LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados dos livros dos autores G. Folland (F.), Djairo Figueiredo (D.) e E. Kreysig (K.). (F.X.Y), (D.X.Y) e (K.X.Y) indicam o exercício Y do capítulo X do livro F, D ou K.

Exercício 1 (D.2.1.2, D.2.1.3 e D.2.4)
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ duas funções periódicas de período $T > 0$ e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ uma constante, mostre que:
i) as funções $f + g$ e fg também são periódicas de período T.
ii) a função λf é periódica de período T.
iii) Se f é diferenciável, então f' também é periódica de período T.

Exercício 2 (D.2.1.5)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e periódica de período $T > 0$. Mostre que, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

(Dica: Feito em sala de aula)

Exercício 3 (D.2.2.10)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função Riemann integrável periódica de período $T > 0$. Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(s)ds$$

é periódica (de período T) se, e somente se, $\int_0^T f(s)ds = 0$.
(Dica: Feito em sala de aula)

Exercício 4 (D.2.2.11)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função Riemann integrável, periódica e de período $T > 0$. Determine a constante $A > 0$ tal que a função abaixo seja periódica e de período T:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - Ax.$$

Exercício 5 (D.2.3.1)
Verifique as seguintes relações:
i) $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sen(nx)dx = 0$.
ii) $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = \delta_{mn}\pi$.
iii) $\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx)dx = \delta_{mn}\pi$.
(Observação: Estas são as relações análogas a $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 2\pi\delta_{mn}$, provadas em sala de aula). Lembremos que

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}.$$

Exercício 6 (D.2.5.1)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:
i) Se f é uma função par, então $\frac{1}{f}$ também é uma função par.
ii) Se f é uma função ímpar, então $\frac{1}{f}$ também é uma função ímpar.
Resolução:
i) $\frac{1}{f}(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f}(x)$.

ii) $\frac{1}{f}(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-f(x)} = -\frac{1}{f}(x)$.

Exercício 7 (D.2.5.2)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função derivável. Mostre que:
i) Se f é uma função par, então f' é uma função ímpar.
ii) Se f é uma função ímpar, então f' é uma função par.

Exercício 8 (D.2.6.3, D.2.6.4 e D.2.6.5)
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ duas funções 2π-periódicas e Riemann integráveis.
i) Calcule as relações entre os coeficientes de Fourier a_n, b_n e c_n das funções f e g, se $g(x) := f(x+\alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante.
ii) Calcule as relações entre os coeficientes de Fourier a_n, b_n e c_n das funções f e g, se $g(x) := f(x) + k$, em que $k \in \mathbb{C}$ é uma constante.
iii) Sejam a_n^f, b_n^f e c_n^f e a_n^g, b_n^g e c_n^g os coeficientes de Fourier das funções f e g, respectivamente. Calcule os coeficientes de Fourier da função $\alpha f + \beta g$ em função de a_n^f, b_n^f, c_n^f, a_n^g, b_n^g e c_n^g.

Exercício 9 (K.11.1 Ex.6)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função periódica de período $T > 0$. Mostre que $x \mapsto f(ax)$ e $x \mapsto f\left(\frac{x}{b}\right)$ são funções periódicas de período $\frac{T}{a}$ e bT.

Exercício 10 (K.11.1 Ex.2 a 4)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função periódica. Dizemos que $T > 0$ é o período fundamental de f se T é o menor número real positivo que satisfaz $f(x+T) = f(x)$.
i) Calcule o período fundamental das seguintes funções:
$cos(x)$, $sen(x)$, $cos(2x)$, $sen(2x)$, $cos(nx)$, $sen(nx)$, $cos\left(\frac{2\pi x}{k}\right)$, $sen\left(\frac{2\pi x}{k}\right)$, $cos\left(\frac{2\pi n x}{k}\right)$, $sen\left(\frac{2\pi n x}{k}\right)$.

Exercício 11 (K.11.2 Ex.13)
Mostre que as conhecidas identidades abaixo podem ser interpretadas como a série de Fourier da função à esquerda da igualdade (Para isto calcule a série de Fourier das funções à esquerda):
i) $cos^3(x) = \frac{3}{4}cos(x) + \frac{1}{4}cos(3x)$.
ii) $sen^3(x) = \frac{3}{4}sen(x) - \frac{1}{4}sen(3x)$.
Desenvolva $cos^4(x)$ usando série de Fourier.

