

## Mecânica Quântica II – Lista de exercícios 1



OBS: Os coeficientes de Clebsch-Gordan devem ser calculados manualmente. Você pode aproveitar o resultado de um exercício em outro.

1. Mostre que em uma soma de dois momentos angulares,  $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ , podemos escrever que  $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + \hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+}$ .
2. Em aula comentamos sobre os estados de spin total para dois elétrons. São 4 estados possíveis. Determine os números quânticos para o spin total e projeção no eixo-z desse spin total para cada um desses estados.
3. Duas partículas de momento angular  $3/2$  encontram-se em um estado de momento angular total 1. Encontre todos os estados possíveis desse sistema na representação  $|jmj_1j_2\rangle$  escritos em termos da base de representação  $|j_1m_1j_2m_2\rangle$ .
4. Duas partículas se encontram em um estado de momento angular orbital  $|\ell m \ell_1 \ell_2\rangle = |2,1,2,1\rangle$ . Se realizarmos uma medida de  $L_{1z}$  neste estado, quais os valores possíveis de serem medidos e com qual probabilidade?
5. No caso da soma de três momentos angulares,  $\hat{J}_1$ ,  $\hat{J}_2$  e  $\hat{J}_3$ , o conjunto de seis operadores na base com variáveis acopladas são  $\hat{J}^2 = (\hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{J}_3)^2$ ,  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z} + \hat{J}_{3z}$ ,  $\hat{J}_1^2$ ,  $\hat{J}_2^2$ ,  $\hat{J}_3^2$  e um operador  $\hat{A}^2$ , definido como:

$$\hat{A}^2 = a_{12}(\hat{J}_1 + \hat{J}_2)^2 + a_{13}(\hat{J}_1 + \hat{J}_3)^2 + a_{23}(\hat{J}_2 + \hat{J}_3)^2$$

Onde os coeficientes  $a_{ij}$  são arbitrários. Mostre que o operador  $\hat{A}^2$  comuta com  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$ .

6. Quantos autoestados independentes de momento angular total de duas partículas existem, dados que a partícula 1 encontra-se em um autoestado com  $\ell_1 = 3$  e a partícula 2 encontra-se em um autoestado com  $\ell_2 = 6$ ? Deixe explícito como chegou ao resultado.

7. Quais são os coeficientes de Clebsch-Gordan envolvidos na expansão do estado  $|jm_j\rangle = |3021\rangle$ ?

8. Considere um sistema de duas partículas, uma com spin 1/2 e a outra, spin 1. Construa os possíveis estados acoplados de spin dessas duas partículas em termos dos estados desacoplados de partículas individuais. Determine os valores totais de spin e projeção do spin no eixo-z para cada um desses estados.

9. Quais os possíveis valores de momento angular orbital ( $\ell$ ) para:

- Quatro elétrons no nível p ( $\ell = 1$ )?
- Três elétrons no nível p e um elétron no nível f ( $\ell = 3$ )?

10. Dois elétrons estão em um estado de momento angular orbital p ( $\ell = 1$ ). Escreva todos os possíveis estados acoplados dessas duas partículas em termos dos estados desacoplados de partículas individuais. Para cada um deles, determine o momento angular orbital total e o spin total do estado.

11. A Hamiltoniana de um sistema de duas partículas com spin pode ser escrita como  $H = A + \frac{B}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{C}{\hbar} (S_{1z} + S_{2z})$ , onde as constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são arbitrárias.

Encontre os autovalores dessa hamiltoniana quando:

- As duas partículas não são idênticas e têm spin  $\frac{1}{2}$ .
- Uma das partículas têm spin  $\frac{1}{2}$  e a outra, spin 1.
- O que acontece em (a) se as duas partículas forem idênticas?

12. No caso do átomo neutro de deutério, devemos considerar, para obter o seu momento angular total, o spin do núcleo (neste caso, 1), o spin do elétron e o momento angular orbital. Chamando de  $I$  o operador para o spin do núcleo,  $S$ , o operador para o spin do elétron e  $L$ , o operador para o momento angular orbital, podemos definir o momento angular eletrônico  $J = L + S$  e o momento angular total do átomo como  $F = J + I$ . Deste modo:

- Quais os possíveis valores para os números quânticos  $j$  e  $f$  caso o deutério se encontre no estado fundamental, nível  $1s$ ?
- Quais os possíveis valores para os mesmos números quânticos do item a) caso o deutério se encontre no primeiro estado excitado, nível  $2p$ ?