LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados dos livros dos autores G. Folland (F.), Djairo Figueiredo (D.) e E. Kreysig (K.). (F.X.Y), (D.X.Y) e (K.X.Y) indicam o exercício Y do capítulo X do livro F, D ou K.

Exercício 1 (D.2.1.2, D.2.1.3 e D.2.4)
Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ duas funções periódicas de período $T>0$ e seja $\lambda\in\mathbb{C}$ uma constante, mostre que:
i) as funções $f+g$ e fg também são periódicas de período T.
ii) a função λf é periódica de período T.
iii) Se f é diferenciável, então f' também é periódica de período T.
Resolução:
i) De fato,

$$(f+g)(x+T)=f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x)=(f+g)(x).$$
$$(fg)(x+T)=f(x+T)\,g(x+T)=f(x)\,g(x)=(fg)(x).$$

ii)

$$(\lambda f)(x+T)=\lambda f(x+T)=\lambda f(x).$$

iii) De fato,

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+T)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Exercício 2 (D.2.1.5)
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função contínua e periódica de período $T>0$. Mostre que, para todo $a\in\mathbb{R}$, temos

$$\int_a^{a+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt.$$

(Dica: Feito em sala de aula)
Resolução:
Vamos definir a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$F(a)=\int_a^{a+T} f(t)\,dt=\int_0^{a+T} f(t)\,dt-\int_0^a f(t)\,dt.$$

Logo

$$F'(a)=f(a+T)-f(a)=0.$$

Logo F é constante. Concluímos que $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ independe de a.

Exercício 3 (D.2.2.10)
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função Riemann integrável periódica de período $T>0$. Mostre que a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida como

$$F(\theta)=\int_0^\theta f(s)ds$$

é periódica (de período T) se, e somente se, $\int_0^T f(s)ds=0$.
(Dica: Feito em sala de aula)
Resolução:
Se F é periódica, então

$$F(\theta+T)=F(\theta).$$

Em particular, $F(T)=F(0)$. Logo

$$0=\int_0^0 f(s)ds=\int_0^T f(s)ds.$$

Se $\int_0^T f(s)ds = 0$ e f uma função periódica. Logo

$$F(\theta+T) = \int_0^{\theta+T} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds + \int_T^{\theta+T} f(s)ds = \int_T^{\theta+T} f(s)ds.$$

Usando a periodicidade de f, concluímos que

$$\int_T^{\theta+T} f(s)ds = \int_0^{\theta} f(\tilde{s}+T)d\tilde{s} = \int_0^{\theta} f(\tilde{s})d\tilde{s} = F(\theta),$$

na primeira igualdade usamos $\tilde{s} = s - T$.

Portanto, $F(\theta+T) = F(\theta)$.

Exercício 4 (D.2.2.11)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função Riemann integrável, periódica e de período $T > 0$. Determine a constante $A > 0$ tal que a função abaixo seja periódica e de período T:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - Ax.$$

Resolução:

Queremos que $F(x+T) = F(x)$, ou seja,

$$\int_0^{x+T} f(t)dt - Ax - AT = \int_0^x f(t)dt - Ax.$$

Observamos que

$$\int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+T} f(t)dt - Ax - AT = \int_0^x f(t)dt - Ax \iff \int_x^{x+T} f(t)dt = AT.$$

Como f é periódica, temos $\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$. Assim, a afirmação acima equivale a:

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Exercício 5 (D.2.3.1)

Verifique as seguintes relações:

i) $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sen(nx)dx = 0$.

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = \delta_{mn}\pi$.

iii) $\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx)dx = \delta_{mn}\pi$.

(Observação: Estas são as relações análogas a $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 2\pi\delta_{mn}$, provadas em sala de aula)

Exercício 6 (D.2.5.1)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

i) Se f é uma função par, então $\frac{1}{f}$ também é uma função par.

ii) Se f é uma função ímpar, então $\frac{1}{f}$ também é uma função ímpar.

Resolução:

i) $\frac{1}{f}(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f}(x)$.

ii) $\frac{1}{f}(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-f(x)} = -\frac{1}{f}(x)$.

Exercício 7 (D.2.5.2)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função derivável. Mostre que:

i) Se f é uma função par, então f' é uma função ímpar.

ii) Se f é uma função ímpar, então f' é uma função par.

