

Álgebra Linear e Aplicações

- *Sistemas homogêneos: $Ax = 0$*



MAIS UM EXEMPLO DE $PA=LU$

SEJA $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$. ACHE A DECOMPOSIÇÃO $PA=LU$.
USE-A PARA RESOLVER $Ax=b$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}]{P_1=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & 0 & 2 \\ \color{red}{2} & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3}]{P_2=3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 3 & 6 \\ \color{red}{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - \alpha_2}]{P_3=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & 3 & 6 \\ \color{red}{1} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

PARA ACHAR P

Diagrama de permutação para encontrar P :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 1 \end{array} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3ª LINHA DE J
2ª LINHA DE J

Como $LUx = PAx = Pb = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}$, TEMOS

1) $Ly = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 15 - 2 \cdot 3 = 9 \\ y_3 = 5 - 1 \cdot 3 = 2 \end{array} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $Ux = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}(9 - 6) = 1 \\ x_1 = 3 - 1 - 1 = 1 \end{array} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

CONCLUSÃO: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

CONSIDEREMOS O SISTEMA $m \times n$ DADO ABAIXO:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Aqui, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}$, b_i SÃO DADOS, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.
QUEREMOS DETERMINAR $x_i \in \mathbb{R}$.

PODEMOS REESCREVER O SISTEMA USANDO MATRIZES:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{:= A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{:= x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{:= b}.$$

Aqui $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n (\simeq M_{n,1}(\mathbb{R}))$, $b \in \mathbb{R}^m (\simeq M_{m,1}(\mathbb{R}))$

VAMOS PRIMEIRO ESTUDAR O CASO $b=0$. (SISTEMA HOMOGÊNEO)

TEOREMA: SE $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ SÃO EQUIVALENTES, ENTÃO $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx=0\}$

DEMO: SE $A \sim B$, ENTÃO $B = E_1 \dots E_p A$, EM QUE $E_j \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ SÃO MATRIZES ELEMENTARES.

LOGO $Ax=0 \Rightarrow Bx = E_1 \dots E_p Ax = E_1 \dots E_p 0 = 0$. ASSIM $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Bx=0\}$.

DA MESMA FORMA, COMO $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, TEMOS $\{x \in \mathbb{R}^n : Bx=0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\}$ ■

COMO ACHAR SOLUÇÕES DE $Ax=0$?

1º) ESCALONAMOS A MATRIZ A , OU SEJA, ACHAMOS UMA MATRIZ $B \sim A$ TAL QUE B ESTEJA NA FORMA ESCALONADA.

2º) SEJA $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1n} & \dots & B_{1n} \\ & & B_{2n} & \dots & B_{2n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_{pn} \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$, A MATRIZ A ESCALONADA p É O NÚMERO DE
PIVÔS. $(B_{jj} \neq 0, j = 1, \dots, p)$

Caso 1 $p = n$.

Caso 2 $p = n$.

NES TE CASO $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{22} & & B_{2n} \\ \vdots & & \bigcirc & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, B_{jj} \neq 0$

NESTE CASO, $Bx = 0 \Rightarrow B_{nn}x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$

$$\Rightarrow B_{n-1, n-1} x_{n-1} + B_{n-1, n} x_n = 0 \Rightarrow x_{n-1} = 0, \text{ puis } x_n = 0$$

$$\Rightarrow B_{kk} x_k + \sum_{j=k+1}^n B_{kj} x_j = 0 \Rightarrow x_k = 0, \text{ puis } x_n = x_{n-1} = \dots = x_{k+1} = 0$$

CONCLUIMOS QUE $x=0$. Logo $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx=0\} = \{0\}$.

