

Topologia Geral versão 2023
Notas de Aula
MAT317 (Bacharelado em Matemática) e
MAT5741 (Mestrado em Matemática)

Artur Hideyuki Tomita
Departamento de Matemática
IME-USP

Sumário

1	Topologia. Abertos. Bases e Sub-bases de Abertos.	2
1.1	‘Está aberta a temporada de topologia’.	2
1.1.1	Noção de aberto e topologia	2
1.1.2	Definição de Topologia.	3
1.2	Base de abertos.	4
1.2.1	Definição de Base de Abertos	4
1.2.2	Topologia gerada por Base de Abertos.	5
1.2.3	Topologia gerada por uma métrica usando bolas abertas como Base de Abertos.	5
1.3	Sub-bases e topologia gerada por sub-bases.	5
1.3.1	Definição de Sub-base de Abertos. Definição de ordens lineares.	6
1.3.2	Topologia gerada por uma Sub-base. Topologia da ordem a partir da Sub-base.	6
2	Vizinhanças, bases locais, fechados e fechos	7
2.1	Vizinhanças.	7
2.1.1	Vizinhanças.	7
2.1.2	Sistemas fundamentais de vizinhanças. Bases locais.	7
2.2	Topologias geradas por bases locais.	8
2.2.1	Topologia gerada por bases locais.	8
2.2.2	A reta de Sorgenfrey. O plano de Niemytski.	9
2.3	‘Mas se é fechado, como pode ser aberto?’.	10
2.3.1	Fechados e fechos.	10
2.4	‘Não sei se está próximo, mas ainda não encostou’.	11
2.4.1	Quando um ponto está no fecho.	11
2.5	Topologias definidas por bases de fechados.	13
2.5.1	Definição de Base de Fechados.	13
2.5.2	Topologia gerada por Base de Fechados.	13
2.5.3	Coming next...	14
3	Sequências. Densos. Axiomas de enumerabilidade.	15
3.1	Ponto de Acumulação de Conjuntos e Sequências.	15
3.1.1	Ponto de acumulação de conjunto. Ponto de acumulação de sequência.	15
3.1.2	‘Seguindo os passos da sequência’: subsequências.	16
3.1.3	Convergência de sequências em pontos com base local enumerável.	16
3.1.4	Quando sequências não conseguem descrever a topologia.	18
3.2	‘I see points of D everywhere. All the time’ - densos.	18
3.2.1	Definição de denso.	18
3.2.2	Os três axiomas de enumerabilidade.	19
3.2.3	Toda base de abertos contém uma base de abertos de tamanho mínimo.	20
4	Continuidade. Propriedades Topológicas. Homeomorfismos. Topologias mais finas e menos finas.	22
4.1	Continuidade em um ponto. Continuidade.	22
4.1.1	Continuidade local. De volta a ϵ e δ . Equivalências à continuidade local.	22
4.1.2	Continuidade. Equivalências à continuidade.	23
4.2	‘É a mesma coisa do ponto de vista topológico’.	25

4.2.1	Homeomorfismos.	25
4.2.2	Propriedade topológica.	26
4.3	‘Minha topologia tem mais abertos do que a sua’.	26
4.3.1	Topologias mais fina. Topologia menos fina.	26
4.3.2	Como comparar topologias usando Bases de Abertos.	27
5	Topologia inicial, Fréchet, separação de pontos	29
5.1	Imitando quem está na sua frente.	29
5.1.1	Topologia gerada por funções contínuas. Topologia inicial.	29
5.2	Convergência enumerável	31
5.2.1	Espaços de Fréchet. Espaços sequenciais.	31
5.2.2	Continuidade de funções em espaços sequenciais.	31
5.2.3	Continuidade local em espaços de Fréchet.	31
5.2.4	Um exemplo de convergência mais geral: rede.	32
5.2.5	Coming next...	33
5.3	Separando pontos: Espaços T_0 , T_1 e Hausdorff (T_2).	33
5.3.1	Espaços T_0 , T_1 e T_2	33
5.3.2	‘Este aberto é pequeno demais para dois limites’: Espaços Hausdorff.	36
5.3.3	Comparando duas funções contínuas em espaços Hausdorff.	36
6	Filtros. Interior. Topologias geradas por Fecho e Interior.	40
6.1	Filtros	40
6.1.1	Definição de Filtros.	40
6.1.2	Ponto de acumulação e convergência de filtros.	41
6.1.3	Bases de filtros. Extensão de filtro.	42
6.1.4	Filtros e continuidade.	42
6.2	‘O aberto dentro de você’.	43
6.2.1	Definição de Interior.	43
6.3	Fecho vs Interior.	43
6.4	Topologias geradas pelos Operadores Fecho e Interior.	44
7	Redes e Subredes. Redes vs Filtros.	46
7.1	‘Sai $\mathbb{N}$ e entra Conjuntos Dirigidos’: Redes.	46
7.1.1	Definição de Conjunto Dirigido.	46
7.1.2	Definição de Rede. Ponto de Acumulação e Convergência.	46
7.2	O exemplo que deu origem à rede rede.	47
7.2.1	Formalização do limite da integral de Riemann usando redes.	47
7.3	‘O ‘Jr’ da rede, pode ficar maior que a rede, mas segue seus passos’.	47
7.3.1	Subredes.	47
7.3.2	Rede vs sua Subrede.	47
7.3.3	Continuidade e Redes.	48
7.4	Dualidade de Redes e Filtros.	48
7.4.1	De redes para filtros.	48
7.4.2	De filtros para redes.	49
7.4.3	A dualidade de redes e filtros.	49
8	Subespaços. Subespaços métricos. Subespaços e Ordem Linear.	50
8.1	A topologia nos ‘cacos’ de X	50
8.1.1	Topologia de subespaço.	50
8.1.2	Propriedades hereditárias.	51
8.2	Subespaços e métrica.	51
8.2.1	A topologia da métrica do subespaço vs a topologia de subespaço do espaço métrico.	51
8.2.2	Axiomas da enumerabilidade em subespaços não métricos.	52
8.3	Imersão e ordem linear. Cortes de Dedekind.	52

9	Espaços regulares. Produto finito. Pseudométricas contínuas.	55
9.1	Separando pontos e fechados. Regularidade.	55
9.2	Produto topológico finito.	58
9.3	Pseudométricas contínuas.	60
9.3.1	Relacionando funções com pseudométricas,	60
10	Topologias geradas por pseudométricas. Grupos topológicos.	62
10.1	Topologia geradas por pseudométricas.	62
10.1.1	‘Esta pseudométrica rende até N vezes mais.’	62
10.2	Distância de ponto a fechado em espaços pseudométricos.	63
10.2.1	Distância de um ponto a um subconjunto.	63
10.2.2	Funções contínuas geradas por pseudométricas contínuas.	64
10.3	Grupos Topológicos.	64
10.3.1	Definição de grupo topológico.	64
10.3.2	Topologia de grupo gerada pelo sistema de vizinhanças do elemento neutro.	65
11	Produtos. Imersão.	67
11.1	Produtos Infinitos. O Axioma da Escolha. Produto caixa.	67
11.1.1	‘Que topologia para o produto de espaços topológicos arbitrários combina melhor com o produto finito?’	67
11.2	Produto de Tychonoff.	68
11.2.1	Definição do produto de Tychonoff.	68
11.2.2	Convergência em produtos.	69
11.2.3	Propriedade produtiva.	70
11.2.4	Produto não enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade.	71
11.3	‘Aquecimento antes de mergulhar’.	73
11.4	‘Kit imersão’.	73
11.4.1	Função diagonal usando uma família de funções.	73
11.4.2	Famílias que separam pontos.	73
11.4.3	Famílias que separam pontos de fechados	74
11.5	‘Antes de mergulhar num produto, verifique se os equipamentos funcionam’.	74
11.5.1	Imersão de espaços T_0	74
11.5.2	Imersões de 0-dimensionais.	74
12	Separando fechado de fechados.	76
12.1	Axiomas de separação para fechados e fechados.	76
12.1.1	Normalidade. T_4	76
12.1.2	‘Colcha de retalhos’ ou ‘amarrar sapatos’?	76
12.1.3	Regular + algo enumerável = normal.	78
12.2	‘Conte comigo para encontrar um espaço que não é normal’.	79
12.2.1	Cardinalidade de conjuntos.	79
12.2.2	Usando cardinalidade para mostrar que um espaço não é normal.	80
12.3	‘Tem alguém não-normal aí?’.	81
12.3.1	Espaços hereditariamente normais. Espaços T_5	81
12.3.2	‘Ser normal não é sempre produtivo’.	83
13	Básico de Compacidade.	85
13.1	‘Não só de fechado e limitado vive o compacto’.	85
13.1.1	Bê-á-bá da compacidade.	85
13.1.2	Compactos com axiomas de separação.	87
13.1.3	Três provas de que produto finito de compactos é compacto.	87

14 Compacidade em espaço ordenado. O Lema de Urysohn.	90
14.0.1 Ordem e Compacidade. A compacidade de $[0, 1]$.	90
14.1 Pré aquecimento ao Lema de Urysohn	92
14.1.1 Uma equivalência de $\mathbb{R}$ como conjunto ordenado.	92
14.2 ‘Uma ponte entre dois fechados’: Lema de Urysohn.	94
14.2.1 Fazendo rodela para construir uma função contínua.	94
15 Separando ponto e fechado por funções.	97
15.1 Espaços completamente regulares.	97
15.1.1 Definição de Espaços completamente regulares.	97
15.1.2 Algumas condições equivalentes a ser completamente regular.	97
15.1.3 Completamente regular, pseudométricas e topologias iniciais de completamente regulares.	98
15.1.4 Produto enumerável de espaços metrizáveis é metrizável.	99
15.2 O Axioma de Separação $T_{3\frac{1}{2}}$.	99
15.2.1 Definindo $T_{3\frac{1}{2}}$	99
15.2.2 Por que $T_{3\frac{1}{2}}$? E outras observações sobre a definição.	99
15.3 Resumindo as relações T_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$.	99
15.3.1 Um T_3 que não é $T_{3\frac{1}{2}}$.	100
15.3.2 Um $T_{3\frac{1}{2}}$ e não é T_4 .	100
15.3.3 Imersão de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ em produtos de intervalos.	102
15.3.4 Imersões ‘econômicas’. Um teorema de metrização.	103

Sobre estas notas e o que veremos neste curso

Estas notas são uma modificação das notas de aulas preparadas para o curso de Topologia Geral do IME-USP durante a pandemia em 2021.

O objetivo destas notas é tentar escrever como se estivéssemos numa aula presencial então algum blá blá desnecessário e repetitivo pode (e vai) acontecer se comparado a um livro. Em algum momento escrever as notas durante a pandemia se tornou um processo desgastante, e alguns títulos de secção foram escolhidos para alívio cômico de quem escreveu, mas talvez não faça sentido para quem for ler...

Como o objetivo é uma nota online, eu não vou otimizar para economizar folhas de papel.

Cada capítulo se refere a uma aula não presencial.

Comentários mais desnecessários vão estar em itálico.

O nosso objetivo é trabalhar com diversos conceitos topológicos, apresentar técnicas e exemplos que consideramos interessantes. O material é mais extenso do que qualquer curso de topologia que eu tenha dado antes então eu convido os interessados a ler tudo mesmo que isto não seja visto em aula.

Iremos introduzir alguns conceitos quando isto se tornar necessário, mesmo que comumente isto fosse aparecer num apêndice ou num capítulo introdutório. A ideia é que estas notas possam ser lidas como uma aula em ordem linear.

Para facilitar a busca, criamos algumas seções em cada aula com o nome do conceito que será estudado. Ao invés de tentar esgotar o assunto quando ele for introduzido, iremos tentar ir introduzindo os conceitos quando se parecer um bom momento e voltar quando se parecer necessário. Por exemplo, a parte de métricos aparece logo no início para darmos um exemplo de topologia gerada por bases de abertos, mas depois só voltamos a falar de métrica depois de algumas aulas. Também iremos ‘separar’ os axiomas de separação e apresentá-los aos poucos, enunciando-os quando alguma demonstração comece a ‘pedir’ o axioma de separação. Por exemplo, iremos adiar a definição de normalidade até que tenhamos preparado o caminho para definir imersão e então provar o Lema de Urysohn quando formos provar o primeiro teorema básico de metrização. Iremos provar que produtos enumeráveis de espaços completamente metrizáveis é completamente metrizável em outro momento também. Quando formos falar sobre compacidade, iremos primeiro nos ater ao produto finito e apenas em outro capítulo falar sobre o Teorema de Tychonoff (o produto arbitrário de compactos é compacto). Apenas quando tivermos mais ferramentas para aplicações iremos falar da compactificação de Stone Čech e iremos usá-lo para mostrar alguns subespaços que servem de exemplos.

Iremos eventualmente falar sobre boa ordem, ordinais e o Axioma da Escolha e apresentar alguns exemplos utilizando explicitamente as equivalências do Axioma da Escolha, mas iremos apenas apresentar o mínimo para que isto possa ser feito. Pretendemos apresentar algumas construções que não fazem parte de um primeiro curso, mas darão um pouco mais da ideia da variedade de exemplos existentes.

Estamos incluindo diversos resultados que não são cobertos num primeiro curso (nem num segundo curso), mas espero que dêem uma ideia das técnicas que aparecem. Em particular incluímos alguns resultados sobre espaços de Baire usando jogos topológicos e outro usando conjuntos estacionários e c.u.b.’s.

Capítulo 1

Topologia. Abertos. Bases e Sub-bases de Abertos.

Usaremos os abertos do $\mathbb{R}^n$ para pensarmos sobre a noção intuitiva de vizinhança para então definir topologia. A partir da definição do que são os abertos da topologia, definiremos formalmente vizinhanças, sistemas fundamentais de vizinhança e bases de abertos. Veremos também que é mais natural definir uma topologia usando bases de abertos e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas.

