

Geometria Analítica

Combinação linear, dependência linear

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Combinação linear (definição)

Se $\vec{u} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n}$, dizemos que $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$, ou que é gerado por $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados coeficientes da combinação linear.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v_i}$$

Exemplo: Vetor nulo

$$\vec{0} = 0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + \dots + 0\vec{v_n}$$

Exercício

Sabendo que $\vec{u} = 3\vec{v}$. Escreva três expressões diferentes do vetor nulo como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$.

Dependência linear

No estudo da geometria analítica em três dimensões encontraremos com frequência situações de paralelismo entre retas, planos, ou entre retas e planos. A dependência linear será uma poderosa ferramenta no tratamento de tais situações.

- Base do plano
- Base do espaço

Conjunto linearmente dependente (LD)

Um conjunto ou uma n -upla ordenada de vetores $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ é dito linearmente dependente se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$$

Conjunto linearmente independente (LI)

Um conjunto ou uma n-upla ordenada de vetores $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ é dito linearmente independente se, e somente se, a única solução da equação

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

é:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

Observações

- 1) Um conjunto formado por um vetor $(\vec{u})$ é LD se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.
- 2) Um conjunto formado por dois vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se, e somente se, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- 3) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $\vec{w}$ é gerado por $\vec{u}, \vec{v}$.
- 4) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, se e somente se, um dos vetores é gerado pelos outros dois.

5) Se num conjunto de n -vetores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ ao menos um dos vetores é o vetor nulo, $\vec{v}_i = \vec{0}$, então o conjunto é LD, pois:

$\alpha_i = 1$ (ou qualquer outro número diferente de 0)

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 1\vec{v}_i + \dots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

Portanto, não todos os α são nulos.

Exercício

Sendo $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - \vec{w}$, e $\vec{c} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$, podemos concluir que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LD?

Resumo

- $p/n = 1$ Uma sequência $(\vec{v})$ é LD se $\vec{v} = \vec{0}$ e LI se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $p/n = 2$ Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI.
- $p/n = 3$ Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.
- $p/n \geq 4$ Se $n \geq 4$, qualquer sequência de n vetores é LD.