Caso 2 $p \leq n$

NESTE CASO, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1n} & \dots & B_{1n} \\ & & B_{2n} & \dots & B_{2n} \\ & & & \ddots & \\ & & & B_{nn} & B_{nn} \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

CHAMAREMOS DE $\{1, \dots, n\} \setminus \{n_1, \dots, n_p\}$ DE VARIÁVEIS LIVRES. (TODOS OS $j \in \{1, \dots, n\}$ QUE NÃO CORRESPONDEM A COLUMAS COM PIVÔS)

A CADA VARIÁVEL LIVRE j , CONSTRUÍMOS UMA SOLUÇÃO $x^{(j)} = (x_1, \dots, x_n)$ TAL QUE $x_j = 1$ E

$x_k = 0$, PARA TODA VARIÁVEL LIVRE $k \neq j$. POR FIM, DETERMINAMOS $x_1, \dots, x_p$ POR

$$B_{pp} x_{np}^{(j)} + B_{pj} = 0 \Rightarrow x_{np}^{(j)} = -B_{pj} / B_{pp}$$

$$B_{k n_k} x_{n_k}^{(j)} + \sum_{l=k+1}^n B_{k n_l} x_{n_l}^{(j)} + B_{k j} = 0 \Rightarrow x_{n_k}^{(j)} = - \left(B_{k j} + \sum_{l=k+1}^n B_{k n_l} x_{n_l}^{(j)} \right) / B_{k n_k}$$

Assim, obtemos $n-p$ soluções particulares $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ que correspondem a $n-p$ variáveis livres.

(OBS: SE B ESTÁ NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA, ENTÃO $x_{n-k}^{(j)} = -B_{kj}$)

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ESCALONE E ACHE SOLUÇÕES DE $Ax = 0$ QUE CORRESPONDEM ÀS VARIÁVEIS LIVRES.

SOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - 2L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PIVÔS ESTÃO NAS COLUNAS 1 E 3

AS VARIÁVEIS LIVRES SÃO 2 E 4.

DETERMINANDO $x^{(4)} = (a, 0, b, 1)$

$$\begin{aligned} 1a + 3b + 2 &= 0 & \Rightarrow a = 1 & \quad \text{RESOLVE 2º} \\ 3b + 3 &= 0 & \Rightarrow b = -1 & \quad \text{RESOLVE 1º} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1a + 3b + 2 &= 0 \\ 3b + 3 &= 0 \end{aligned}} \right\} x^{(4)} = (1, 0, -1, 1)$$

DETERMINANDO $x^{(2)} = (a, 1, b, 0)$

$$\begin{aligned} 1a + 3 + 3b &= 0 & \Rightarrow a = -3 & \quad \text{RESOLVE 2º} \\ 3b &= 0 & \Rightarrow b = 0 & \quad \text{RESOLVE 1º} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1a + 3 + 3b &= 0 \\ 3b &= 0 \end{aligned}} \right\} x^{(2)} = (-3, 1, 0, 0)$$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ DEIXE A NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA E ACHE SOLUÇÕES DE $Ax = 0$ QUE CORRESPONDEM ÀS VARIÁVEIS LIVRES.

SOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = \frac{1}{3}L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 = L_1 - 3L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NESTE CASO, TEMOS

DETERMINANDO $x^{(1)} = (a, 0, b, 1)$

$$\begin{cases} 1a + 3 \cdot 0 + 0b - 1 \cdot 1 = 0 & a = 1 \\ 0b + 0 \cdot 0 + 1b + 1 \cdot 1 = 0 & b = -1 \end{cases} \quad x^{(1)} = (1, 0, -1, 1)$$

DETERMINANDO $x^{(2)} = (a, 1, b, 0)$

$$\begin{cases} 1a + 3 \cdot 1 + 0b - 1 \cdot 0 = 0 & a = -3 \\ 0a + 0 \cdot 1 + 1b + 1 \cdot 0 = 0 & b = 0 \end{cases} \quad x^{(2)} = (-3, 1, 0, 0)$$

NO PYTHON: USANDO O SYMPY, PODEMOS OBTER AS SOLUÇÕES PARTICULARES

```
import sympy as sy
```

```
A = sy.Matrix([[1, 3, 3, 2], [2, 6, 9, 7], [-1, -3, 3, 4]])
```

```
print(A.nullspace())
```

O PROGRAMA IMPRIME $(1, 0, -1, 1)$ E $(-3, 1, 0, 0)$

VOLTANDO AO CASO GERAL...

