MAT0264 - Anéis e Corpos
Lista 2 - 2023

1. Determine todos os subanéis de $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z}_{18}$.

2. Seja R um anel. Definimos o **centro** de R como

$$Z(R) = \{x \in R \mid xa = ax \forall a \in R\}.$$

- (a) Prove que $Z(R)$ é um subanel comutativo de R .
- (b) Mostre que $Z(R) = R$ se, e somente se, R é comutativo.
- (c) Determine $Z(M_n(\mathbb{R}))$.
- (d) Determine $Z(\mathbb{H})$.
- (e) Mostre que o centro de um anel com divisão é um corpo.

3. Seja $m \in \mathbb{Z}$ um inteiro livre de quadrados. Considere

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

- (a) Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ é um subanel de $\mathbb{C}$.
- (b) Definimos uma função $N : \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - bm^2 = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}).$$

Mostre que para todos $\alpha = a + b\sqrt{d}$ e $\beta = c + d\sqrt{d}$ vale que $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

- (c) Mostre que $\alpha \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{m}])$ se, e somente se, $N(\alpha) = \pm 1$.

4. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que:

- (a) $\mathbb{Z}[i]$ é um subanel de $\mathbb{C}$.
- (b) Determine $U(\mathbb{Z}[i])$.

Observação: Este anel é chamado **Anel de Inteiros de Gauss**.

5. Seja p um número inteiro positivo primo. Considere o conjunto

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Mostre que:

- (a) Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ um subcorpo de $\mathbb{C}$.
- (b) Mostre que os únicos subcorpos de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ são $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

6. Seja $X \neq \emptyset$ e $\{R_i, i \in X\}$ um conjunto de subanéis de um anel R . Mostre que $\bigcap_{i \in X} R_i$ é um subanel de R .

7. Seja $A \subset R$. Seja $X = \{S \leq R \mid A \subset S\}$. Mostre que $\bigcap_{S \in X} S$ é o "menor" subanel de R que contém o conjunto A . Esse subanel é denotado por $[A]$ e é chamado de **subanel de R gerado por A** .

8. Seja

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Mostre que S é um subanel de $M_2(\mathbb{R})$.

Observação: Este subanel de $M_2(\mathbb{R})$ é uma "cópia" de $\mathbb{C}$ contida em $M_2(\mathbb{R})$.

9. Mostre que o único subcorpo de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}$ e que o único subcorpo de $\mathbb{Z}_p$ é $\mathbb{Z}_p$.

10. Seja R um anel e seja $a \in Z(R)$. Mostre que $aR = \{ax \mid x \in R\}$. Mostre que aR é um ideal de R .

11. Seja R um anel comutativo e seja $a \in R$. Considere o seguinte subconjunto de R :

$$L(a) = \{x \in R \mid xa = 0\}.$$

Mostre que $L(a)$ é um ideal de R .

12. Seja R um anel e seja I um ideal de R .

(a) Seja $L(I) = \{x \in R \mid xu = 0, \text{ para todo } u \in I\}$. Mostre que $L(I)$ é um ideal de R .

(b) Seja $(R : I) = \{x \in R \mid rx \in I, \text{ para todo } r \in R\}$. Mostre que $(R : I)$ é um ideal de R que contém I .

13. Mostre que os únicos ideais de $M_n(\mathbb{R})$ são $\{0\}$ e $M_n(\mathbb{R})$.

14. Sejam I e J ideais de um anel R . Mostre que o conjunto

$$I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

também é um ideal de R . Vale o mesmo resultado para subanáis? Isto é, se S e T são subanáis de R então

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$$

é um subanel de R ?

15. Seja R um anel, seja I um ideal de R e seja S um subanel de R . Mostre que $I \cap S$ é um ideal de S .

16. Seja R um anel com unidade e seja I um ideal de R . Mostre que se $I \cap U(R) \neq \emptyset$ então $I = R$.

17. Seja R um anel comutativo com unidade. Mostre que R é um corpo se, e somente se, seus únicos ideais são $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

NOTAÇÃO:

- Se S é um subanel de um anel R , escrevemos $S \leq R$.
- Se I é um ideal de R , escrevemos $I \triangleleft R$.