1.1 ‘Está aberta a temporada de topologia’.

1.1.1 Aberto e Noção intuitiva de Aberto. Definição de Topologia.

Vemos o termo aberto inicialmente em intervalo aberto no Cálculo Diferencial e Integral I. Já no Cálculo Diferencial e Integral II, passamos a ouvir falar em bolas abertas e conjunto aberto. A noção de bola aberta no $\mathbb{R}^n$ (as bolas abertas de $\mathbb{R}$ são intervalos abertos) está relacionada à distância Euclidiana. Um conjunto é vizinhança de um ponto se existe uma bola aberta centrada nesse ponto que está contido no conjunto. Um conjunto é aberto se ela é uma reunião de bolas abertas. Equivalentemente, um conjunto é aberto se e somente se é vizinhança de todos os seus pontos.

A noção mais geral de distância é a noção de espaço métrico. A partir disso definiremos bolas abertas e então vizinhanças e abertos como descrito acima. Uma outra forma de tentar generalizar a topologia do $\mathbb{R}^n$ foi usando sequências convergentes sugerida por Fréchet, mas a noção de espaço métrico se tornou mais popular.

Neste ponto haveria quem prefira definir espaços métricos e divagar sobre topologias de espaços métricos, porém, por que deveríamos tentar associar uma métrica a uma topologia quando o ‘porto seguro de usar uma métrica’ para definir topologia estaria em pensar que ainda estamos trabalhando com $\mathbb{R}^n$?

Vamos dedicar algum tempo falando de pseudométricas, que apesar de parecer apenas uma ‘régua’ que mede pior as coisas, elas acabam aparecendo em situações que não podem ser descritas por uma métrica. Isso não será feito junto com as métricas apenas por que métricas parecem ser mais naturais a partir de $\mathbb{R}^n$ do que uma situação onde dois pontos distintos podem ter distância 0.

Apesar de métrica ser uma noção mais geral, ela ainda não descreve todos os espaços que aparecem naturalmente. Por exemplo, o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a topologia da convergência pontual é um exemplo de um espaço que não é descrito por uma métrica.

Para intuir sobre a definição de topologia vamos pensar em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$ se quiser pensar em desenhos num plano).

Definição 1.1. Dado um ponto $x \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$ com $x \in A$, dizemos que A é uma vizinhança de x na topologia usual de $\mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que $]x - \delta, x + \delta[\subseteq A$, ou seja se A contém todos os pontos suficientemente ‘próximos’ de x .

Um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ é aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$ se para todo $x \in U$ existe um $\delta_{x,U} > 0$ tal que $]x - \delta_{x,U}, x + \delta_{x,U}[\subseteq U$. Normalmente só utilizamos δ para não sobrecarregar a notação, mas deve se ter em mente que o δ depende do x e do U .

O conjunto de todos os abertos definidos como acima é chamado de topologia usual da reta $\mathbb{R}$.

O conceito de vizinhança é o conceito central da ideia 'geométrica' de uma topologia. A vizinhança, mesmo sem usar o conceito de distância, dá uma noção de pontos em seu entorno. A vizinhança é a relação do ponto com seu entorno, mas não podemos definir simplesmente para cada ponto quem são suas vizinhanças sem se preocupar com quem são as vizinhanças dos outros pontos. É necessário que exista uma inter-relação entre as vizinhanças de cada ponto. Esse problema não aparece claramente em $\mathbb{R}$ devido a simetria da distância e da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$.

Com isto, apesar de ser mais natural pensar nas vizinhanças de cada ponto, a definição mais simples é definir o que se espera dos conjuntos abertos e definir as noções a partir daí. A noção intuitiva do que esperamos que abertos satisfaçam vem da topologia usual de $\mathbb{R}$:

- a) noção intuitiva do que vizinhanças devem satisfazer e
- b) a ideia de que um conjunto é aberto se e somente se é (*) vizinhança de todos os seus pontos.

É natural esperar que todo ponto tenha alguma vizinhança. Assim, X deve ser vizinhança de todos os seus pontos. Com isto, é natural que X seja um aberto. O vazio também satisfaz () por vacuidade, com isto é natural que seja um aberto. Se um conjunto é vizinhança de um ponto, é de se esperar que um conjunto maior ainda o seja. É natural esperar que a intersecção de duas vizinhanças seja uma vizinhança.*

1.1.2 Definição de Topologia.

O ponto principal da topologia não é 'julgar' quem deveria ser aberto. É verificar que uma família de conjuntos (uma topologia) satisfaz as propriedades desejadas para serem uma família de abertos. Ou seja, não importa se há motivação geométrica para os abertos, basta que elas satisfaçam as propriedades para serem os abertos de uma topologia.

Antes de prosseguirmos com a definição de topologia, iremos relembrar a notação de união e intersecção de uma família de conjuntos (uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ é também um conjunto, mas a ênfase está nos elementos de $\mathcal{A}$).

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{A}$, dizemos que $\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}$ é a reunião de $\mathcal{A}$. Ou seja $x \in \bigcup \mathcal{A}$ se e somente se existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Quando $\mathcal{A}$ é uma família finita enumerada $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, podemos escrever a reunião como $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ ou $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{A}$, dizemos que $\bigcap \mathcal{A} := \{x : \forall A \in \mathcal{A} \text{ temos } x \in A\}$ é a intersecção de $\mathcal{A}$. Ou seja, $x \in \bigcap \mathcal{A}$ se e somente se $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Quando $\mathcal{A}$ é uma família finita enumerada $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, podemos escrever a intersecção como $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}$ ou $\bigcap_{k=0}^{n-1} A_k$.

Definição 1.2. Seja X um conjunto não vazio e τ um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Dizemos que τ é uma topologia sobre X se satisfaz as seguintes condições:

- i) $\emptyset, X \in \tau$.
- ii) se $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \tau$ então $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- iii) se $U, V \in \tau$ então $U \cap V \in \tau$.

Note que para ser uma topologia basta verificarmos que elas satisfazem as três condições acima. Por ser uma noção muito geral, concluir resultados gerais sobre todos os espaços topológicos têm alcance limitado. Os resultados mais interessantes valem para classes de espaços topológicos com propriedades adicionais. Antes, é preciso estudar ferramentas para construir topologias, já que usar a definição não é a melhor forma de verificar propriedades do espaço.

Usando indução finita, temos que a condição iii) é equivalente a

se $U_0, \dots, U_n \in \tau$ então $U_0 \cap \dots \cap U_n \in \tau$. Ou seja, a intersecção finita de abertos é um conjunto aberto.

Exercício 1.3. Note que a topologia usual da reta é uma topologia.

Definição 1.4. Dada uma topologia τ sobre X , dizemos que $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico com a topologia τ (é comum dizer que X é espaço topológico quando não há risco de confusão sobre a topologia τ utilizada).

Dada uma topologia τ , se $U \in \tau$, dizemos que U é τ -aberto ou aberto, se no contexto estiver claro que estamos falando da topologia τ .

Usando dessas notações temos que um conjunto τ é uma topologia se $\emptyset$ e X são abertos, a união arbitrária de abertos é aberta e a intersecção finita de abertos é um aberto.

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio e $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$. A primeira é chamada as vezes de topologia caótica ou antidiscreta. A segunda é chamada de topologia discreta.

Fica a cargo do leitor notar que ambas são topologias.

Exemplo 1.6. Seja Y um conjunto infinito, $x_0 \notin Y$ e $X = Y \cup \{x_0\}$. Seja $\tau_3 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X\}$, $\tau_4 = \mathcal{P}(Y) \cup \{X \setminus F : F \subseteq Y, \text{subconjunto finito}\}$.

Fica a cargo do leitor verificar que τ_3 é uma topologia. Vamos verificar que τ_4 é uma topologia. Temos $\emptyset \in \mathcal{P}(Y)$ e $X = X \setminus \emptyset$, logo $\emptyset$ e X são τ_4 -abertos.

Seja $\mathcal{U}$ uma subfamília de τ_4 não vazio. Vamos mostrar que a união dessa família pertence a τ_4 . Se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ então $\bigcup \mathcal{U} \subseteq Y$ e pertence a $\mathcal{P}(Y) \subseteq \tau_4$. Se $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{P}(Y)$, então existe $F \subseteq Y$ finito tal que $X \setminus F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Assim, $Y \setminus F \subseteq Y \cap \bigcup \mathcal{U}$. Logo, $E := Y \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq F$ é finito. Portanto $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus E$ pertence a τ_4 .

Finalmente considere dois elementos de τ_4 . Se são da forma $X \setminus F_1$ e $X \setminus F_2$ com F_1 e F_2 subconjuntos finitos de Y temos que $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$, onde $F_1 \cup F_2 \subseteq Y$ é finito. Assim, a intersecção de ambas é um elemento de τ_4 . O outro caso é quando pelo menos um deles é subconjunto de Y . Assim, a intersecção também é subconjunto de Y e portanto pertence a τ_4 . Essa topologia é a compactificação por um ponto do conjunto discreto Y . Veremos eventualmente que esta topologia é compacta.

Note que ambas as topologias acima não são nem caóticas e nem discretas.

1.2 Base de abertos.

Para estudar a topologia podemos pensar em usar um conjunto significativo que recupere a topologia, chamada de base de abertos (ou base quando está claro que estamos falando de abertos). Para o estudo da topologia em diversas ocasiões basta usar uma base ou uma base com propriedades especiais.

1.2.1 Definição de Base de Abertos

Definição 1.7. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ (ou que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos quando não há confusão sobre qual a topologia τ ou simplesmente uma base quando está claro que estamos falando de abertos), se $\mathcal{B} \subseteq \tau$ e para todo $x \in X$ e $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Para evitar algumas trivialidades é comum assumir que todos os abertos da base são não-vazios.

Fica a cargo do leitor verificar que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base se e somente se para cada $U \in \tau$ existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}' = U$. *Nota: a união da família vazia é o conjunto vazio.*

Fixado uma topologia, podemos buscar bases para elas que nos tragam alguma informação sobre a topologia. Por exemplo, para fazer a contagem do número de abertos na reta real, usamos o fato que os intervalos de extremidades racionais formam uma base de $\mathbb{R}$.

Porém ao invés de produzir uma topologia e buscar uma base interessante para ela, podemos começar com o conjunto que queremos que seja base para definir a topologia. Isto será chamado de topologia gerada pela base. *Isto por exemplo é feito em $\mathbb{R}^n$, quando dizemos que um conjunto é aberto se e somente se é reunião de bolas abertas. Aqui é importante notar que a desigualdade triangular é usada para chegar a propriedade de base, mas não é necessária para termos uma base. Talvez começar com espaços métricos e as bolas para gerar topologias acabe criando essa expectativa da necessidade de métrica para termos topologias.* A próxima definição é exatamente o que precisamos para gerar topologias a partir de uma base:

Definição 1.8. Dado um conjunto não vazio X , dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base para uma topologia se

- B1) para cada $x \in X$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ (em outras palavras, $\mathcal{B}$ é não vazio e $\bigcup \mathcal{B} = X$).
- B2) para cada $U, V \in \mathcal{B}$ e para cada $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Lema 1.9. Se $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço topológico X então $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades B1) e B2).

Demonstração. Tome $x \in X$. Como X é um aberto, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq X$. Assim, B1) está satisfeita.

Se $U, V \in \mathcal{B}$ e $x \in U \cap V$ então $U \cap V \in \tau$, logo existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. □

Note que uma família de τ -abertos satisfazendo B1) e B2) não precisa ser uma base da topologia τ dada.

Por exemplo, tome $\mathcal{B} = \{[x, +\infty[: x \in \mathbb{R}\}$. Essa família satisfaz B1) e B2) mas não é uma base para a topologia usual da reta.

Com isto, é preciso tomar um pouco de cuidado. O conjunto $\mathcal{B}$ satisfazendo B1) e B2) é base da **topologia gerada pela base $\mathcal{B}$** (a topologia vai ser definida a seguir).

1.2.2 Topologia gerada por Base de Abertos.

Definição 1.10. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia. Diremos que $\tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$. Dizemos que $\tau_{\mathcal{B}}$ é a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$.

O teorema abaixo justifica os nomes dados acima.

Teorema 1.11. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia. Seja $\tau = \tau_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$. Então τ é uma topologia sobre X e $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia τ .

Demonstração. Primeiro iremos verificar que τ é uma topologia. Já vimos anteriormente o argumento de que $\emptyset$ e X são τ -abertos, para isto basta usar a família vazia e toda a base. Tome $\mathcal{U} \subseteq \tau$. Pela definição de τ , existe, para cada $U \in \mathcal{U}$ uma família $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$. Então temos que $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup (\bigcup \{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\})$ e $\bigcup \{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{B}$. Assim, $\bigcup \mathcal{U}$ é τ -aberto.

Falta apenas verificar que a intersecção de dois elementos de τ está em τ . Sejam U e V dois elementos de τ . Se a intersecção de ambas for vazia, então terminamos pois $\emptyset \in \tau$. Vamos supor que $U \cap V$ é não vazio. Pela definição de τ , existem $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ subconjuntos de $\mathcal{B}$ tais que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$ e $V = \bigcup \mathcal{B}_V$. Fixe $x \in U \cap V$. Então existe $U_x \in \mathcal{B}_U$ tal que $x \in U_x$ e $V_x \in \mathcal{B}_V$ tal que $x \in V_x$. Pela B2), como $x \in U_x \cap V_x$ com $U_x, V_x \in \mathcal{B}$, existe $W_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$. Assim, $U \cap V = \bigcup \{W_x : x \in U \cap V\} \in \tau$.