AS SOLUÇÕES PARTICULARES SÃO TODAS AS SOLUÇÕES DE $Ax=0$? NÃO!
AS SOLUÇÕES SÃO AS COMBINAÇÕES LINEARES DAS SOLUÇÕES PARTICULARES.

↓
ASSOCIADAS ÀS
VARIÁVEIS LIVRES.

$j_1, \dots, j_{n-p} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$

PROPOSIÇÃO: SEJAM $x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_{n-p})}$ AS SOLUÇÕES CONSTRUÍDAS ATRAVÉS DAS VARIÁVEIS LIVRES DE $AX=0$.

LOGO $v = \alpha_1 x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} x^{(j_{n-p})}$ TAMBÉM SATISFAZ $Av=0$, PARA QUAISQUER QUE SEJAM $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p} \in \mathbb{R}$. POR OUTRO LADO, SE $Av=0$, ENTÃO $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$ TAIS QUE $v = \alpha_1 x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} x^{(j_{n-p})}$.

DEMO: SE $v = \alpha_1 x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} x^{(j_{n-p})}$, ENTÃO $Av = A(\alpha_1 x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} x^{(j_{n-p})}) = \alpha_1 A x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} A x^{(j_{n-p})} = 0$

SE $v = (v_1, \dots, v_n) \in Av=0$, ENTÃO DEFINIMOS $w = v - v_{j_1} x^{(j_1)} - \dots - v_{j_{n-p}} x^{(j_{n-p})}$.

PORTANTO, $Aw = A(v - v_{j_1} x^{(j_1)} - \dots - v_{j_{n-p}} x^{(j_{n-p})}) = \underbrace{Av}_0 - v_{j_1} \underbrace{Ax^{(j_1)}}_0 - \dots - v_{j_{n-p}} \underbrace{Ax^{(j_{n-p})}}_0 = 0$

E $w = (w_1, \dots, w_{j_1-1}, \underbrace{0}_{\text{POSICÃO } j_1}, w_{j_1+1}, \dots, \underbrace{0}_{\text{POSICÃO } j_2}, \dots, \underbrace{0}_{\text{POSICÃO } j_{n-p}}, \dots, w_n)$

ASSIM, AS COORDENADAS DE w NAS VARIÁVEIS LIVRES SÃO 0.

LOGO $Bw = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^p B_{i,j} w_{j_j} = 0 \xrightarrow{\text{RESOLVO POR ÚLTIMO}} B_{i,n} w_n = 0 \Rightarrow w_n = 0$.

MATRIZ A ESCALONADA

$\sum_{j=k}^p B_{k,j} w_{j_j} = 0 \Rightarrow B_{k,n} w_n = 0 \Rightarrow w_n = 0$.
RESOLVO NA $p-k+1$ VEZ

$B_{p,n} w_n = 0 \Rightarrow w_n = 0$.
RESOLVO 1ª

CONCLUSÃO $w = 0 \Rightarrow v = v_{j_1} x^{(j_1)} + \dots + v_{j_{n-p}} x^{(j_{n-p})}$

EXEMPLO: SE $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ E $v = (-5, 2, -1, 1)$, ENTÃO $Av=0$.

COMO $x^{(2)} = (-3, 1, 0, 0)$ E $x^{(4)} = (1, 0, -1, 1)$, TEMOS.

$v = 2x^{(2)} + 1x^{(4)} = 2(-3, 1, 0, 0) + 1(1, 0, -1, 1) = (-5, 2, -1, 1)$