Resolução:

i) Basta observar que se $f(-x) = f(x)$, então

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

ii) Basta observar que se $f(-x)=-f(x)$, então

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-(x-h))-f(-x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{-f(x-h)+f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Exercício 8 (D.2.6.3, D.2.6.4 e D.2.6.5)

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ duas funções 2π-periódicas e Riemann integráveis.

i) Calcule as relações entre os coeficientes de Fourier a_n, b_n e c_n das funções f e g, se $g(x):=f(x+\alpha)$, em que $\alpha\in\mathbb{R}$ é uma constante.

ii) Calcule as relações entre os coeficientes de Fourier a_n, b_n e c_n das funções f e g, se $g(x):=f(x)+k$, em que $k\in\mathbb{C}$ é uma constante.

iii) Sejam a_n^f, b_n^f e c_n^f e a_n^g, b_n^g e c_n^g os coeficientes de Fourier das funções f e g, respectivamente. Calcule os coeficientes de Fourier da função $\alpha f+\beta g$ em função de a_n^f, b_n^f, c_n^f, a_n^g, b_n^g e c_n^g.

Resolução:

i) Observamos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\alpha)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}f(y)e^{-iny+in\alpha}dy=$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{in\alpha}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}f(y)e^{-iny}dy=\frac{1}{2\pi}e^{in\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iny}dy.$$

Logo $c_n^g=e^{in\alpha}c_n^f$. Portanto, $a_0^g=2c_0^g=2c_0^f=a_0^f$,

$$a_n^g=c_n^g+c_{-n}^g=e^{in\alpha}c_n^f+e^{-in\alpha}c_{-n}^f=$$
$$cos(n\alpha)\left(c_n^f+c_{-n}^f\right)+sen(n\alpha)i\left(c_n^f-c_{-n}^f\right)=cos(n\alpha)a_n^f+sen(n\alpha)b_n^f$$

e

$$b_n^g=i\left(c_n^g-c_{-n}^g\right)=i\left(e^{in\alpha}c_n^g-e^{-in\alpha}c_{-n}^g\right)=$$
$$i\left(cos(n\alpha)c_n^g-cos(n\alpha)c_{-n}^g\right)-\left(sen(n\alpha)c_n^g+sen(n\alpha)c_{-n}^g\right)=$$
$$cos(n\alpha)c_n^f-sen(n\alpha)b_n^f.$$

Logo $a_n^g=cos(n\alpha)a_n^f+sen(n\alpha)b_n^f$ e $b_n^g=cos(n\alpha)c_n^f-sen(n\alpha)b_n^f$.

ii) Vemos que

$$c_n^g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+k\right)e^{-inx}dx=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ke^{-inx}dx=c_n^f+k\delta_{n0}.$$

$$a_n^g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)cos(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+k\right)cos(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(nx)dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}kcos(nx)dx=a_n^f+k\delta_{n0}.$$

$$b_n^g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)sen(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+k\right)sen(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sen(nx)dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ksen(nx)dx=b_n^f.$$

Assim, $c_n^g=c_n^f$, $a_n^g=a_n^f$ e $b_n^g=b_n^f$ para $n\geq 1$, e $c_0^g=c_0^f+k$ e $a_0^g=a_0^f+k$.

iii) Vemos que

$$c_n^{\alpha f+\beta g}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)e^{-inx}dx=\alpha\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx+\beta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-inx}dx=\alpha c_n^f+\beta c_n^g.$$

$$a_n^{\alpha f+\beta g}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)cos(nx)dx=\alpha\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cos(nx)dx+\beta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)cos(nx)dx=\alpha a_n^f+\beta a_n^g.$$

$$b_n^{\alpha f+\beta g}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)sen(nx)dx=\alpha\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sen(nx)dx+\beta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)sen(nx)dx=\alpha b_n^f+\beta b_n^g.$$

Assim, $c_n^{\alpha f+\beta g}=\alpha c_n^f+\beta c_n^g$, $a_n^{\alpha f+\beta g}=\alpha a_n^f+\beta a_n^g$, $b_n^{\alpha f+\beta g}=\alpha b_n^f+\beta b_n^g$.

Exercício 9 (K.11.1 Ex.6)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função periódica de período $T > 0$. Mostre que $x \mapsto f(ax)$ e $x \mapsto f\left(\frac{x}{b}\right)$ são funções periódicas de período $\frac{T}{a}$ e bT.

Resolução:

Basta observar que

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax)$$

e que

$$f\left(\frac{1}{b}(x+bT)\right) = f\left(\frac{1}{b}x+T\right) = f\left(\frac{1}{b}x\right) = f\left(\frac{x}{b}\right).$$

Exercício 10 (K.11.1 Ex.2 a 4)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função periódica. Dizemos que $T > 0$ é o período fundamental de f se T é o menor número real positivo que satisfaz $f(x+T) = f(x)$.

i) Calcule o período fundamental das seguintes funções:

$cos(x)$, $sen(x)$, $cos(2x)$, $sen(2x)$, $cos(nx)$, $sen(nx)$, $cos\left(\frac{2\pi x}{k}\right)$, $sen\left(\frac{2\pi x}{k}\right)$, $cos\left(\frac{2\pi nx}{k}\right)$, $sen\left(\frac{2\pi nx}{k}\right)$.