Pela definição de τ , segue que $\mathcal{B}$ é uma base para τ . □

Exemplo 1.12. Os quadrados abertos em $\mathbb{R}^2$ são uma base para a topologia de $\mathbb{R}^2$. Note que a intersecção de dois quadrados nem sempre é um quadrado, mas todo ponto da intersecção está contida num quadrado. Como alguns já podem ter visto, a topologia gerada coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

1.2.3 Topologia gerada por uma métrica usando bolas abertas como Base de Abertos.

Definição 1.13. Dizemos que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica se as seguintes propriedades estão satisfeitas:

- M0) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$
- M1) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$.
- M2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

A bola aberta $B_d(x, \epsilon)$ é o conjunto $\{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Exemplo 1.14. O conjunto das bolas abertas de X gera uma base para uma topologia (fica a cargo do leitor verificar). Dizemos que esta é a topologia gerada pela métrica d .

1.3 Sub-bases e topologia gerada por sub-bases.

Veremos no decorrer do curso que é útil pensarmos em pedaços ‘graúdos’ para gerar uma base.

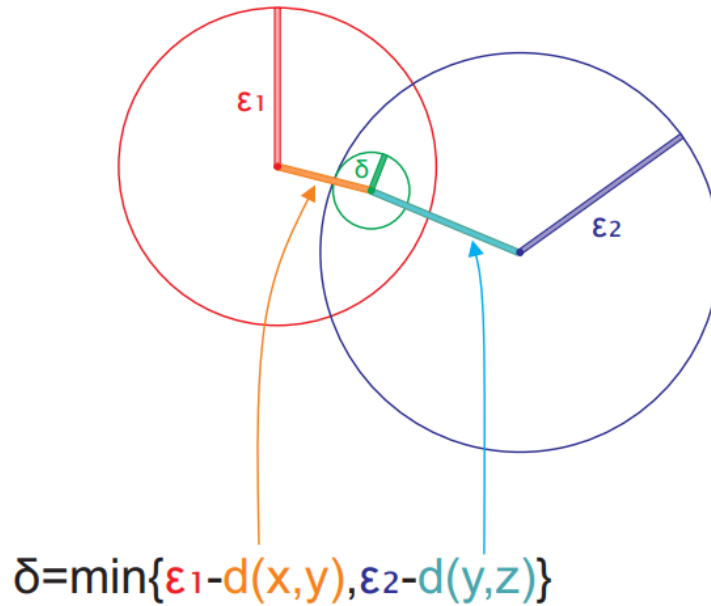


Figura 1.1: Desigualde triangular

1.3.1 Definição de Sub-base de Abertos. Definição de ordens lineares.

Definição 1.15. Uma família de conjuntos abertos $\mathcal{S}$ num espaço topológico X é uma subbase para X se $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$ forma uma base de abertos de X .

Exemplo 1.16. A família de intervalos $\{]x, +\infty[: x \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[: x \in \mathbb{R}\}$ é uma subbase para a topologia usual de $\mathbb{R}$. De fato, basta notar que $]x, y[=]x, +\infty[\cap]-\infty, y[$.

Note que tal sub-base para uma topologia como acima pode ser definida para qualquer espaço linearmente ordenado. Um espaço é linearmente ordenado se ele está munido de uma ordem linear.

Definição 1.17. Dizemos que $<$ é uma ordem linear sobre X se

- a) $x \not< x$ para todo $x \in X$.
- b) Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$, para todo x, y e z em X .
- c) para todo $x, y \in X$ temos que $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

1.3.2 Topologia gerada por uma Sub-base. Topologia da ordem a partir da Sub-base.

Lema 1.18. Seja $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$. Então $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ subconjunto finito não vazio de } \mathcal{S}\}$ é uma base para uma topologia τ . Além disso, $\mathcal{S}$ é uma sub-base para τ .

Demonstração. Primeiro iremos verificar que $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades para ser a base de abertos de uma topologia. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, segue que $\bigcup \mathcal{B} = X$ e B1) está satisfeita.

Se $U, V \in \mathcal{B}$, existem $\mathcal{S}_U$ e $\mathcal{S}_V$ subconjuntos não vazios de $\mathcal{S}$ tal que $U = \bigcap \mathcal{S}_U$ e $V = \bigcap \mathcal{S}_V$. Então $U \cap V = \bigcap (\mathcal{S}_U \cup \mathcal{S}_V)$, logo $\mathcal{B}$ satisfaz B2).

Então $\mathcal{B}$ é base da topologia τ gerada pela base $\mathcal{B}$. Pela definição de $\mathcal{B}$ a partir de $\mathcal{S}$, segue que $\mathcal{S}$ é sub-base de τ . $\square$

Definição 1.19. Dada uma $\mathcal{S}$ nas condições acima, chamamos a topologia τ de topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$.

Exemplo 1.20. A topologia gerada pela sub-base $\{\{y \in X : y < x\} : x \in X\} \cup \{\{y \in X : x < y\} : x \in X\}$ é a topologia da ordem.

Capítulo 2

Vizinhanças. Topologias geradas por bases locais e bases de fechados. Fechos.

2.1 Vizinhanças.

Agora que temos a definição de topologia podemos formalizar a definição de vizinhança.

2.1.1 Vizinhanças.

Definição 2.1. Dizemos que A é uma vizinhança (τ -vizinhança se for necessário explicitar a topologia) de x se existe um aberto V na topologia τ tal que $x \in V \subseteq A$. Se A é um aberto, dizemos que A é uma vizinhança aberta.

Eventualmente iremos usar termos como vizinhança compacta, vizinhança conexa, vizinhança conexa por caminhos que muitas vezes não são vizinhanças abertas. *Em alguns textos, vizinhança significa vizinhança aberta, então verifique a definição utilizada.*

As vizinhanças estão relacionadas ao estudo das propriedades locais do espaço topológico. Para utilizar as vizinhanças não precisamos usar todas elas. Basta tomar um conjunto significativo. Veremos exemplos disso quando formos estudar algumas propriedades locais.

Definição 2.2. Dado $x \in X$, onde X é um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x se todos os elementos de $\mathcal{V}_x$ são vizinhanças de x e para cada vizinhança U de x , existe uma vizinhança $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq U$.

Na definição acima não estamos considerando que as vizinhanças são abertas. Quando quisermos que sejam abertas iremos dizer que temos um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Em alguns textos o sistema fundamental de vizinhanças já consiste de vizinhanças abertas, assim é necessário verificar qual a definição utilizada no texto.*

2.1.2 Sistemas fundamentais de vizinhanças. Bases locais.

Definição 2.3. Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x também será chamado de base local de x .

Exemplo 2.4. No caso do $\mathbb{R}^n$, temos que as bolas abertas de raio $\frac{1}{n}$ com n inteiro positivo formam uma base local para o ponto. *Este fato é usado para descrever algumas propriedades usando convergência de sequências, como os pontos no fecho de um conjunto e da continuidade de uma função.*

Podemos pensar que $\mathcal{V}_x$ descreve a topologia do ponto x . Para ter um noção da topologia precisamos considerar um sistema fundamental de vizinhanças para cada ponto de X .

Definição 2.5. Dizemos que $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de X se $\mathcal{V}_x$ é um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

Um sistema fundamental de vizinhanças abertas de X também será chamado de sistema de bases locais de X .

Exercício 2.6. Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base de X então $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ é uma base local para x .

Mostre que se $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema de bases locais de X então $\bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ é uma base de X .

2.2 Topologias geradas por bases locais.

2.2.1 Topologia gerada por bases locais.

Da mesma forma do que base, iremos escrever as propriedades que uma família deve possuir para se tornar um sistema fundamental de vizinhanças abertas. *Existem textos que discutem definir a topologia a partir de um sistema fundamental de vizinhanças arbitrário, mas isso não pareceu muito prático para chegar à topologia.* Note que para usarmos um candidato a sistema de vizinhanças que gere uma topologia, deve existir uma relação entre as vizinhanças de pontos distintos.

Definição 2.7. Dizemos que $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas (ou bases locais) para uma topologia se

BL1) $\emptyset \neq \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $x \in U$, para todo $x \in X$ e para todo $U \in \mathcal{V}_x$.

BL2) se $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{V}_x$ então existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

BL3) se $x \in X$, $U \in \mathcal{V}_x$ e $y \in U$ então existe $W \in \mathcal{V}_y$ tal que $W \subseteq U$.

Note que a condição 3 acima para o sistema fundamental de bolas abertas centradas no ponto em $\mathbb{R}^n$ estão satisfeitas usando a desigualdade triangular.

Se tomarmos um subconjunto de uma topologia com as propriedades BL1) – BL3), não é suficientes para ser um sistema fundamental de vizinhanças abertas dessa topologia. Mas ela é um sistema fundamental de vizinhanças abertas da topologia que ela gera.

Teorema 2.8. Dado um sistema fundamental de vizinhanças abertas $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ para uma topologia, temos que $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ é uma base para uma topologia de X e $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para $\tau_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Para verificar BL1), segue da definição de $\mathcal{B}$ e de BL1) que $x \in \bigcup \mathcal{V}_x \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Para verificar BL2), tome dois elementos $U, V \in \mathcal{B}$. Tome $z \in U \cap V$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $x \in X$ tal que $U \in \mathcal{V}_x$. Pela BL3), existe $W \in \mathcal{V}_z$ tal que $W \subseteq U$. De modo análogo, existe $O \in \mathcal{V}_z$ tal que $O \subseteq V$. Como $W, O \in \mathcal{V}_z$, segue de BL2) que existe $T \in \mathcal{V}_z$ tal que $T \subseteq W \cap O \subseteq U \cap V$. Assim, T testemunha BL2) para z, U e V . Logo $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia $\tau_{\mathcal{B}}$.

Fixe $x \in X$. Vamos verificar que $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para x . Como $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, segue que os elementos de $\mathcal{V}_x$ são $\tau_{\mathcal{B}}$ -abertos. Então resta mostrar que é um sistema fundamental de vizinhanças de x . Tome $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ é base de $\tau_{\mathcal{B}}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $y \in X$ tal que $V \in \mathcal{V}_y$. Como $x \in V$, segue de BL3) que existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq V \subseteq U$. Assim, temos que $W \subseteq U$ com $W \in \mathcal{V}_x$. Logo $\mathcal{V}_x$ é um sistema de vizinhanças de x . $\square$

Dada uma família satisfazendo BL1) e BL2), podemos definir uma topologia usando a sub-base $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$. Sem BL3), não podemos afirmar que $\mathcal{V}_x$ é uma base local em x da topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$.

Exemplo 2.9. A topologia de qualquer espaço métrico pode ser definida pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$, onde $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ são as bolas abertas centradas em x . A princípio, poderíamos ter uma outra topologia se usássemos $\mathcal{V}_x = \{B(x, \epsilon) : \epsilon = \frac{1}{2^n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$, mas a topologia será a mesma.

Iremos futuramente verificar condições para que sistemas fundamentais de vizinhanças sobre o mesmo conjunto gerem a mesma topologia.

2.2.2 A reta de Sorgenfrey. O plano de Niemytski.

Exemplo 2.10. A reta de Sorgenfrey. (ver Figura 2.1) Seja X o conjunto dos números reais. Considere a topologia τ gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas $\mathcal{V}_x = \{[x, x + \epsilon[: \epsilon > 0\}$, para cada $x \in X$.

Demonstração. Temos que verificar que as condições para ser sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia estão satisfeitas.

Claramente, $\mathcal{V}_x$ é não vazio e $x \in [x, x + \epsilon[$ para todo $\epsilon > 0$, logo $BL1)$ está satisfeita.

Dois elementos de $\mathcal{V}_x$ são da forma $[x, x + \epsilon[$ e $[x, x + \delta[$ para ϵ e δ reais positivos. Assim, a intersecção de ambas é $[x, x + \min\{\epsilon, \delta\}[\in \mathcal{V}_x$ e $BL2)$ está satisfeita.

Fixe $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Tome $y \in [x, x + \epsilon[$. Como $y < x + \epsilon$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $y + \delta < x + \epsilon$. Assim, $[y, y + \delta[\in \mathcal{V}_y$ e $[y, y + \delta[\subseteq [x, x + \epsilon[$. Assim, $BL3)$ está satisfeita. $\square$

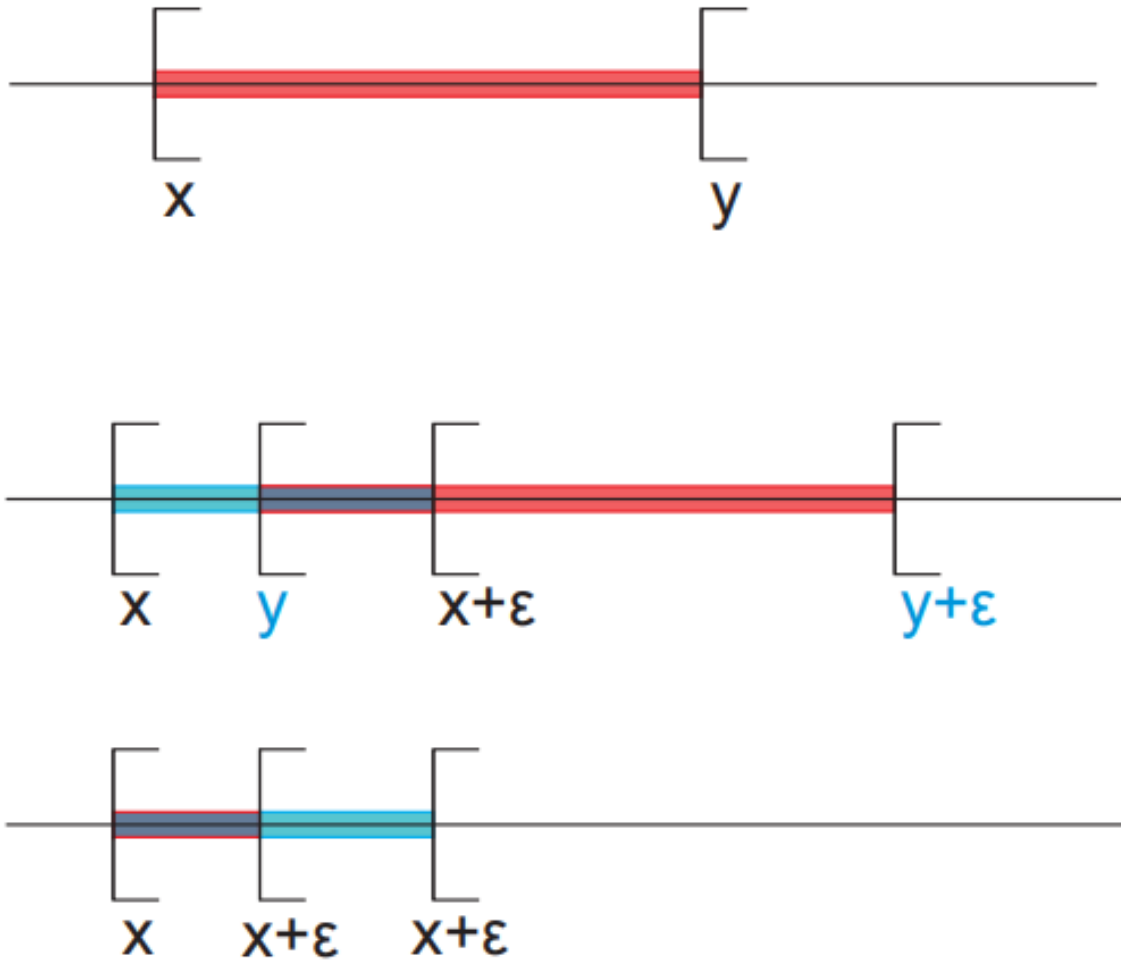


Figura 2.1: A reta de Sorgenfrey.

