Continuidade uniforme

Vamos analisar um exemplo:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

f é contínua.

Dado $x_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} < \varepsilon \iff \frac{1}{x_0} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \varepsilon$$

Se $\underbrace{\frac{1}{x_0} - \varepsilon > 0}_{\varepsilon < \frac{1}{x_0}}$ $\qquad \frac{x_0}{1 - x_0\varepsilon} > x > \frac{x_0}{1 + x_0\varepsilon}$

$$\frac{x_0}{1 + x_0\varepsilon} < x < \frac{x_0}{1 - x_0\varepsilon}$$

$\frac{x_0}{1+x_0\varepsilon} \quad x_0 \quad \frac{x_0}{1-x_0\varepsilon}$

Se $x \in I = \left(\frac{x_0}{1 + x_0\varepsilon}, \frac{x_0}{1 - x_0\varepsilon}\right)$ então $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$. $\left(\delta = \min\left\{x_0 - \frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}, \frac{x_0}{1-x_0\varepsilon} - x_0\right\}\right)$

Suponha

$0 < \varepsilon < 1$ e $\delta > 0$ qualquer $\qquad 0 < y < x < \delta$

$n > \frac{1}{\delta}$ $\qquad |y - x| < \delta$

$x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$ $\qquad |f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \varepsilon$

"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$

Se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |ax + b - ax_0 - b| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0| < |a| \cdot \delta = \varepsilon$

se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

O mesmo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ vale para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Outros exemplos:

$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$s(x, y) = x + y$

$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$p(x, y) = x \cdot y$

s e p são contínuas em $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$B((a, b) ; \delta) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\|_m < \delta \}$

$\|(x, y) - (a, b)\|_m = \max\{|x - a|, |y - b|\} < \delta$

$|x - a| < \delta$ e $|y - b| < \delta$.

se $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ então $|s(x,y) - s(a,b)| =$

$$= |x+y-a-b|$$

$$= |x-a+y-b| \le |x-a| + |y-b|$$

Como $|x-a| < \delta$ e $|y-b| < \delta$ $\Rightarrow$ $|x-a| + |y-b| < 2\delta = \varepsilon$ se $\delta = \varepsilon/2$

$$|s(x,y) - s(x',y')| < 2\delta = \varepsilon$$

$$|p(x,y) - p(a,b)| = |xy - ab| = |xy - ya + ya - ab| =$$

$$|(x-a).y + (y-b).a| = |(x-a).y - (x-a)b + (x-a).b + (y-b).a|$$

$$\le |(x-a)(y-b)| + |(x-a).b| + |(y-b).a|$$

$$\le |x-a|.|y-b| + |x-a|.|b| + |y-b|.|a|$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}.\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon\,|b|}{3.(|b|+1)}^{<1} + \frac{\varepsilon.|a|}{3(|a|+1)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

se $\delta = \min\left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3(|b|+1)}, \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)} \right\}$.

aumentando a ou b, para o mesmo ε, δ deve diminuir.

Definição: Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, quando para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, sejam quais forem $x, y \in X$.

Teorema: $f: X \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua em $X \subset \mathbb{R}^m$ se, e somente se, para quaisquer duas sequências x_k, y_k em X com $\lim \|x_k - y_k\| = 0$ se tenha $\lim \|f(x_k) - f(y_k)\| = 0$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que f é uniformemente contínua, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ / $\|x - y\| < \delta$ então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Considerando que $\lim \|x_k - y_k\| = 0$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ / $k > k_0$, $\|x_k - y_k\| < \delta$, e, dessa forma, $\|f(x_k) - f(y_k)\| < \varepsilon$ se $k > k_0$.

Logo, $\lim \|f(x_k) - f(y_k)\| = 0$

($\Leftarrow$) Suponha que f não é uniformemente contínua, então $\exists\, \varepsilon > 0$ / $\forall\, \delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k, y_k \in X$ com $\|x_k - y_k\| < 1/k$ e $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon$.

Desta forma, $\lim \|x_k - y_k\| = 0$ mas $\lim \|f(x_k) - f(y_k)\| \neq 0$.

Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua

$x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{n} \Rightarrow |x_n - y_n| = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim |x_n - y_n| = 0$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2}\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

$\therefore \lim |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0$.

Teorema: Toda aplicação contínua $f: X \to \mathbb{R}^n$, definida num conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^m$, é uniformemente contínua.

Demonstração: Suponha que f não seja uniformemente contínua.

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ existem $\bar{x}, \bar{y} \in X$ com $\|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta$ mas $\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\| \geq \varepsilon$.

Considerando $\delta = \frac{1}{k}$, existem $x_k, y_k \in X \mid \|x_k - y_k\| < 1/k$, logo, $\lim \|x_k - y_k\| = 0$ e $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como X é compacto, (x_k) é limitada e, portanto, existe subseq. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ convergente, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} x_k = a \in X$ (pois X é fechado).

Então, como $y_k = y_k - x_k + x_k$, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} y_k = a$.

Sendo f contínua, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} f(x_k) = f(a)$ e $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} f(y_k) = f(a)$, ou seja, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} \| f(x_k) - f(y_k)\| = 0$,

contradizendo o fato que $\| f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Exemplo: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua.