Exercício 12 (K.11.4 Ex:2)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e Riemann integrável. Mostre que:
i) Mostre que se f é par, então os coeficientes c_n são números reais.
ii) Mostre que se f é ímpar, então os coeficientes c_n são números imaginários puros.

Exercício 13 (K.11.4 Ex:3)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica e Riemann integrável. Mostre que os coeficientes a_n, b_n e c_n se relacionam da seguinte forma:

$$2a_0 = c_0, \;\; a_n = c_n + c_{-n}, n > 0 \;\; b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right), n > 0.$$

(Dica: Foi feito em sala de aula)

Exercício 14 (K.11.3 Ex:1 e 2)
Verifique se as funções abaixo são pares, ímpares ou nem pares, nem ímpares:
$|x|$, $x^2 sen(nx)$, $x + x^2$, $e^{-|x|}$, $ln(x)$, $xcosh(x)$, $sen(x^2)$, $sen^2(x)$, $xsenh(x)$, $|x|^3$, $e^{\pi x}$, xe^x, $tan(2x)$, $\frac{x}{1+x^2}$.

Exercício 15 (F.2.1 Exs.)
Calcule a série de Fourier das seguintes funções $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$:
i) $f(\theta) = \theta$.
ii) $f(\theta) = |\theta|$.
iii) $f(\theta) = \pi - \theta$.

iv) $f(\theta) = \begin{cases} \theta, & \text{se}\, \theta \in [0,\pi[\\ 0, & \text{se}\, \theta \in]-\pi,0] \end{cases}$.
v) $f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se}\, \theta \in [0,\pi[\\ -1, & \text{se}\, \theta \in]-\pi,0] \end{cases}$.
vi) $f(\theta) = |sen\theta|$.
vii) $f(\theta) = \theta^2$.
viii) $f(\theta) = \theta\,(\pi - |\theta|)$.

EXERCÍCIO 16 (F.2.2 EX.2)
Mostre que:
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$. (Use vi do exercício anterior)
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. (Use vii do exercício anterior)
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. (Use viii do exercício anterior)

EXERCÍCIO 17 (F.2.3 EX.2)
Usando o Teorema de Integração de Série de Fourier provado em sala de aula e o item vii) do exercício 15 acima, mostre que:
i) $\theta^3 - \pi^2\theta = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n sen(n\theta)}{n^3}$.
ii) $\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$.
Usando os resultados acima, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

EXERCÍCIO 18 (F.2.4 EX.5)
Analise o seguinte argumento:
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica tal que $f(\theta) = e^{\theta}$, para $-\pi < \theta < \pi$. Seja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ a série de Fourier de f. Logo $e^{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$. Derivando os dois lados da expressão, temos $e^{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n in e^{in\theta}$. Assim, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n in e^{in\theta}$. Pela unicidade da série de Fourier, temos $c_n = inc_n$, ou seja, $(1-in)c_n = 0$. isto implica que $c_n = 0$ para todo n. Portanto, $e^{\theta} = 0$. Mas isto claramente é falso. Onde está o erro?

EXERCÍCIO 19 (F.2.4 EX.1 A 6)
Ache as séries de Fourier seno e séries de Fourier cosseno das seguintes funções $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$:
i) $f(\theta) = 1$.
ii) $f(\theta) = \pi - \theta$.
iii) $f(\theta) = sen(\theta)$.
iv) $f(\theta) = cos(\theta)$.
v) $f(\theta) = \theta^2$.
vi) $f(\theta) = \theta$, para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $f(\theta) = \pi - \theta$, para $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$.

EXERCÍCIO 20 (F.2.4 EX.12)
Seja $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ uma função contínua por partes tal que $f(\theta) = f(\pi - \theta)$. Sejam a_n e b_n os termos da expansão em cossenos e da expansão em senos de f, respectivamente. Mostre que $a_n = 0$ para n ímpar e $b_n = 0$ para n par.