Vamos ver outro exemplo de topologia gerada por sistema fundamental de vizinhanças.

Exemplo 2.11. O plano de Niemytski. (ver figura 2.2) Seja X o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Vamos denotar por $B((x, y), \epsilon)$ as bolas abertas na topologia Euclidiana.

Para $a = (x, y)$ com $y > 0$ seja $\mathcal{V}_a = \{B((x, y), \epsilon) : 0 < \epsilon < y\}$ e para $a = (x, 0)$ seja $\mathcal{V}_a = \{B((x, \epsilon), \epsilon) \cup \{(x, 0)\} : \epsilon > 0\}$.

Claramente $BL1)$ está satisfeita.

Se (x, y) com $y > 0$ então as vizinhanças são bolas centradas no mesmo ponto e por isso satisfazem *BL2*). Para $(x, 0)$ as bolas $B((x, \epsilon), \epsilon)$ é tangente ao eixo das abscissas no ponto $(x, 0)$. Vamos verificar que se $\delta < \epsilon$ então $B((x, \delta), \delta) \subseteq B((x, \epsilon), \epsilon)$. Se $(r, s) \in B((x, \delta), \delta)$ então $d((r, s), (x, \epsilon)) \leq d((r, s), (x, \delta)) + d((x, \delta), (x, \epsilon)) < \delta + (\epsilon - \delta) = \epsilon$. Assim *BL2*) também está satisfeitas para estes pontos. Assim, *BL2*) está satisfeita.

Seja $a = (x, y)$ com $y > 0$. a vizinhança em $\mathcal{V}_a$ é uma bola U centrada em a com a segunda coordenada positiva. Todo ponto $b \in U$ nesta bola possui também uma bola aberta centrada em b contida em U (pois estamos trabalhando neste caso com bolas na topologia Euclidiana de $\mathbb{R}^2$). Assim *BL3*) está satisfeita neste caso. Seja $a = (x, 0)$. Se $b = a$ então a própria vizinhança satisfaz a condição *BL3*) para este ponto. Se $b \neq a$ então b está numa bola aberta Euclidiana V com todos os pontos acima da abscissa, e a segunda coordenada de b é positiva. Assim, as vizinhanças de b são bolas Euclidianas e existe uma delas dentro de V . Assim *BL3*) também está satisfeita.

Temos uma topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças abertas.

Sim, estas topologias tem nome por que elas servem a um propósito maior do que serem exemplos de topologias geradas por um sistema fundamental de vizinhanças. Elas irão aparecer mais pra frente como contra-exemplos.

2.3 ‘Mas se é fechado, como pode ser aberto?’.

Uma noção intuitiva de que um ponto está próximo de um conjunto, mesmo sem a noção de distância, é dada pelo fecho de um conjunto. Para isto iremos primeiro definir conjuntos fechados.

2.3.1 Fechados e fechos.

Definição 2.12. Dada uma topologia τ sobre um conjunto X , dizemos que F é um conjunto fechado (τ -fechado se a topologia não estiver clara) se $X \setminus F \in \tau$.

A definição acima diz que um conjunto é fechado se e somente se o seu complementar é aberto.

A primeira coisa que podemos notar é que $\emptyset$ e X são conjuntos fechados. *Assim, a noção de aberto e fechado difere da ideia de porta ou janela aberta/fechada. Ou seja, como em muitos outros casos, o uso da palavra cotidiana não serve para intuir seu uso na matemática.*

Em inglês, um conjunto aberto e fechado é chamado de clopen. Esse termo geralmente aparece quando existe uma quantidade significativa deles (quando existe uma base de clopens, que são os espaços zero-dimensionais) ou quando há apenas os inevitáveis $\emptyset$ e X (quando o espaço é chamado de conexo).

O termo 0-dimensional se refere a dimensão 0. Existem alguns tipos de dimensão definidos para espaços topológicos e em cada um delas se espera que o $\mathbb{R}^n$ tenha dimensão n .

Exemplo 2.13. Num espaço caótico ou no espaço discreto, todos os abertos são clopens. Na reta real, não há clopens não triviais, ou seja, $\mathbb{R}$ é conexo (isto será visto eventualmente neste curso).

Definição 2.14. Dado um subconjunto A de um espaço topológico X com uma topologia τ , o fecho de A é o menor fechado que contém A . Denotaremos o fecho de A por $\overline{A}$ ou $cl(A)$ (ou $\overline{A}^\tau$, $\overline{A}^X$, $cl_\tau(A)$ ou $cl_X(A)$ quando for necessário especificar melhor).

Para que esta definição faça sentido é necessário provar que existe o menor fechado. Isto é feito usando a relação de inclusão.

Vamos primeiro lembrar a relação de De Morgan: $X \setminus (\bigcup \mathcal{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$ e $X \setminus (\bigcap \mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$. A prova do Lema abaixo segue da definição de topologia e o uso do complementar.

Lema 2.15. O conjunto $\mathcal{F}$ de todos os fechados do espaço X com a topologia τ satisfaz:

F1) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{F}$.

F2) Se $\emptyset \neq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ então $\bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}$.

F3) Se $F, G \in \mathcal{F}$ então $F \cup G \in \mathcal{F}$.

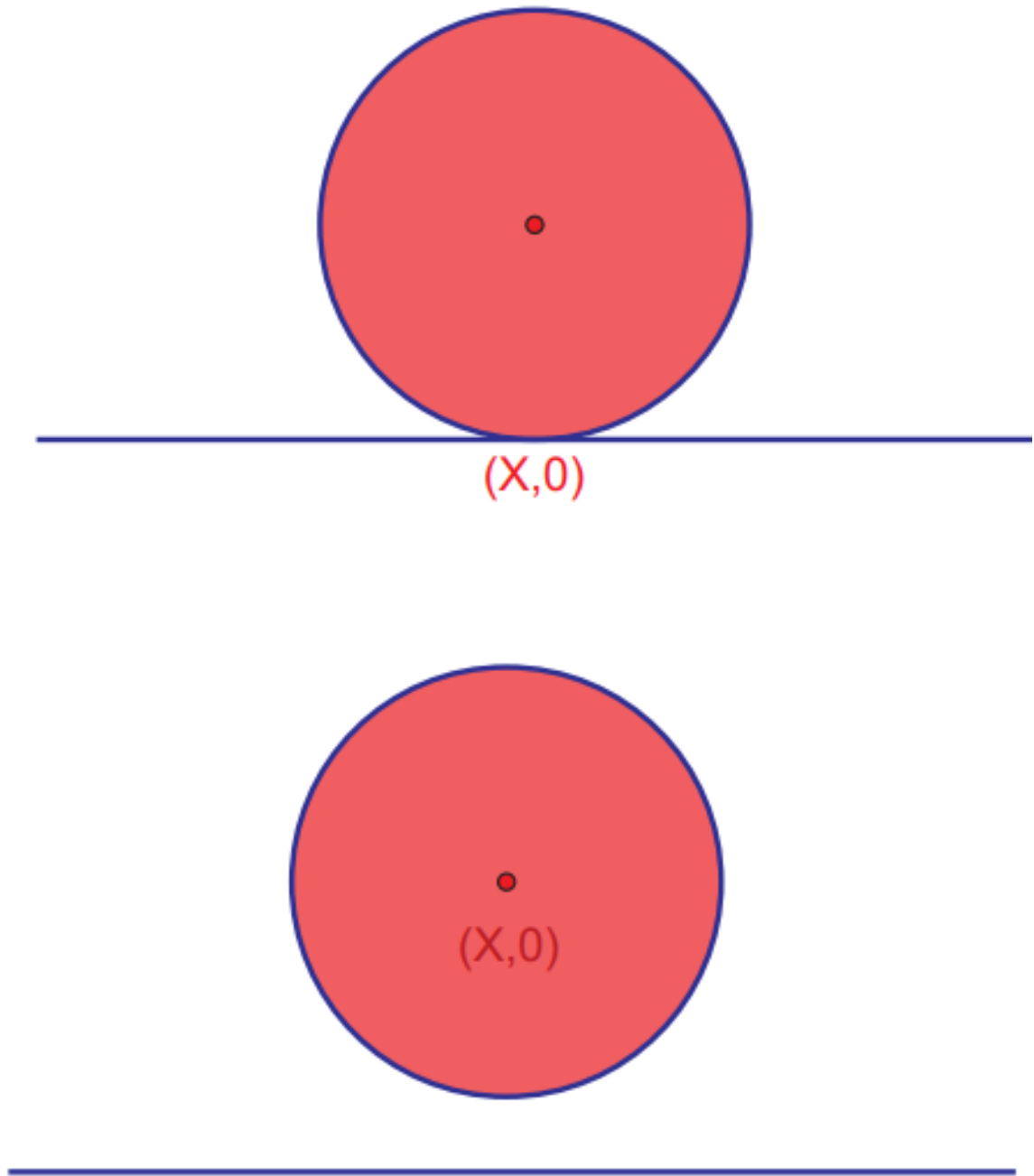


Figura 2.2: O plano de Niemytzky.

2.4 ‘Não sei se está próximo, mas ainda não encostou’.

2.4.1 Quando um ponto está no fecho.

Proposição 2.16. Dado um espaço topológico X , o fecho de um subconjunto de X está bem definido.

Demonstração. Seja A um subconjunto de X . Se A for vazio, então A é fechado e é o menor fechado que contém A .

Se A é não vazio, tome $\mathcal{A} = \{F : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$. Como X é fechado, segue que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Assim, $B = \bigcap \mathcal{A}$ é um fechado que contém A . Para ver que B é o menor fechado, se F é um fechado contendo A então $F \in \mathcal{A}$, logo $B = \bigcap \mathcal{A} \subseteq F$. $\square$

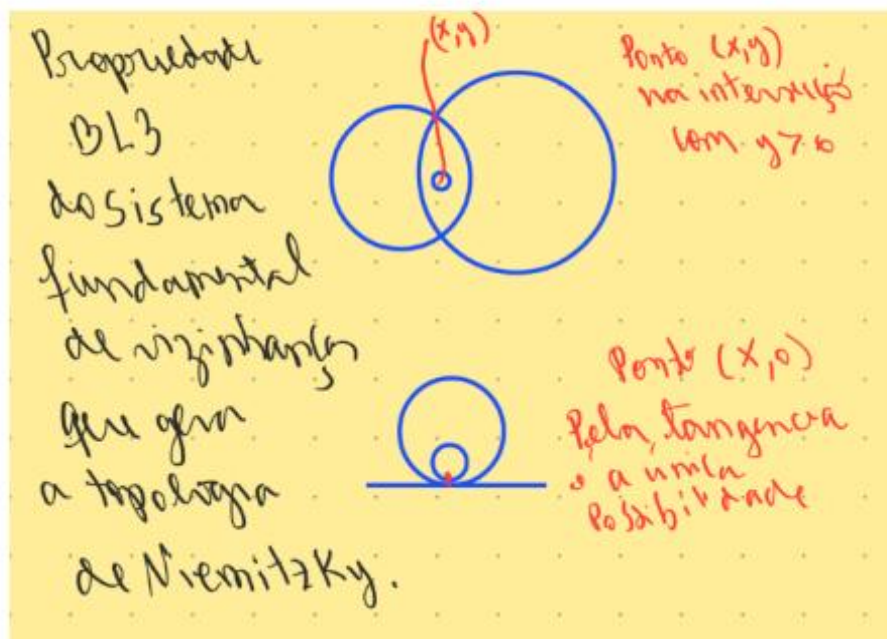


Figura 2.3: O plano de Niemytzky - a propriedade BL3.

Verificar se um ponto x pertence ao fecho de um conjunto é uma propriedade local.

Lema 2.17. Dado um ponto $x \in X$, $A \subseteq X$ e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x , são equivalentes.

- a) $x \in \overline{A}$.
- b) para toda vizinhança aberta U de x temos $U \cap A \neq \emptyset$.
- c) $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{V}_x$.