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua $\Rightarrow$ $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$

Se $x, y \in [1, +\infty)$, $x \geq 1$ e $y \geq 1$ $\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon \quad \text{se } \delta = 2\varepsilon.$$

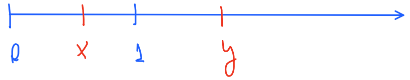
$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é unif. contínua. $\left\{ \begin{array}{l} \text{dado } \varepsilon > 0, \ \exists\ \delta \mid \\ x, y \in [0, +\infty) \mid |x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon \end{array} \right.$

Dados $x,y \in [0,1]$, $\exists\, \delta_1 > 0 \,/\, |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon/2$ /

$x,y \in [1,+\infty)$, $\exists\, \delta_2 > 0 \,/\, |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon/2$ /

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $x,y \in [0,+\infty)$, $|x-y| < \delta$ (se $x,y \in [0,1]$ OK; se $x,y \in [1,\infty)$ OK)

Se $x \in [0,1]$ e $y \in [1,\infty)$ então



se $|x-y| < \delta$ então $|x-1| < \delta$ e $|y-1| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(1)| + |f(y) - f(1)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Definição: Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, chama-se lipschitziana quando existe $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < c\|x-y\|$ para quaisquer $x,y \in X$.

c é chamada de constante de Lipschitz de f.

Resultado: Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua (basta considerar $\delta = \varepsilon/c$)

A recíproca não é verd

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua mas não é lipschitziana

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\boxed{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot |x-y|}$$

quanto menor x e y, maior $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Definição: Quando $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação lipschitziana com $c = 1$, dizemos que f é uma contração fraca. Se $0 < c < 1$, dizemos que f é uma contração. (trocar as normas mantém o fato de ser lipschitz, mas pode deixar de ser contração)

Exemplo: Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. $A_{n \times m}$

T é contínua.

$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (T_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, T_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$

$T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$T_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$

$x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \ldots + x_m a_{im}$

$T_i = a_{i1} \cdot \Pi_1 + a_{i2} \cdot \Pi_2 +$.

$T_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 +$.

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \ldots + x_m T(e_m)$$

$$= x_1 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) + x_2 (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) + \ldots + x_m (a_{1m}, \ldots, a_{nm})$$

$$= \big(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_m a_{1m},$$
$$x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_m a_{2m},$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \ldots + x_m a_{nm}\big)$$

Outra forma:

$\|T(x)\| = \|T(\sum x_i e_i)\|$

$\|\sum x_i T(e_i)\|$

$\leq \sum |x_i| \cdot \|T(e_i)\| \leq c\, \|x\|$.

$\therefore T_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \ldots + x_m a_{in}$

é contínua p/ $i = 1, \ldots, n$.

considerando a norma da soma em $\mathbb{R}^m$ e

$c = \max\{\|T(e_1)\|, \ldots, \|T(e_m)\|\}$

Como $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \,/\, \|x\| = 1\}$ é compacta.

T é limitada em S^{m-1}.

O número

$$|T| = \sup\{\|T(x)\| : x \in S^{m-1}\}$$

chama-se a norma da transformação linear T.

$|T|$ é realmente uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Afirmação: $\forall v \in \mathbb{R}^m$, $\|T(v)\| \leq |T| \cdot \|v\|$.

De fato, se $v = 0$ é óbvio. Se $v \neq 0$, então $\frac{v}{\|v\|} \in S^{m-1}$, daí

$$T\left(\frac{v}{\|v\|} \cdot \|v\|\right) = \|T(v)\| = \|v\| \cdot \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| \leq \|v\| \cdot |T|$$

Assim, se $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq |T| \, \|x-y\|$$

e T é lipschitziana com constante de Lipschitz $|T|$.

Exemplo: Imersões isométricas são aplicações

$$f: X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que preservam distâncias, isto é, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$, $\forall\, x, y \in X$.

Exemplo: $m < n$ e $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$$

Observe que uma imersão isométrica é Lipschitziana, logo, uniformemente contínua.

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

É, também, sempre injetiva, pois se $f(x) = f(y)$ então $\underbrace{\|f(x) - f(y)\|}_{0} = \|x - y\| \Rightarrow x = y$

Uma imersão isométrica chama-se uma isometria de X em Y se considerarmos $f: X \to Y = f(X)$

Sua inversa $f^{-1}: Y : X$ é uma isometria de Y em X.

As translações são exemplos de isometria

$$T_a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^n \text{ fixado.}$$

$$T_a(x) = x + a$$

$$(T_a)^{-1} = T_{-a}$$

Exemplos de contrações fracas

- soma de vetores:
$$s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\| s(x,y) - s(x',y') \| = \| x + y - x' - y' \| = \| x - x' + y - y' \|$$
$$\leq \|x - x'\| + \|y - y'\| = \| \underbrace{(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{2n}} - \underbrace{(x', y')}_{\in \mathbb{R}^{2n}} \|$$

considerando a norma da soma

- projeções: $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$
$$\pi_i(x) = x_i$$

para as 3 normas usuais

$$\| \pi_i(x) - \pi_i(x') \| = \underbrace{| x_i - x_i' |} \leq \underbrace{\| x - x' \|}$$

- as normas: $\| \cdot \| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

- as distâncias
$$d : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$$
$$d(x, y) = \|x - y\|$$

é uma contração fraca considerando em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a norma da soma.

$$|d(x,y) - d(x',y')| = |\,\|x-y\| - \|x'-y'\|\,|$$

$$\leq \|x - y - x' + y'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| = \|(x,y) - (x',y')\|$$

. Considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \operatorname{sen} x \cdot e^{x^2+y^3}$$

Vamos mostrar que f é contínua

. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x^2)$.

Vamos mostrar que f não é uni. f. contínua.

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \qquad \cos(n\pi + \pi) = \cos(n\pi)\cdot \overset{-1}{\cancel{\cos \pi}} - \operatorname{sen} n\pi \cdot \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen} \pi}}$$

$$y_n = \sqrt{n\pi} \qquad = -\cos n\pi$$

$$f(x_n) = -\cos n\pi \qquad |f(x_n) - f(y_n)| = 2|\cos n\pi| = 2$$

$$f(y_n) = \cos(n\pi)$$