Resolução:

Os períodos fundamentais são, respectivamente, dados: 2π, 2π, π, π, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, k, k, $\frac{k}{n}$, $\frac{k}{n}$.

ii) Mostre que nem toda função periódica tem um período fundamental. (Dica: Pense na função constante)

Resolução:

Basta observar que se f é uma função constante, isto é, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(x+T) = f(x)$, para todo $T > 0$. Logo

$$\inf\{T > 0;\ f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Mas 0 não é um número real positivo. Portanto não pode ser chamado de período fundamental pela definição dada no exercício. Assim, a função constante não tem período fundamental.

Exercício 11 (K.11.2 Ex.13)

Mostre que as conhecidas identidades abaixo podem ser interpretadas como a série de Fourier da função à esquerda da igualdade (Para isto calcule a série de Fourier das funções à esquerda):

i) $cos^3(x) = \frac{3}{4}cos(x) + \frac{1}{4}cos(3x)$.

ii) $sen^3(x) = \frac{3}{4}sen(x) - \frac{1}{4}sen(3x)$.

Desenvolva $cos^4(x)$ usando série de Fourier.

Exercício 12 (K.11.4 Ex:2)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica e Riemann integrável. Mostre que:

i) Mostre que se f é par, então os coeficientes c_n são números reais.

ii) Mostre que se f é ímpar, então os coeficientes c_n são números imaginários puros.

Resolução:

Estava faltando a hipótese $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

i) Se $f(-x) = f(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(x)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Acima usamos que $f(-x)sen(-x) = f(x)(-1)sen(x) = -f(x)sen(x)$. Logo, a função $x \mapsto f(x)sen(x)$ é ímpar. Logo sua integral sobre $[-\pi, \pi]$ é igual a zero.

ii) Se $f(-x) = -f(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(x)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(x)dx\right) =$$

$$i\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(x)dx\right).$$

Logo c_n é imaginário puro. Acima usamos que $f(-x)cos(-x) = -f(x)cos(x)$. Logo, a função $x \mapsto f(x)cos(x)$ é ímpar. Logo, sua integral sobre $[-\pi, \pi]$ é igual a zero.

Exercício 13 (K.11.4 Ex:3)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica e Riemann integrável. Mostre que os coeficientes a_n, b_n e c_n se relacionam da seguinte forma:

$$2a_0 = c_0, \;\; a_n = c_n + c_{-n}, n > 0 \;\; b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right), n > 0.$$

(Dica: Foi feito em sala de aula)

Resolução: Basta usar a relação de Euler $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.

Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(cos(nx) + isen(nx)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(cos(nx) - isen(nx)\right) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n + c_{-n}\right) cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} i\left(c_n - c_{-n}\right) sen(nx).$$

Portanto, $\frac{a_0}{2} = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ e $b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right)$.

A partir das relações acima, obtemos facilmente que $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e $c_{-n} = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$.

Exercício 14 (K.11.3 Ex:1 e 2)

Verifique se as funções abaixo são pares, ímpares ou nem pares, nem ímpares:

$|x|$, $x^2 sen(nx)$, $x + x^2$, $e^{-|x|}$, $ln(x)$, $xcosh(x)$, $sen(x^2)$, $sen^2(x)$, $xsenh(x)$, $|x|^3$, $e^{\pi x}$, xe^x, $tan(2x)$, $\frac{x}{1+x^2}$.

Resolução:

Chamamos f de função par se $f(-x) = f(x)$ e dizemos que f é uma função ímpar se $f(-x) = -f(x)$. De acordo com esta definição temos:

As funções pares são: $|x|$, $e^{-|x|}$, $sen(x^2)$, $sen^2(x)$, $xsenh(x)$, $|x|^3$.

As funções ímpares são: $x^2 sen(nx)$, $xcosh(x)$, $tan(2x)$.

As funções que não são nem pares nem ímpares são: $x + x^2$, $ln(x)$, $e^{\pi x}$, xe^x, $\frac{x}{1+x^2}$.

OBS: Notemos que $ln(x)$ sequer está definida para $x < 0$.

Exercício 15 (F.2.1 Exs.)

Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$:

i) $f(\theta) = \theta$.

ii) $f(\theta) = |\theta|$.

iii) $f(\theta) = \pi - \theta$.

iv) $f(\theta) = \begin{cases} \theta, & \text{se } \theta \in [0, \pi[\\ 0, & \text{se } \theta \in]-\pi, 0] \end{cases}$.

v) $f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [0, \pi[\\ -1, & \text{se } \theta \in]-\pi, 0] \end{cases}$.

vi) $f(\theta) = |sen\theta|$.

vii) $f(\theta) = \theta^2$.

viii) $f(\theta) = \theta\left(\pi - |\theta|\right)$.

Respostas:

Atenção. Há um erro no enunciado. Queremos calcular a série de Fourier, não a transformada.

i) $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(n\theta)$.

ii) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \text{sen}(n\theta)$.

iv) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}\left(n\theta\right)$.

v) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\theta)}{(2n-1)}$

vi) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{4n^2-1}$

vii) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(n\theta\right)$

viii) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$

Exercício 16 (F.2.2 ex.2)
Mostre que:
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$. (Use vi do exercício anterior)
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. (Use vii do exercício anterior)
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. (Use viii do exercício anterior)

Exercício 17 (F.2.3 ex.2)
Usando o Teorema de Integração de Série de Fourier provado em sala de aula e o item vii) do exercício 15 acima, mostre que:
i) $\theta^3 - \pi^2\theta = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n sen(n\theta)}{n^3}$.
ii) $\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$.
Usando os resultados acima, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercício 18 (F.2.4 ex.5)
Analise o seguinte argumento:
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica tal que $f(\theta) = e^\theta$, para $-\pi < \theta < \pi$. Seja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ a série de Fourier de f. Logo $e^\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$. Derivando os dois lados da expressão, temos $e^\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ine^{in\theta}$. Assim, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ine^{in\theta}$. Pela unicidade da série de Fourier, temos $c_n = inc_n$, ou seja, $(1-in)c_n = 0$. isto implica que $c_n = 0$ para todo n. Portanto, $e^\theta = 0$. Mas isto claramente é falso. Onde está o erro?
Resolução:
Provamos em sala de aula que se $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, então

$$\frac{df}{d\theta}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta}$$

sempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for suave por partes, contínua e 2π-periódica. No entanto, quando pegamos a função $\theta \in [-\pi, \pi] \to e^\theta$ e fazemos uma expansão 2π-períódica dela, a função resultante não é contínua. Por exemplo, em $]\pi, 3\pi[$ ela é dada por $\theta \to e^{\theta-2\pi}$. Logo ela é descontínua no ponto π. De maneira geral, ela será descontínua em todo ponto $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercício 19 (F.2.4 ex.1 a 6)
Ache as séries de Fourier seno e séries de Fourier cosseno das seguintes funções $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$:
i) $f(\theta) = 1$.
ii) $f(\theta) = \pi - \theta$.
iii) $f(\theta) = sen(\theta)$.
iv) $f(\theta) = cos(\theta)$.
v) $f(\theta) = \theta^2$.
vi) $f(\theta) = \theta$, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $f(\theta) = \pi - \theta$, para $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.
Resolução:
i) Cosseno: 1, Seno: $\frac{4}{\pi}\sum \frac{sen(2n-1)\theta}{2n-1}$.
ii) Cosseno: $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$, Seno: $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n\theta)}{n}$.
iii) Cosseno: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2n\theta}{4n^2-1}$, Seno: $sen(\theta)$.
iv) Cosseno: $cos(\theta)$, Seno: $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nsen(2n\theta)}{4n^2-1}$.
v) Cosseno: $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(n\theta)$, Seno: $2\pi\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(n\theta) - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}$.
vi) Cosseno: $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(4n-2)\theta}{(2n-1)^2}$, Seno: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{sen(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$.

Exercício 20 (F.2.4 ex.12)
Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ uma função contínua por partes tal que $f(\theta) = f(\pi - \theta)$. Sejam a_n e b_n os termos da expansão em cossenos e da expansão em senos de f, respectivamente. Mostre que $a_n = 0$ para n ímpar e $b_n = 0$ para n par.
Resolução:
Lembramos que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)cos(nx)dx.$$

Se n é ímpar, então $n = 2k+1$, em que $k \geq 0$. Logo

$$\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\pi - x\right)cos\left((2k+1)\,x\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\left(\pi - x\right)\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,\pi - (2k+1)\,x\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left(\pi - (2k+1)\,x\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)cos\left((2k+1)\,x\right)dx = 0.$$

Lembramos que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)dx.$$

Se n é par, então $n = 2k$, em que $k \geq 0$. Logo

$$\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)sen\left(2kx\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(\pi - x\right)sen\left(2kx\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2k\left(\pi - x\right)\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left((2k+1)\,x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2k\pi - 2kx\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(-2kx\right)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sen\left(2kx\right)dx = 0.$$