Norma

Definição: Uma norma é uma função definida em um espaço vetorial V com valores em $\mathbb{R}$, denotada por $\|\cdot\|$, que satisfaz:

N1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

N3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Se temos um produto interno em V, temos uma norma.
Basta considerar

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Quando $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$ ("tamanho do vetor")

chamada de norma euclidiana e é motivada pela fórmula do comprimento de um vetor no plano em coordenadas cartesianas (usando Pitágoras).

Vamos verificar que a norma euclidiana é, de fato, uma norma.
Obviamente, $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \iff x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n \iff x = 0$.
Também, $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \ldots + x_n)^2} = |\alpha| \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |\alpha| . \|x\|$

Para demonstrar N3, precisamos de um resultado fundamental da Geometria Euclidiana: a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.

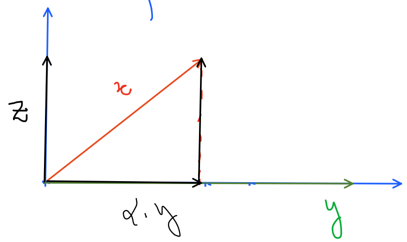
Antes de fazermos a demonstração, definimos quando dois vetores são ortogonais:

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x e y são ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$.

É fácil ver que 0 é ortogonal a todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

Também, considerando a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, então e_i é ortogonal a e_j, se $i \neq j$.

Observe o seguinte esquema:



Dados dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $y \neq 0$, colocamos $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$

e consideramos $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y.

$$\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha \langle y, y\rangle =$$

$$= \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} . \|y\|^2 = 0$$

αy é a projeção ortogonal de x na direção de y.

$x = \alpha y + z$ (esta decomposição é única)

Voltando a demonstração do teorema:

Se $y = 0$, vale a igualdade.

Se $y \neq 0$, então, considerando a observação acima, se $z = x - \alpha y$, com $\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

$$\|x\|^2 = \langle z + \alpha y, z + \alpha y \rangle = \langle z, z \rangle + \alpha \langle z, y \rangle + \alpha \langle y, z \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle$$

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \alpha^2 \|y\|^2$$

Daí,

$$\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \cdot \|y\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \Rightarrow (\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Observando a demonstração, vemos que a igualdade vale se $\|z\| = 0$, ou seja $x = \alpha \cdot y$.

Para mostrarmos N3, observamos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

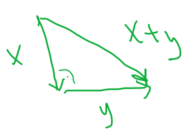
$$= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\therefore \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Teorema de Pi

Se $x \perp y$,



$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Temos outras normas que podemos considerar em $\mathbb{R}^n$. As mais usuais são a norma do máximo

$$\|x\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

e a norma da soma

$$\|x\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Exercício: Verificar que definem realmente normas em $\mathbb{R}^n$.

Também podemos verificar que

$$\boxed{\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n \cdot \|x\|_m}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Dizemos que as 3 normas, $\|x\|$, $\|x\|_m$ e $\|x\|_s$ são equivalentes, devido as desigualdades acima.

Duas normas arbitrárias $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes quando existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$|x| \leq a\|x\| \quad \text{e} \quad \|x\| \leq b|x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

$$B(x,r)_{\|\cdot\|} \subset B(x, ar)_{|\cdot|}$$

Pode ser provado que

$B(x; r)_{|\cdot|} \subset B(x; b\,r)_{\|\cdot\|}$

Duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes

Distância

Uma métrica ou distância é uma função definida em $V \times V \to \mathbb{R}$, onde V é um espaço vetorial que satisfaz:

d1. $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

d2. $d(x,y) = d(y,x)$

d3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdade do triângulo)

Se temos uma norma em um espaço vetorial V, temos uma distância definindo

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

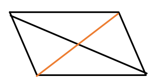
As duas primeiras propriedades são óbvias e para mostrar d3, temos

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

OBS: A norma euclidiana provém de um produto interno, mas nem sempre uma norma provém de um produto interno.