Demonstração. Basta mostrarmos que a) $\rightarrow$ b), b) $\rightarrow$ c) e c) $\rightarrow$ a). Suponhamos que b) não esteja satisfeita. Então existe uma vizinhança aberta de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Então $F = X \setminus U$ é um fechado que contém A . Logo, pela definição do fecho de A , segue que $\overline{A} \subseteq F$. Portanto, $\overline{A} \cap U = \emptyset$. Como $x \in U$, segue então que $x \notin \overline{A}$.

Suponha que b) vale. Dada uma vizinhança $U \in \mathcal{V}_x$, temos que existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. Como V é vizinhança aberta de x , segue da hipótese que $A \cap V \neq \emptyset$. Como $A \cap V \subseteq A \cap U$, temos que $A \cap U$ é não vazio e vale a condição c).

Suponhamos que a) não está satisfeita. Então $x \in X \setminus \overline{A}$. Como $X \setminus \overline{A}$ é um aberto, segue que existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq X \setminus \overline{A}$. Assim, $V \cap \overline{A} = \emptyset$. Como $A \subseteq \overline{A}$, segue que $V \cap A = \emptyset$. Assim c) não está satisfeita e c) $\rightarrow$ a) segue da contrapositiva. $\square$

Podemos ‘fixar’ os que serão os fechados ou o operador fecho para definir uma topologia como foi feita para bases ou um sistema fundamental de vizinhanças abertas. Deixaremos a cargo do leitor notar que se começarmos com uma família que satisfaz F1) – F3) então os complementares irão gerar uma topologia e essa família será a família dos fechados dessa topologia. O caso do fecho será deixado para quando definirmos o operador interior.

2.5 Topologias definidas por bases de fechados.

Pode se definir uma base de fechados para obter todos os fechados.

2.5.1 Definição de Base de Fechados.

Definição 2.18. Seja $\mathcal{C}$ uma família de fechados num espaço topológico X . Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma base de fechados se para todo $F \subseteq X$ fechado de X , existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $F = \bigcap \mathcal{C}'$. (Para que isto bata com a ideia da união vazia, iremos assumir que a intersecção da família vazia é X).

O próximo lema relaciona uma base de fechados a uma base de abertos.

Lema 2.19. $\mathcal{C}$ é base de fechados se e somente se $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ é uma base de abertos.

Demonstração. ($\rightarrow$) Seja U um aberto da topologia. Podemos supor que U não é vazia, pois neste caso tomamos a família vazia que é um subconjunto de $\mathcal{B}$. Então $X \setminus U$ é fechado distinto de X e existe $\mathcal{C}'$ não vazio tal que $X \setminus U = \bigcap \mathcal{C}'$. Por De Morgan, temos que $U = \bigcup \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$.

($\leftarrow$) Seja F um fechado de X . Se $F = X$ segue da intersecção da família vazia. Suponhamos que $F \neq X$. Então $X \setminus F$ é um aberto não vazio. Portanto, como $\mathcal{B}$ é uma base de abertos, segue que existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $X \setminus F = \bigcup \mathcal{B}'$. Pela definição de $\mathcal{B}$, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B}' = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}'\}$. Logo por De Morgan, temos que $F = \bigcap \{X \setminus (X \setminus C) : C \in \mathcal{C}'\} = \bigcap \mathcal{C}'$. $\square$

Definição 2.20. Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para uma topologia se

- BF1) para todo $x \in X$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$.
- BF2) se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e $x \notin C_1 \cup C_2$ então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C_1 \cup C_2 \subseteq C$ e $x \notin C$.

2.5.2 Topologia gerada por Base de Fechados.

Lema 2.21. Se $\mathcal{C}$ é uma família que satisfaz BF1) e BF2) então existe uma topologia em que $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para esta topologia.

Demonstração. Considere a família $\mathcal{B} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$. Fica a cargo do leitor notar que $\mathcal{B}$ satisfaz B1) e B2). Considere a topologia τ gerada pela base de abertos $\mathcal{B}$. Então $\mathcal{B}$ é uma base de abertos para τ e temos então que $\mathcal{C}$ será uma base de fechados para τ . $\square$

Exemplo 2.22. Seja X um conjunto não enumerável e seja $\mathcal{C}$ a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou não) de X . Então $\mathcal{C}$ é base de fechados para uma topologia. Esta topologia é chamada de co-enumerável.

Demonstração. Para cada $x \in X$ temos que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $x \notin \emptyset$. Assim $BF1)$ está satisfeita. Para verificar $BF2)$, basta notar que a união de dois elementos de $\mathcal{C}$ é um elemento de $\mathcal{C}$ (união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável). $\square$

2.5.3 Coming next...

Iremos definir pontos de acumulação de um conjunto e comentar um pouco sobre convergência de sequências. Mostrando que esta noção é insuficiente para espaços topológicos arbitrários. Iremos definir continuidade local e continuidade, usando as noções topológicas vista até agora para verificar a continuidade de uma função. Iremos definir homeomorfismos. Basicamente, espaços homeomorfos são iguais do ponto de vista da topologia de seus espaços. Finalmente iremos comentar sobre propriedades topológicas que são a propriedades a serem estudadas em topologia.

Capítulo 3

Sequências. Densos. Axiomas de enumerabilidade.

3.1 Ponto de Acumulação de Conjuntos e Sequências.

Para $\mathbb{R}^n$ e para espaços métricos em geral, as sequências aparecem frequentemente. Vamos dar aqui a definição que usa vizinhanças que equivale à definição usando ϵ 's devido ao sistema fundamental usando bolas abertas.

3.1.1 Ponto de acumulação de conjunto. Ponto de acumulação de sequência.

Definição 3.1. Um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de um subconjunto $A \neq \emptyset$ de um espaço topológico X se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ (ou seja, toda vizinhança de x contém um ponto de A distinto de x .)

Proposição 3.2. Se x é um ponto de acumulação de B e $B \subseteq A$ então x é ponto de acumulação de A .

Uma sequência em X é uma função do conjunto dos naturais em X , mas comumente escrevemos $(x_n : n \in \mathbb{N})$. A imagem da sequência será denotada por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fazendo uma analogia com pisadas, a imagem seriam as pegadas e a sequência seria marcar cada passo dado com um número... tipo quando o Snoopy ensina o Charlie Brown dançar.

Definição 3.3. Dizemos que x é um ponto de acumulação da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se para toda vizinhança U de x e todo $N \in \mathbb{N}$, existe $m \geq N$ tal que $x_m \in U$.

Neste caso, dizemos que a sequência se acumula em x .

Note que se x é um ponto de X e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é a sequência constante x , então x é um ponto de acumulação da sequência, mas x não é ponto de acumulação da imagem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

Fazendo analogia da pisada na neve, um ponto x é de acumulação da sequência se toda vez que você fixa uma vizinhança U de x e está nevando constantemente, de tempos em tempos vai ter uma pegada nova em cima de U .

Lema 3.4. Seja x um ponto de X , $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência em X e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x . Temos que x é ponto de acumulação da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se e somente se para todo $U \in \mathcal{V}_x$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ é infinito (note que ser subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ equivale a ser um conjunto ilimitado em $\mathbb{N}$).

Definição 3.5. Dizemos que x é um limite da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se para toda vizinhança U de x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ para todo $m \geq N$.

Neste caso dizemos que a sequência converge para x .

Continuando com a analogia da pisada enquanto está nevando, uma sequência converge se para cada vizinhança U de x , a partir de algum momento, todas as pegadas visíveis vão estar dentro de U . Ou seja, a partir de algum momento, a sequência só anda em cima de U .

Como abaixo de qualquer natural existe apenas um número finito de naturais, a definição anterior é equivalente a

Lema 3.6. Seja x um ponto de X , $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência em X e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x . Temos que x é um limite da sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ se e somente se para todo $U \in \mathcal{V}_x$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ é cofinito (ou seja seu complementar em relação a $\mathbb{N}$ é finito).

3.1.2 ‘Seguindo os passos da sequência’: subseqüências.

Podemos imaginar que na sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$, cada x_n é onde o n -ésimo pisão em X foi dado. Às vezes, a sequência está indo para alguma direção em particular (quando têm limite) ou não. Pensando que uma sequência é pular de um ponto a outro de X , a subseqüência seria seguir a ordem dos pulos da sequência, mas dando pulos maiores no meio do caminho e não pisar em todos os lugares por onde a sequência pisou.

Voltando ao exemplo das pegadas numeradas. Se removermos alguns passos no meio do caminho teríamos um subconjunto de números e poderíamos continuar pisando seguindo a ordem ou reenumerar os passos que sobraram.

Denotaremos uma subseqüência de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ como a restrição da função conjunto A e a denotaremos por $(x_n : n \in A)$ (que seria usarmos as pegadas numerados que sobraram). Podemos eventualmente usar a enumeração crescente de $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ e escrever a subseqüência como $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ (que seria reetiquetar as pegadas numeradas).

Definição 3.7. Dada uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dizemos que $(y_k : k \in \mathbb{N})$ é uma subseqüência se existe uma função estritamente crescente $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $x_{\phi(k)} = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Podemos escrever a subseqüência como $(x_{n_k} : k \in \mathbb{N})$, onde $n_k = \phi(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ ou $(x_n : n \in A)$ onde $A = \phi[\mathbb{N}]$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Para passar de A para n_k , basta considerar $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ com $n_k = \phi(k)$ crescente. Para passar de n_k ou ϕ para A basta tomar $\text{Im } \phi = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = n_k\}$.

Proposição 3.8. Se $(x_n : n \in A)$ acumula em x então $(x_n : n \in \mathbb{N})$ acumula em x .

Se x é limite de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ então x é limite de $(x_n : n \in A)$.

Teorema 3.9. Seja $x \in X$ e seja A um subconjunto de X . Então

A) Se $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que converge para x então $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência que acumula em x .

B) Se $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que acumula em x então x é um ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nem sempre ser ponto de acumulação de uma sequência implica que o ponto será limite de alguma subseqüência.

A propriedade abaixo vale em particular para $\mathbb{R}^n$ e espaços métricos em geral.

3.1.3 Convergência de seqüências em pontos com base local enumerável.

Teorema 3.10. Seja $x \in X$ um ponto para o qual existe um sistema fundamental de vizinhanças $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ (alguns autores dizem em inglês que X é ‘first countable’ em x). Seja A um subconjunto de X . Então são equivalentes:

- a) x é ponto de acumulação de A .
- b) existe $B \subseteq A$ enumerável tal que x é ponto de acumulação de B .
- c) existe uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que se acumula em x .
- d) existe uma sequência em $A \setminus \{x\}$ que converge para x .

Demonstração. Para qualquer espaço topológico, temos que d) implica c), c) implica b) e b) implica a). Assim, restaria mostrar que a) implica d). Por motivos didáticos vamos mostrar que a) implica b), a) implica c) e a) implica d).

a) $\rightarrow$ b). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $V_n \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Fixe $x_n \in V_n \cap (A \setminus \{x\})$. Então $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se acumula em x (note que $x \notin B$). De fato, U é uma vizinhança de x então existe k tal que $V_k \subseteq U$. Assim, $x_k \in V_k \cap (B \setminus \{x\}) \subseteq U \cap (B \setminus \{x\})$. Assim, $U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Agora, para mostrar que a) implica c) ou d) a sequência pode falhar (fica a cargo do leitor pensar num exemplo).

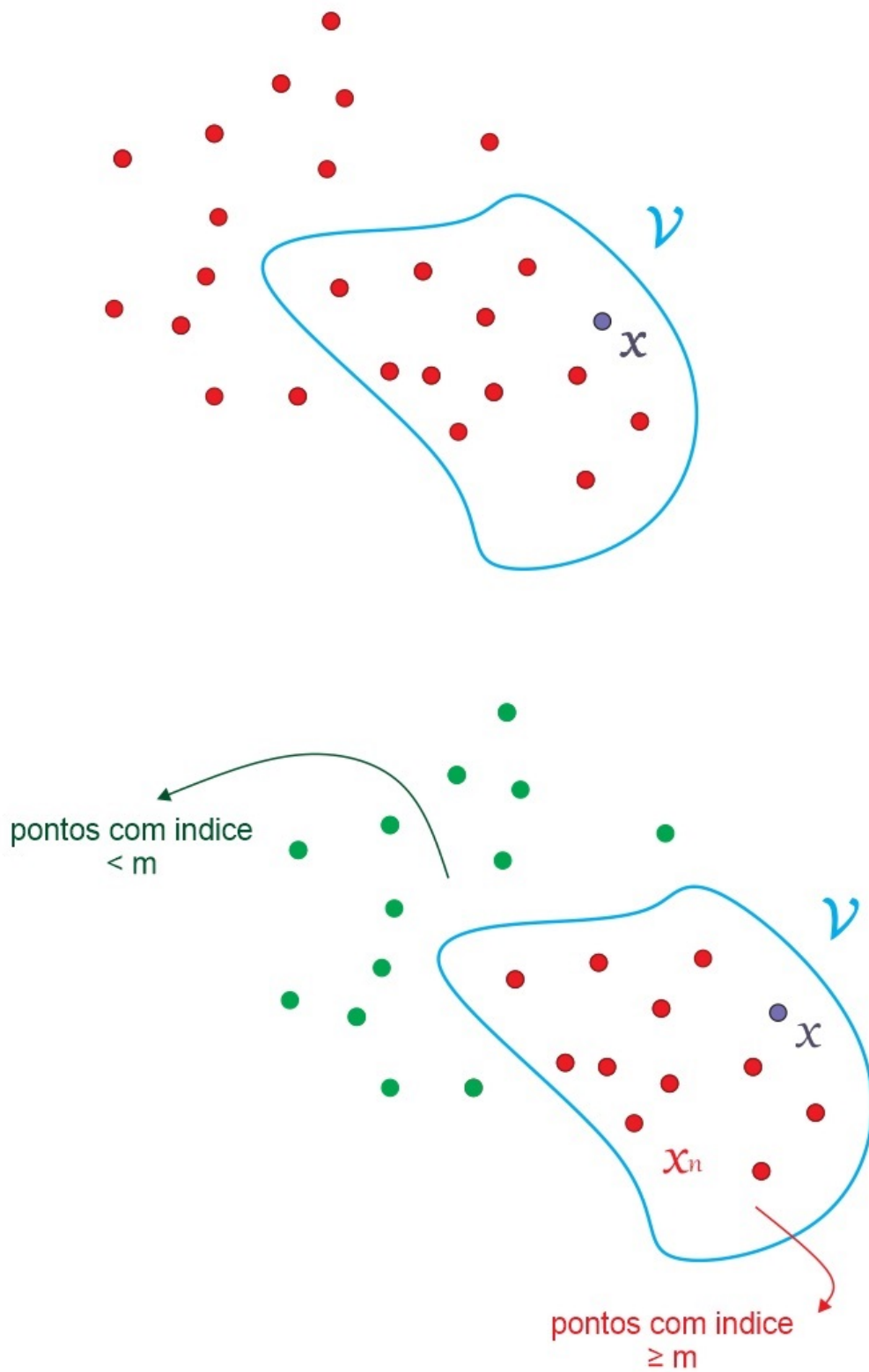


Figura 3.1: Pontos de acumulação e limites de sequências.

