)$ tal que a solução do problema acima possa ser escrita como $u(t,x) = u_0(t,x) + v(t,x)$, em que v resolve um problema do tipo abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x),\ t>0\ x\in\left]0,l\right[\\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,l) = 0,\ t>0 \\ v(0,x) = g(x),\ x\in\left]0,l\right[\end{array}\right. .$$

Resolução: Consideremos u_0 uma solução particular de $\frac{\partial u_0}{\partial x}(t,0) = g_0(t)$, $\frac{\partial u_0}{\partial x}(t,l) = g_1(t)$. Por exemplo,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}(t,x) = g_0(t) + \frac{x}{l}\left(g_1(t) - g_0(t)\right) \implies u_0(t,x) = g_0(t)\,x + \frac{x^2}{2l}\left(g_1(t) - g_0(t)\right).$$

Assim, se $u(t,x) = u_0(t,x) + v(t,x)$, então v satisfaz

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + k\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(t,x).$$

Logo $F(t,x) = k\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(t,x)$. Além disso,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial u_0}{\partial x}(t,0) = 0$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t,l) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) - \frac{\partial u_0}{\partial x}(t,l) = 0.$$

Por fim,

$$v(0,x) = u(0,x) - u_0(0,x) = g(x) - \left[g_0(t)\,x + \frac{x^2}{2l}\left(g_1(t) - g_0(t)\right)\right].$$

Exercício 12. (D. 4.7, ex.4.7) Obtenha a solução do problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-t},\ t>0\ x\in\left]0,l\right[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ t>0 \\ u(0,x) = 0,\ x\in\left]0,l\right[\end{array}\right. .$$

Resolução:

Basta vermos que provurarmos soluções da forma $u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\,e^{-kn^2t}\cos(nx)$, que é a solução geral de $\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ t>0\ x\in\left]0,l\right[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ t>0 \end{array}\right.$, porém com termos a_n que dependem de t. Substituindo na equação, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n'(t)\,e^{-kn^2t} - kn^2 a_n(t)\,e^{-kn^2t} + kn^2 a_n(t)\,e^{-kn^2t} - e^{-t}\delta_{0n}\right)\cos(nx) = 0.$$

Logo

$$a_n'(t)\,e^{-kn^2t} = e^{-t}\delta_{0n}$$

Como $a_n(0) = 0$ para todo n, concluímos que

$$a_n(t) = \left\{\begin{array}{c} 0,\ n\neq 0 \\ 1-e^{-t},\ n=0 \end{array}\right. .$$

Assim, a solução será

$$u(t,x) = 1 - e^{-t}.$$

Exercício 13. (D. 5, ex.2.1) Consideremos o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ t>0 \ x \in]0,l[\\ u(t,0) = A, \ u(t,l) = B, \ t>0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \ x \in]0,l[\end{cases}.$$

Ache uma função $u_0(x)$ tal que a solução do problema acima possa ser escrita como $u(t,x) = u_0(x) + v(t,x)$, em que v resolve um problema do tipo abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \ t>0 \ x \in]0,l[\\ v(t,0) = 0, \ v(t,l) = 0, \ t>0 \\ v(0,x) = \tilde{f}(x), \ x \in]0,l[\\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = \tilde{g}(x), \ x \in]0,l[\end{cases}.$$

Resolução: Vamos procurar uma solução particular de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ t>0 \ x \in]0,l[\\ u(t,0) = A, \ u(t,l) = B, \ t>0 \end{cases}.$$

Vemos facilmente que $u_0(x) = A + \frac{x}{l}(B-A)$ é uma solução. Assim, se $v(t,x) = u(t,x) - u_0(x)$, concluímos que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \ t>0 \ x \in]0,l[\\ v(t,0) = 0, \ v(t,l) = 0, \ t>0 \\ v(0,x) = f(x) - A + \frac{x}{l}(B-A), \ x \in]0,l[\\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = g(x), \ x \in]0,l[\end{cases}.$$

Exercício 14. (D. 5, ex.6.2,6.3) Resolva os problemas abaixo:

i)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ t>0 \ x \in]0,l[\\ u(t,0) = 0, \ u(t,l) = e^{-t}, \ t>0 \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\end{cases}.$$

ii)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + A, \ t>0 \ x \in]0,l[\\ u(t,0) = 0, \ u(t,l) = e^{-t}, \ t>0 \\ u(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \ x \in]0,l[\end{cases}.$$

Exercício 15. (F. 4.2, ex.1) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0, \ t>0 \\ u(0,x) = 50, \ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

(Dica: Use exercício 7)

Resposta:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx = \frac{200}{\pi(2n-1)}.$$

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = C, \ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0, \ t>0 \\ u(0,x) = 50, \ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{4C}{\pi(2n-1)}\right) \exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\,\pi x}{2l}\right)dx = \frac{200}{\pi\,(2n-1)}.$$

Exercício 17. (F. 4.2, ex.3) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l)=C,\ t>0 \\ u(0,x)=50,\ \forall x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = Ax + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \frac{(-1)^n 8Al}{\pi^2\,(2n-1)^2}\right)\exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 kt}{l^2}\right)\mathrm{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\,\pi x}{2l}\right)dx = \frac{200}{\pi\,(2n-1)}.$$

Exercício 18. (F. 4.2, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-2t}\mathrm{sen}\,(x)\,,\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,\pi[\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0,\ t>0 \\ u(0,x)=0,\ \forall x\in\,]0,\pi[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = \left(e^{-2t}-e^{-kt}\right)\frac{\mathrm{sen}(x)}{k-2},\ \ k\neq 2$$
$$u(t,x) = te^{-2t}\mathrm{sen}(x),\ \ k=2.$$

Exercício 19. (F. 4.3, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - a^2u(t,x),\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\ t>0 \\ u(0,x)=f(x),\ \forall x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x),\ \forall x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\lambda_n t) + b_n\mathrm{sen}\,(\lambda_n t)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \ \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}+a^2.$$

Exercício 20. (F. 4.3, ex.6) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2k\frac{\partial u}{\partial t},\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\ t>0 \\ u(0,x)=f(x),\ \forall x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x),\ \forall x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u\,(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-kt}\left(a_n\cos(\lambda_n t) + b_n\mathrm{sen}\,(\lambda_n t)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \ \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}-k^2.$$

Se $k > \frac{\pi c}{l}$, então o termo λ_n será imaginário e teremos funções hiperbólicas. Como $|\lambda_n| < k$, os termos $e^{-kt}\cos(\lambda_n t)$ e $e^{-kt}\mathrm{sen}\,(\lambda_n t)$ são exponencialmente decrescentes em t.