Para verificarmos se provém ou não, podemos utilizar a identidade do paralelogramo

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$



Se uma norma provém de um produto interno, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ e

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \quad +$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Se considerarmos a norma da soma $\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

e considerarmos os vetores e_1 e e_2

$$\|e_1 + e_2\|_S = \|(1,1,0,0,\ldots,0)\| = 2$$
$$\|e_1 - e_2\|_S = \|(1,-1,0,0,\ldots,0)\| = 2$$
$$\|e_1\|^2 = 1$$
$$\|e_2\|^2 = 1$$

$$\|e_1+e_2\|_S^2 + \|e_1-e_2\|_S^2 = 4+4 = 8 \quad \text{e} \quad 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 = 2.1 + 2.1 = 2$$

Análogo para a norma do máximo (exercício)

Propriedade: $\boxed{\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|}$ Exercício: demonstrar

Bolas e Conjuntos Limitados

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ permite que se definam algumas noções geométricas básicas:
Uma bola aberta de centro num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r.

$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$ bola aberta

$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\}$ bola fechada $B[0;1]$: disco unitário

$S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\}$ esfera $S[0,1]$: esfera unitária

S^{n-1} (notação)

Quando $n = 2 \Rightarrow S^1$

$B[a;r] = B(a;r) \cup S[a;r]$.

Se $n = 1$,

$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$

para as 3 normas

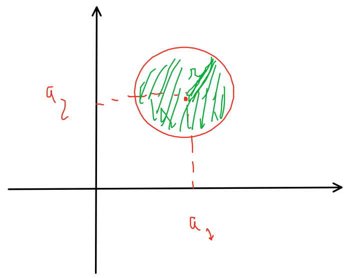
$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$

$S[a;r] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$

Se $n = 2$, a forma geométrica das bolas e esferas dependem, em geral, da norma que se usa.

Norma euclidiana $\quad a = (a_1, a_2)$

$$B[a;r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (a_1,a_2)\| \leq r\}$$



$$\|(x,y) - (a_1, a_2)\| \leq r$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} \leq r$$

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2$$

disco fechado com centro em (a_1, a_2) e raio r.

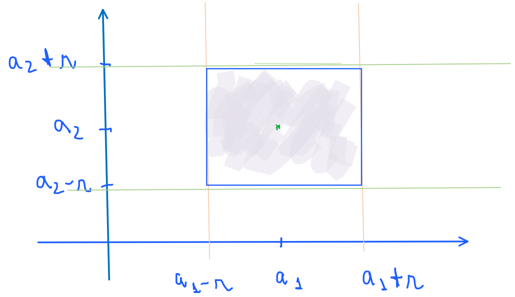
Norma do máximo: $\quad B[a;r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (a_1,a_2)\|_m \leq r\}$

$$\|(x-a_1, y-a_2)\|_m \leq r$$

$$\max\{|x-a_1|, |y-a_2|\} \leq r$$

Se $|x-a_1| \leq r$ então $|y-a_2| \leq r \Rightarrow$

$a_1 - r \leq x \leq a_1 + r$ e $a_2 - r \leq y \leq a_2 + r$



"quadrado"

Norma da soma: $B[a;r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (a_1,a_2)\|_S \leq r\}$

$$\|(x,y) - (a_1, a_2)\|_S = |x - a_1| + |y - a_2| \leq r$$

4 casos:

1) $x \geq a_1$ e $y \geq a_2$

$$x - a_1 + y - a_2 \leq r$$
$$y \leq -x + r + a_1 + a_2$$

2) $x \geq a_1$ e $y \leq a_2$

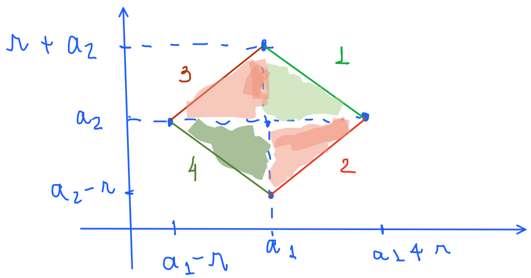
$$x - a_1 - y + a_2 \leq r$$
$$-y \leq r - x + a_1 - a_2$$
$$y \geq x - a_1 + a_2 - r$$