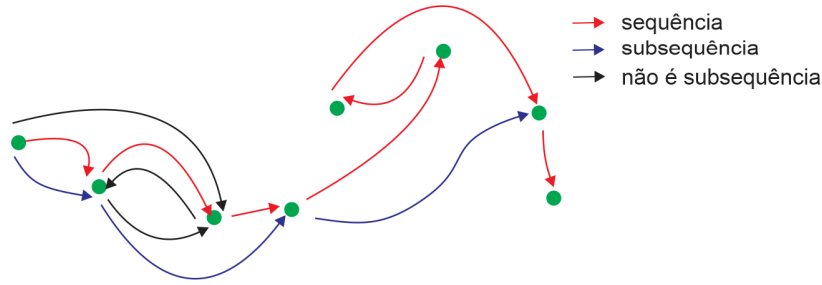


Figura 3.2: Sequências convergentes em pontos com base local enumerável.

Primeiramente, a interseção finita de vizinhanças é uma vizinhança. Assim, vamos tomar $W_n = \bigcap \{V_m : m \leq n\}$. Temos que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência $\subseteq$ -decrescente de vizinhanças de x . Além disso, $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças, pelo fato de $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ser um sistema fundamental de vizinhanças.

a) $\rightarrow$ c). Tome uma sequência $(x_k : k \in \mathbb{N})$ tal que $x_k \in W_k \cap A$. Fixado U vizinhança de x , existe m tal que $W_m \subseteq U$. Seja N um natural arbitrário e tome $k \geq \max\{N, m\}$. Então $x_k \in W_k \subseteq W_m \subseteq U$. Logo a sequência acumula em x .

a) $\rightarrow$ d). Usando a mesma sequência, no argumento acima, temos que $x_k \in U$ para todo $n \geq m$. Logo $\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin U\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$ ($\{n \in \mathbb{N} : n < m\} = m$, se usarmos a notação de ordinais) e portanto a sequência converge. $\square$

Exercício 3.11. Mostre que se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade em $x \in X$ então toda sequência que acumula em x possui uma subsequência que converge para x . (Para espaços arbitrários isto não é verdade).

3.1.4 Quando sequências não conseguem descrever a topologia.

Abaixo temos um exemplo em que sequências não são sempre suficientes para recuperar a topologia.

Exemplo 3.12. Seja X o conjunto dos reais com a topologia co-enumerável. Seja A o conjunto dos reais positivos. Todo fechado distinto de X é enumerável. Assim, o menor fechado que contém A é o X . Tome $(x_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de A . Como $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, é um conjunto fechado. Segue que $X \setminus B$ é vizinhança de qualquer real não positivo y . Usando este aberto, concluímos que a sequência não acumula em y . Portanto nenhuma sequência em A converge para y .

Com isto, para trabalhar com convergência que descreva a topologia, é necessário definir um conceito mais geral do que sequências. Isto será feito de duas maneiras que são ‘duais’: filtros e redes.

3.2 ‘I see points of D everywhere. All the time’ - densos.

3.2.1 Definição de denso.

Definição 3.13. Dizemos que um ponto é isolado se $\{x\}$ é um conjunto aberto.

Dizemos que $D \subseteq X$ é um conjunto denso se $\overline{D} = X$.

Um conjunto denso se ‘aproxima de qualquer ponto de X ’. Fica a cargo do leitor notar que os pontos isolados são elementos de qualquer conjunto denso.

Exemplo 3.14. Tanto $\mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$ na topologia usual.

Vimos anteriormente como fazemos para saber se um ponto pertence ao fecho. Agora veremos algo similar para saber quando D é denso.

Lema 3.15. Seja $\mathcal{B}$ uma base de um espaço topológico X com $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Um conjunto $D \subseteq X$ é denso se e somente se $D \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{B}$.



Figura 3.3: Sequências são insuficientes para descrever esta topologia.

Demonstração. ($\rightarrow$) Se D é denso, então tome $U \in \mathcal{B}$. Fixe $x \in U$. Como $x \in X = \overline{D}$ e U é vizinhança de x , segue que $U \cap D \neq \emptyset$.

($\leftarrow$) Seja $x \in X$ e V uma vizinhança de x . Como $\mathcal{B}$ é uma base, segue que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Por hipótese, $U \cap D \neq \emptyset$. Logo, $V \cap D \neq \emptyset$ para toda vizinhança V de x . Com isto, temos que $x \in \overline{D}$. Como x era um ponto arbitrário de x , temos que $X = \overline{D}$ e D é denso em X . $\square$

Para recuperarmos o fecho de um aberto, basta tomarmos o fecho de algum subconjunto de um denso:

Proposição 3.16. Se D é denso em X e U é aberto em X então $\overline{D \cap U} = \overline{U}$.

Demonstração. Como $U \cap D \subseteq U$, segue que $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$. Seja $x \in \overline{U}$. Então temos que para todo V vizinhança aberta de x vale $U \cap V \neq \emptyset$. Como $U \cap V$ é aberto e D é denso, temos que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$. Assim, $(U \cap D) \cap V \neq \emptyset$ para toda a vizinhança aberta V de x . Logo, $x \in \overline{U \cap D}$. $\square$

3.2.2 Os três axiomas de enumerabilidade.

Definição 3.17. Dizemos que X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se todo ponto de $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ em x onde $\mathcal{V}_x$ é enumerável.

Dizemos que X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se existe uma base de abertos $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é enumerável.

Dizemos que X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se existe um conjunto denso D de X tal que D é enumerável. Nesse caso, também dizemos que X é separável.

Teorema 3.18. Se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X satisfaz o primeiro e o terceiro axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base. Então $\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ é um sistema de vizinhanças de X . Para cada $U \in \mathcal{B}$ (podemos assumir que $\emptyset \notin \mathcal{B}$) fixe $x_U \in U$. Então $D = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ é denso em X .

Se $\mathcal{B}$ é enumerável então $\mathcal{V}_x$ e D descritos acima também são enumeráveis. $\square$

Exemplo 3.19. 1) Seja X um espaço discreto não enumerável. Então X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, mas X não satisfaz nem o segundo nem o terceiro axioma de enumerabilidade.

2) Seja X não enumerável com a topologia co-finita. Então X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, mas não satisfaz o primeiro e o segundo axioma de enumerabilidade.

3) A reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro e o terceiro axioma da enumerabilidade, mas não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Demonstração. 1) O conjunto $\{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças. O único conjunto denso de X é o próprio X , assim X não satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. Como X não satisfaz o terceiro axioma, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

2) Todo conjunto infinito de X intersecta qualquer aberto não vazio. Assim um conjunto infinito enumerável de X é denso. Portanto X satisfaz o terceiro axioma da enumerabilidade.

Fixe $x \in X$. uma família enumerável $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vizinhanças abertas de x , temos que existe F_n finito tal que $V_n = X \setminus F_n$. O conjunto $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ é enumerável. Assim, existe $y \neq x$ tal que $y \in X \setminus F$. Assim, $X \setminus \{y\}$ é uma vizinhança de x . Como $y \in V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $V_n \not\subseteq X \setminus \{y\}$. Assim $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é um sistema de vizinhanças de x . Assim, X não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e consequentemente, também não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

3) Claramente $\{[x, x + \frac{1}{2^n}] : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base local para x na reta de Sorgenfrey, assim o espaço satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Claramente $\mathbb{Q}$ é denso na reta de Sorgenfrey, assim também satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos da reta de Sorgenfrey. Então para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subseteq [x, x + 1[$. Temos que se $x < y$ então $x \notin [y, y + 1[$ e portanto $x \notin V_y$. Como $x \in V_x$, segue que $V_x \neq V_y$. Assim existe uma função injetora de X em $\mathcal{B}$. Como X é não enumerável, segue que $\mathcal{B}$ é não enumerável. Logo X não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. $\square$

3.2.3 Toda base de abertos contém uma base de abertos de tamanho mínimo.

Vamos agora ver que se o espaço não possui uma base finita, então toda base de abertos possui uma base contida nela com tamanho infinito mínimo.

Teorema 3.20. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}$ duas bases de abertos. Então existe um subconjunto de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ indexado por um subconjunto de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ que forma uma base. Em particular, se $\mathcal{B}$ é enumerável então existe uma base enumerável contida em $\mathcal{V}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : (\exists W \in \mathcal{V}) U \subseteq W \subseteq V\}$. Para cada $(U, V) \in \mathcal{D}$, fixe $W_{(U, V)} \in \mathcal{V}$ (aqui é feito uso do Axioma da Escolha). Vamos provar que $\{W_{(U, V)} : (U, V) \in \mathcal{D}\}$ é uma base. De fato, tome O um aberto não vazio e seja $x \in O$. Então existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq O$. Como $\mathcal{V}$ também é base, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $x \in W \subseteq V$. Usando novamente que $\mathcal{B}$ é base temos $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq W$.

Assim, $(U, V) \in \mathcal{D}$ e $x \in U \subseteq W_{(U, V)} \subseteq V \subseteq O$. Em particular, $x \in W_{(U, V)} \subseteq O$. $\square$

Exercício 3.21. Note se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são sistemas fundamentais de vizinhanças de x então existe uma subfamília de $\mathcal{V}_2$ indexada por $\mathcal{V}_1$ que é um sistema fundamental de vizinhanças de x . Em particular, se X tem uma base local enumerável em x então todo sistema de vizinhanças de x contém uma subfamília que é um sistema enumerável de vizinhanças.

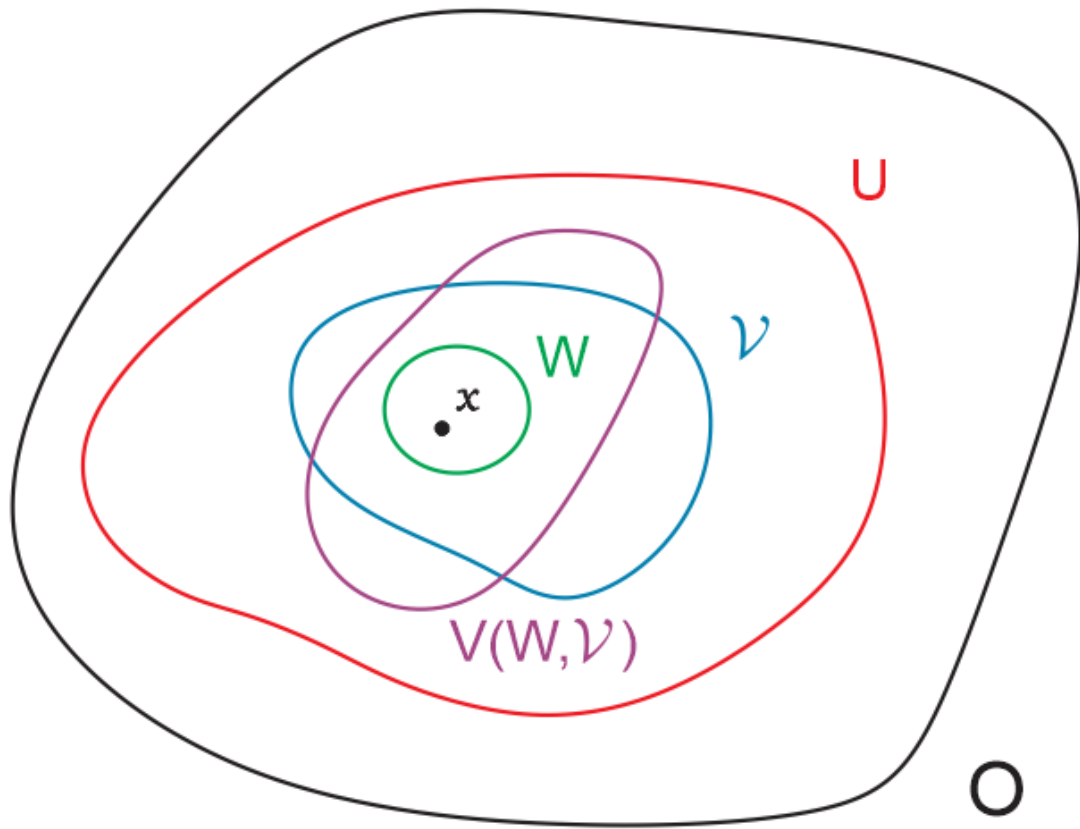


Figura 3.4: Usando pares de elementos de uma base para enumerar bases.

Capítulo 4

Continuidade. Propriedades Topológicas. Homeomorfismos. Topologias mais finas e menos finas.

4.1 Continuidade em um ponto. Continuidade.

4.1.1 Continuidade local. De volta a ϵ e δ . Equivalências à continuidade local.

Funções contínuas relacionam diferentes espaços topológicos. Podemos pensar a continuidade de f como uma propriedade global ou como uma propriedade para cada ponto. No $\mathbb{R}^n$ isto é feito usando ϵ and δ , mas como comentado anteriormente isso se refere ao sistema fundamental de vizinhanças usando bolas abertas centradas nos pontos x e $f(x)$.

Definição 4.1. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é contínua em x se para todo W aberto que contém $f(x)$ então existe V aberto contendo x tal que $f[V] \subseteq W$ (aqui $f[V]$ é a imagem de V pela função f).

A definição usando ϵ e δ é a equivalência c).

Lema 4.2. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Seja $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x e $\mathcal{W}$ um sistema fundamental de vizinhanças de $f(x)$. São equivalentes:

- a) f é contínua em x .
- b) se W é uma vizinhança de $f(x)$ então $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança de x .
- c) se $W \in \mathcal{W}$ então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $f[V] \subseteq W$.
- d) se $W \in \mathcal{W}$ então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq f^{-1}[W]$.
- e) se $x \in \overline{A}$ então $f(x) \in \overline{f[A]}$.

Demonstração. $(a) \rightarrow b)$). Tome W uma vizinhança de $f(x)$, então existe um aberto V tal que $f(x) \in V \subseteq W$. Por hipótese f é contínua em x , assim existe U aberto contendo x tal que $f[U] \subseteq V$. Logo, $x \in U \subseteq f^{-1}[f(U)] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[W]$. Assim, $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança de x .

$(b) \rightarrow c)$). Tome $W \in \mathcal{W}$ então por hipótese temos que $f^{-1}[W]$ é uma vizinhança x . Então existe U aberto em x tal que $x \in U \subseteq f^{-1}[W]$. Como $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subseteq U \subseteq f^{-1}[W]$. Assim $f[V] \subseteq f[f^{-1}[W]] \subseteq W$.

$(c) \leftrightarrow d)$). Temos que $f[V] \subseteq W$ se e somente se $V \subseteq f^{-1}[W]$.

$(c) \rightarrow a)$). Tome W um aberto que contém $f(x)$. Então existe $O \in \mathcal{W}$ tal que $O \subseteq W$. Por hipótese, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $f[U] \subseteq O$. Tome V um aberto contendo x tal que $V \subseteq U$. Então $f[V] \subseteq f[U] \subseteq O \subseteq W$. Logo $x \in V$ e $f[V] \subseteq W$.

$((a) \rightarrow e)$). Vamos assumir a) e seja A tal que $x \in \overline{A}$. Suponhamos que $f(x) \notin \overline{f[A]}$. Então $Y \setminus \overline{f[A]}$ é um aberto contendo $f(x)$. Pela continuidade, temos que existe V um aberto V de x tal que $f[V] \subseteq Y \setminus \overline{f[A]}$. Logo, $V \subseteq f^{-1}[Y \setminus \overline{f[A]}] = X \setminus f^{-1}[\overline{f[A]}] \subseteq X \setminus f^{-1}[f[A]] \subseteq X \setminus A$. Logo, $V \cap A = \emptyset$ e $x \notin \overline{A}$, uma contradição. Assim, $f(x) \in \overline{f[A]}$.

$(e) \rightarrow a)$). Suponhamos que f não é contínua em x . Então existe W aberto de Y contendo $f(x)$ tal que para cada V aberto de X contendo x temos que $f[V] \not\subseteq W$.

Para cada V como acima, fixe um ponto x_V tal que $f(x_V) \notin W$.

Seja $A = \{t \in X : \exists V \text{ aberto contendo } x \text{ tal que } t = x_V\}$. Claramente, $A \cap V \neq \emptyset$ para cada V aberto contendo x . Assim, $x \in \overline{A}$. Por outro lado, $f[A] \cap W = \emptyset$ (logo $f[A] \subseteq Y \setminus W$). Portanto temos que $\overline{f[A]} \cap W = \emptyset$, pois W é aberto em Y . Como $f(x) \in W$, segue que $f(x) \notin \overline{f[A]}$. $\square$

Veremos depois que existem outras equivalências de continuidade em um ponto. Agora iremos passar a falar sobre continuidade global. Aqui aparece um bom motivo para termos introduzido sub-bases.

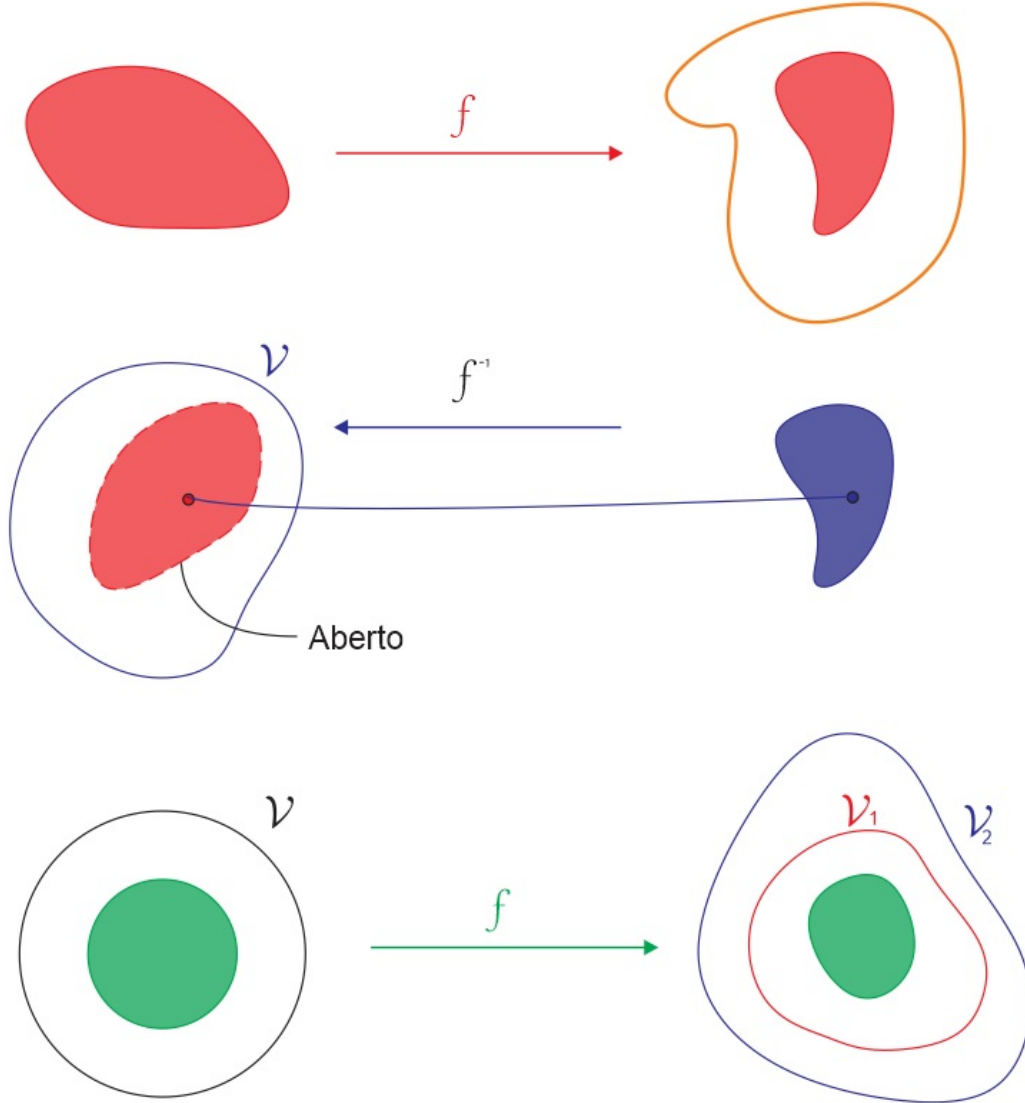


Figura 4.1: Equivalência de continuidade local.

4.1.2 Continuidade. Equivalências à continuidade.

Definição 4.3. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se f é contínua em x para todo $x \in X$.

Lema 4.4. São equivalentes:

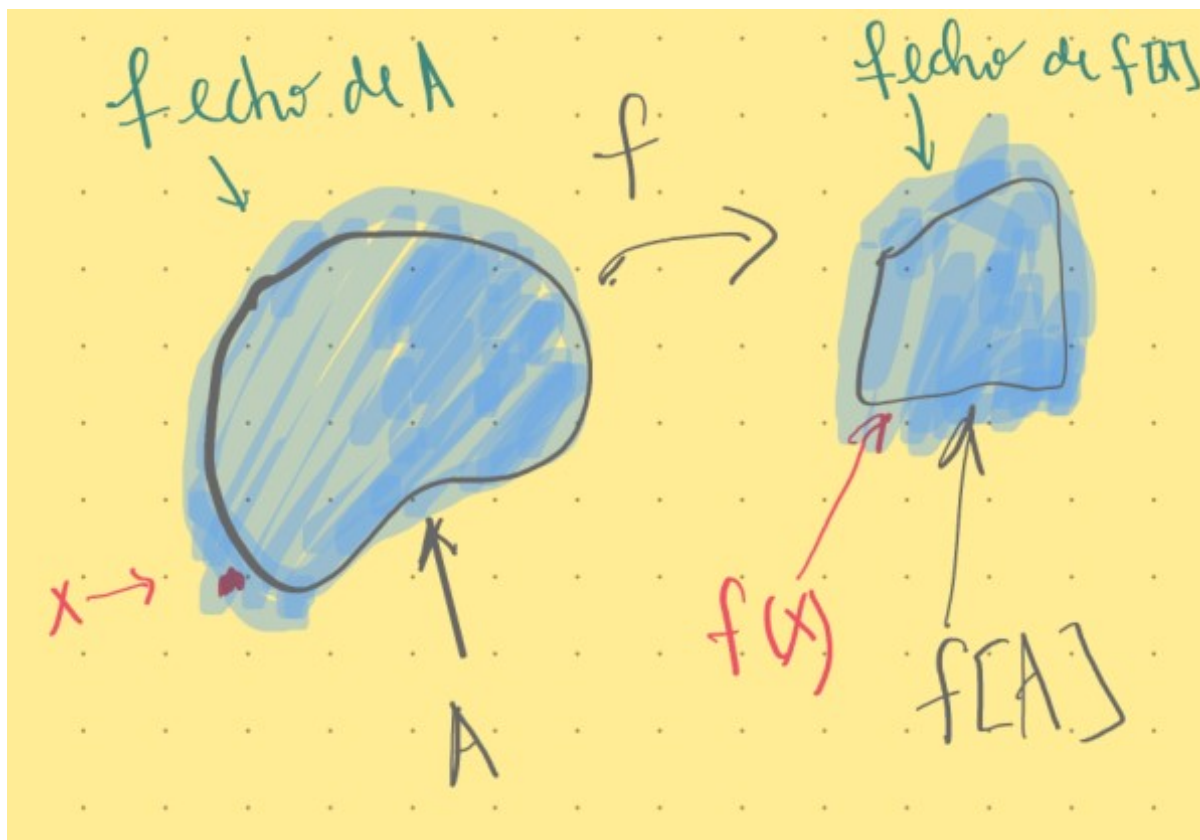


Figura 4.2: Equivalência de continuidade local.

- a) f é contínua.
- b) $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo W aberto de Y .
- c) se $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de Y então $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo $W \in \mathcal{B}$.
- d) $f^{-1}[F]$ é um fechado de X , para todo F fechado em Y .
- e) $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$, para todo subconjunto A de X .
- f) $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$, para todo subconjunto A de X .
- g) se $\mathcal{S}$ é uma sub-base de abertos de Y então $f^{-1}[W]$ é aberto, para todo $W \in \mathcal{S}$.

Demonstração. (a) $\rightarrow$ b)).

Seja W um aberto de Y . Como a imagem inversa do vazio é o vazio que é um aberto, podemos supor que W é não-vazio. Então W é vizinhança de $f(x)$ para todo x tal que $f(x) \in W$. Assim, $f^{-1}[W]$ é vizinhança de x para todo $x \in f^{-1}[W]$. Portanto $f^{-1}[W]$ é um aberto.

(b) $\rightarrow$ c)). Segue do fato que todo elemento de $\mathcal{B}$ é um aberto.

(c) $\rightarrow$ b)). Dado um aberto W de Y existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $W = \bigcup \mathcal{B}'$. Aplicando a imagem inversa, temos que $f^{-1}[W] = \bigcup \{f^{-1}[O] : O \in \mathcal{B}'\}$ que é um aberto, pois por hipótese $f^{-1}[O]$ é aberto (note que $O \in \mathcal{B}$).

(b) $\leftrightarrow$ d)). Segue de $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A]$ e que um conjunto é aberto se e somente se é complementar de um fechado.

(a) $\leftrightarrow$ e)). Temos que para cada A , para cada $x \in X$ $x \in \overline{A}$ implica $f(x) \in \overline{f[A]}$ se e somente se $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Se vale e), fixado x e variando A tal que $x \in \overline{A}$, pela equivalência de continuidade de f em x , temos que f é contínua em x . Variando x , vemos que f é contínua em X .

Fixado A e tomando x tal que $x \in \overline{A}$, como f é contínua em x , segue das equivalências de continuidade em x que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Assim, vale e) para A . Como A é arbitrário, vale e).

(e) $\leftrightarrow$ f)) segue da relação $f[B] \subseteq C$ se e somente se $B \subseteq f^{-1}[C]$.

(b) $\leftrightarrow$ g)) a direção não trivial segue de $f^{-1}[\bigcap \mathcal{C}] = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} f^{-1}[C]$, para qualquer família de subconjuntos $\mathcal{C}$ de Y .