3) $x \leq a_1$ e $y \geq a_2$

$$-x + a_1 + y - a_2 \leq r$$
$$y \leq x + r - a_1 + a_2$$

4) $x \leq a_1$ e $y \leq a_2$

$$-x + a_1 - y + a_2 \leq r$$
$$-y \leq x - a_1 - a_2 + r$$
$$y \geq -x + a_1 + a_2 - r$$



"losango"

como

$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_m$$

$$B'_m \subset B_S \subset B \subset B_m$$

$\downarrow$

$B[a, r/n]$

OBS: Se $a = (a_1, \dots, a_n)$, $B[a;r] \subset \mathbb{R}^n$ considerando a norma do máximo, então $B[a;r] = [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$

Definição: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O segmento de reta de extremos x e y é o conjunto

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a X, ou seja: $x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X$.

Exemplos de conjuntos convexos:

- Todo subespaço vetorial $E \subset \mathbb{R}^n$ é convexo
- Todo subespaço afim $a + E = \{a + x : x \in E\}$ (onde $E \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial) é convexo
- $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são convexos então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é convexo
- $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ não é convexo (considere e_1 e $-e_1$)
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2\}$. X não é convexo. Exercício

Teorema: Toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ é convexa.

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

$x, y \in B$ e $z = (1-\bar{t})x + \bar{t}y$, $0 \leq \bar{t} \leq 1$

$$\|z - a\| = \|(1-\bar{t})x + \bar{t}y - a\| = \|(1-\bar{t})x - (1-\bar{t})a + (1-\bar{t})a + \bar{t}y - a\|$$

$$= \|(1-\bar{t})(x-a) + \bar{t}(y-a)\| \leq |1-\bar{t}|\,\|x-a\| + |\bar{t}|\,\|y-a\|$$

$$= (1-\bar{t})\|x-a\| + \bar{t}\,\|y-a\| < (1-\bar{t})\cdot r + \bar{t}\cdot r = r$$

Podemos trocar $<$ por $\leq$ e assim $B[a;r]$ tb é convexa

Esta demonstração independe da norma usada, assim, as bolas relativas diferentes normas em $\mathbb{R}^n$ são convexas.

Definição: Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in X$.

(ou seja, $X \subset B[0;c]$)

Se $X \subset B[a;r]$ então $X \subset B[0; r + \|a\|]$ e é, portanto, limitado.

$\therefore$ X é limitado $\iff$ X está contido em alguma bola.

Como valem as desigualdades

$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n.\|x\|_m \,,$$

se um conjunto é limitado com relação a uma das normas, é limitado com relação às duas outras.

Teorema: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, suas projeções $X_1 = \pi_1(X), \dots, X_n = \pi_n(X)$, onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, $i = 1, \dots, n$, são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.

Demonstração: $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}^n$

$$X \subset C_1 \times \dots \times C_n \iff \pi_1(X) \subset C_1, \dots, \pi_n(X) \subset C_n.$$

Vamos considerar a norma do máximo:

$$X \subset \mathbb{R}^n \text{ é limitado} \iff \exists\, c > 0 \,/\, X \subset B[0; c] = \underbrace{[-c, c] \times \dots \times [-c, c]}_{n \text{ termos}} \iff$$

$$\pi_1(X) \subset [-c, c], \dots, \pi_n(X) \subset [-c, c] \iff \pi_1(X), \dots, \pi_n(X) \text{ são limitados em } \mathbb{R}.$$

OBS: se A é dada abaixo e o produto interno dado por $x^t A y$:

$(*)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + 3y^2}$