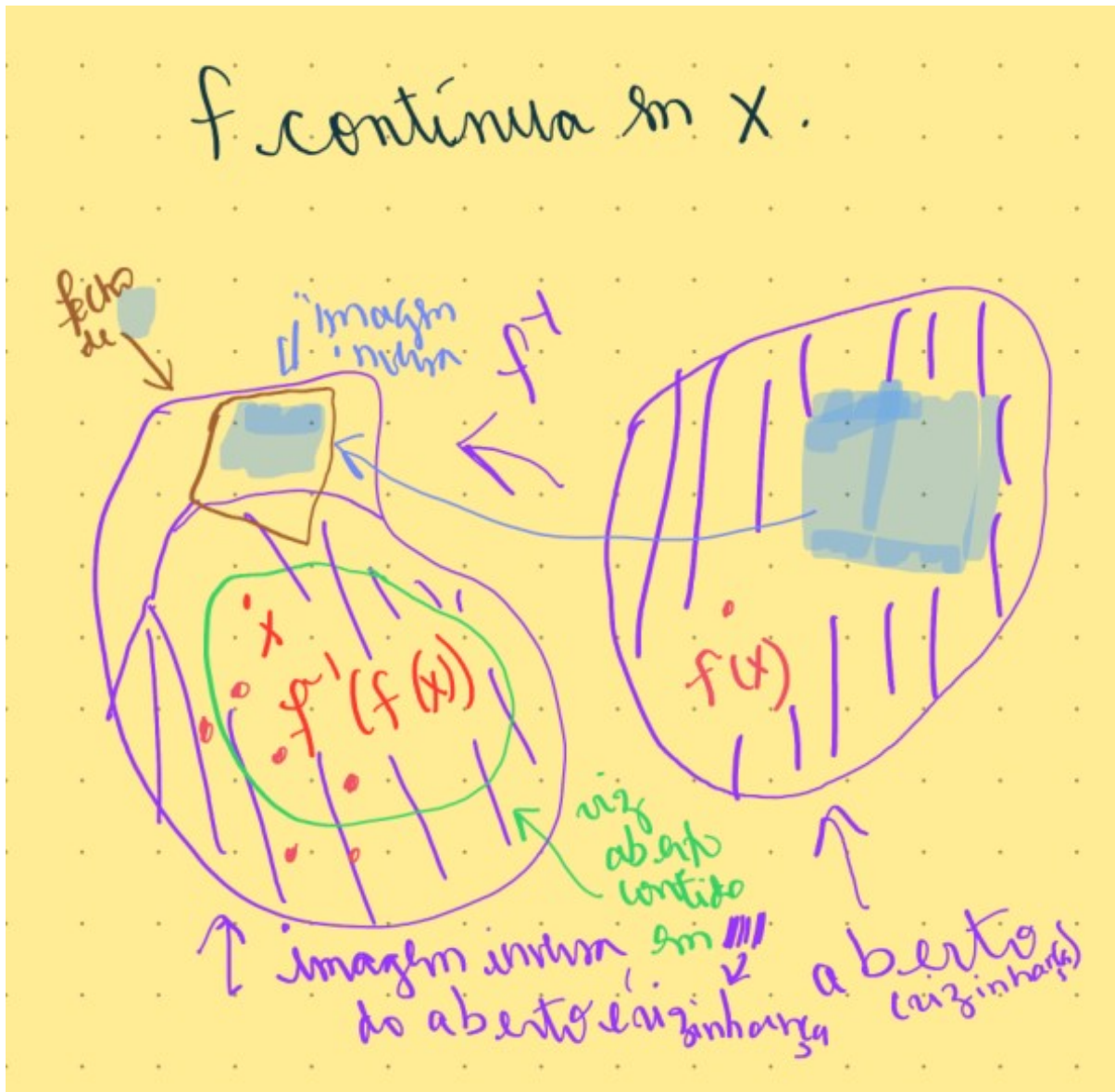


Figura 4.3: Suponha que f é contínua em x e assumo que $f(x) \notin \overline{f[A]}$.

(d) $\rightarrow$ f)) Temos que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$, logo $A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. Por hipótese, $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ é fechado. Portanto, $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. $\square$

4.2 'É a mesma coisa do ponto de vista topológico'.

4.2.1 Homeomorfismos.

Como em outras estruturas matemáticas, estamos interessados nas propriedades do objeto e não no conjunto utilizado em si.

Definição 4.5. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se e somente se f é uma bijeção e f e f^{-1} são funções contínuas. Nesse caso, dizemos que X e Y são homeomorfos.

Note que para espaços vetoriais uma bijeção linear já implica que a função inversa é linear, mas no caso de continuidade, isto não é verdade.

Exemplo 4.6. Seja X o conjunto dos reais com a topologia discreta. Seja id a função identidade. Então $id : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, mas $id : \mathbb{R} \rightarrow X$ não é contínua.

Demonstração. Para ver que a primeira identidade é contínua basta notar que na topologia em X todo subconjunto é aberto. Para ver que a segunda identidade não é contínua em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$, basta notar que $\{x\}$ é aberto em X , mas $\{x\}$ não é aberta em $\mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 4.7. O $\mathbb{R}$ e o intervalo $] -1, 1[$, ambos com a topologia usual da ordem são homeomorfos usando $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Seja $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $x > -1$. Para $x \geq 0$ temos que $f(x) = g(x)$ e $g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$. Assim $g'(x) = f'(x)$ para $x > 0$ e o cálculo à direita da derivada de f no ponto zero concide com o cálculo da derivada de g no ponto 0.

Seja $h(x) = \frac{x}{1-x}$ para $x < 1$. Para $x \leq 0$ temos que $f(x) = h(x)$ e $h'(x) = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Assim $h'(x) = f'(x)$ para $x < 0$ e o cálculo à direita da derivada de f no ponto zero concide com o cálculo da derivada de h no ponto 0.

Assim $f'(x) = h'(x)$ para $x \leq 0$ e $f'(x) = g'(x)$ para $x \geq 0$. Portanto f é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}$, portanto a função é injetora. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Assim, f é uma função bijetora. Pelo teorema da função inversa, a função inversa é contínua em cada ponto, logo f^{-1} é contínua.

4.2.2 Propriedade topológica.

Definição 4.8. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade topológica se dados X e Y homeomorfos então X possui a propriedade $\mathcal{P}$ se e somente se Y possui $\mathcal{P}$.

Assim, do ponto de vista das propriedades topológicas, dois espaços homeomorfos são a mesma coisa.

Exemplo 4.9. Cada um dos três axiomas de enumerabilidade são propriedades topológicas. Ser discreto é uma propriedade topológica. Não ter pontos isolados é uma propriedade topológica.

Ser metrizable (possuir uma métrica tal que a topologia seja gerada pela métrica) é uma propriedade topológica. Basta pegar o homeomorfismo e definir a métrica usando o homeomorfismo $f : X \rightarrow Z$, com $d_Z(f(x), f(y)) := d_X(x, y)$.

Ser um espaço ordenado também é uma propriedade topológica, também passando a ordem linear usando o homeomorfismo.

4.3 ‘Minha topologia tem mais abertos do que a sua’.

4.3.1 Topologias mais fina. Topologia menos fina.

Dadas duas topologias sobre o mesmo conjunto, podemos comparar as topologias por inclusão.

Definição 4.10. Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias sobre um conjunto X não vazio.

Dizemos que τ_1 é mais fina (‘finer’ em inglês) do que τ_2 se $\tau_1 \supseteq \tau_2$. Neste caso, também dizemos que τ_2 é uma topologia menos fina (ou mais grossa - ‘coarser’ em inglês) do que τ_2 .

A topologia discreta no conjunto dos reais é mais fina que a topologia Euclidiana, ou a topologia Euclidiana é menos fina que a topologia discreta.

Podemos considerar também ao invés de duas topologias, uma família T de topologias em X .

Definição 4.11. Seja T uma família não vazia de topologias em X .

Dizemos que uma topologia τ sobre X é mais fina que as topologias em T se τ é mais fina que τ' para toda $\tau' \in T$.

Dizemos uma topologia τ sobre X é menos fina que as topologias em T se τ é menos fina que τ' para toda $\tau' \in T$.

Exemplo 4.12. A topologia discreta em X é a topologia mais fina entre as topologias em X .

A topologia caótica é a topologia menos fina dentre as topologias em X .

Podemos tentar encontrar topologia que ficam ‘mais próximas’ das topologias de uma família:

Definição 4.13. Seja T uma família não vazia de topologias em X .

Dizemos que uma topologia τ sobre X é a topologia mais fina gerada por T se τ é mais fina que T e se τ^* é mais fina do que T então τ^* é mais fina que τ . Ou seja, τ é a topologia menos fina dentre as topologias mais finas do que T .

Dizemos que uma topologia τ sobre X é a topologia menos fina gerada por T se τ é menos fina que T e se τ^* é menos fina do que T então τ^* é menos fina que τ . Ou seja, τ é a topologia mais fina dentre as topologias menos finas do que T .

Vamos verificar que a definição acima está bem definida.

Lema 4.14. Seja T uma família não vazia de topologias em X . Então a topologia gerada pela subbase $\bigcup T$ é a topologia mais fina gerada por T e $\bigcap T$ é a topologia menos fina gerada por T . *Note que, em geral, a união de topologias não é uma topologia.*

Demonstração. No primeiro caso, $\mathcal{S} = \bigcup T$ é sub-base para uma topologia, pois, $\bigcup \mathcal{S} = X$. Considere a topologia τ gerada pela subbase $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ contém cada topologia em T , temos que a topologia τ é mais fina que T . Seja τ^* uma topologia mais fina que T . Então temos que $\tau^* \supseteq \bigcup T = \mathcal{S}$. Como τ^* é uma topologia, temos que $\tau^* \supseteq \tau$.

No segundo caso, vamos mostrar que $\bigcap T$ é uma topologia. Como $\emptyset$ e X estão em todas as topologias em T segue que $\emptyset$ e X pertencem a $\bigcap T$. Se $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \bigcap T$ então $\mathcal{U} \subseteq \tau'$ para todo $\tau' \in T$. Assim, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Com isto, $\bigcup \mathcal{U} \in \bigcap T$. Finalmente, se $U, V \in \bigcap T$ então $U, V \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Então temos que $U \cap V \in \tau'$ para cada $\tau' \in T$. Logo, $U \cap V \in \bigcap T$. Com isto, $\bigcap T$ é uma topologia. Como $\bigcap T$ é um subconjunto de cada topologia em T , segue que $\bigcap T$ é menos fina do que T . Se τ^* é uma topologia menos fina do que T então $\tau^* \subseteq \bigcap T$, logo τ^* é menos fina do que $\bigcap T$. $\square$

Assim, se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua, podemos pensar que a topologia de Y pode ser passada para o conjunto X e teremos uma topologia menos fina do que a topologia em X .

4.3.2 Como comparar topologias usando Bases de Abertos.

Vamos agora usar bases para comparar quando duas topologias são homeomorfas por uma bijeção.

Lema 4.15. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja $\mathcal{B}_X$ uma base de abertos de X e $\mathcal{B}_Y$ uma base de abertos de Y . Então f é um homeomorfismo se e somente se

- 1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_Y$ tal que $f(x) \in V \subseteq f[U]$ e
- 2) para cada $y \in Y$ e $O \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in O$, existe $W \in \mathcal{B}_X$ tal que $f^{-1}(y) \in W \subseteq f^{-1}[O]$.

Demonstração. Note que, como f é bijetora, a condição 1) equivale a f^{-1} contínua e a condição 2) equivale a f contínua. $\square$

Quando f é a identidade, teremos:

Corolário 4.16. Seja $\mathcal{B}_1$ uma base de abertos para uma topologia τ_1 em X e $\mathcal{B}_2$ uma base de abertos para uma topologia τ_2 de X . Então $\tau_1 = \tau_2$ se e somente se

- 1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in V \subseteq U$ e
- 2) para cada $y \in X$ e $O \in \mathcal{B}_2$ tal que $y \in O$, existe $W \in \mathcal{B}_1$ tal que $y \in W \subseteq O$.

Fica a cargo do leitor um resultado similar para sistemas fundamentais de vizinhanças

Lema 4.17. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre dois espaços topológicos. Seja $\mathcal{V}_X$ um sistema fundamental de vizinhanças de X e $\mathcal{V}_Y$ um sistema fundamental de vizinhanças de Y . Então f é um homeomorfismo se e somente se

- 1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_{X,x}$, existe $V \in \mathcal{V}_{Y,f(x)}$ tal que $V \subseteq f[U]$ e
- 2) para cada $y \in Y$ e $O \in \mathcal{V}_{Y,y}$ existe $W \in \mathcal{V}_{X,f^{-1}(y)}$ tal que $W \subseteq f^{-1}[O]$.

Quando f é a identidade, teremos:

Corolário 4.18. Seja $\mathcal{V}_1$ um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia τ_1 em X e $\mathcal{V}_2$ um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia τ_2 de X . Então $\tau_1 = \tau_2$ se e somente se

- 1) para cada $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_{1,x}$, existe $V \in \mathcal{V}_{2,x}$ tal que $V \subseteq U$ e
- 2) para cada $y \in X$ e $O \in \mathcal{V}_{2,y}$ existe $W \in \mathcal{V}_{1,y}$ tal que $W \subseteq O$.

Exercício 4.19. Seja X um espaço métrico e para cada $x \in X$ fixe $\mathcal{V}_x$ uma sequência de bolas abertas centradas em x tal que seus raios convergem a 0. Então a topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças é a topologia gerada pela métrica.

Exemplo 4.20. As topologias geradas em $\mathbb{R}^2$ pelas distâncias de $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ dadas por $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ e $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ são as mesmas. As bolas da primeira são redondas, a da segunda são quadradas e da terceira são losangos centradas em um ponto x e cada uma dessas bolas contém bolas menores centradas em x dos três tipos (fica a cargo do leitor encontrar tais bolas encaixadas uma nas outras). Assim as topologias geradas pelas três são as mesmas.

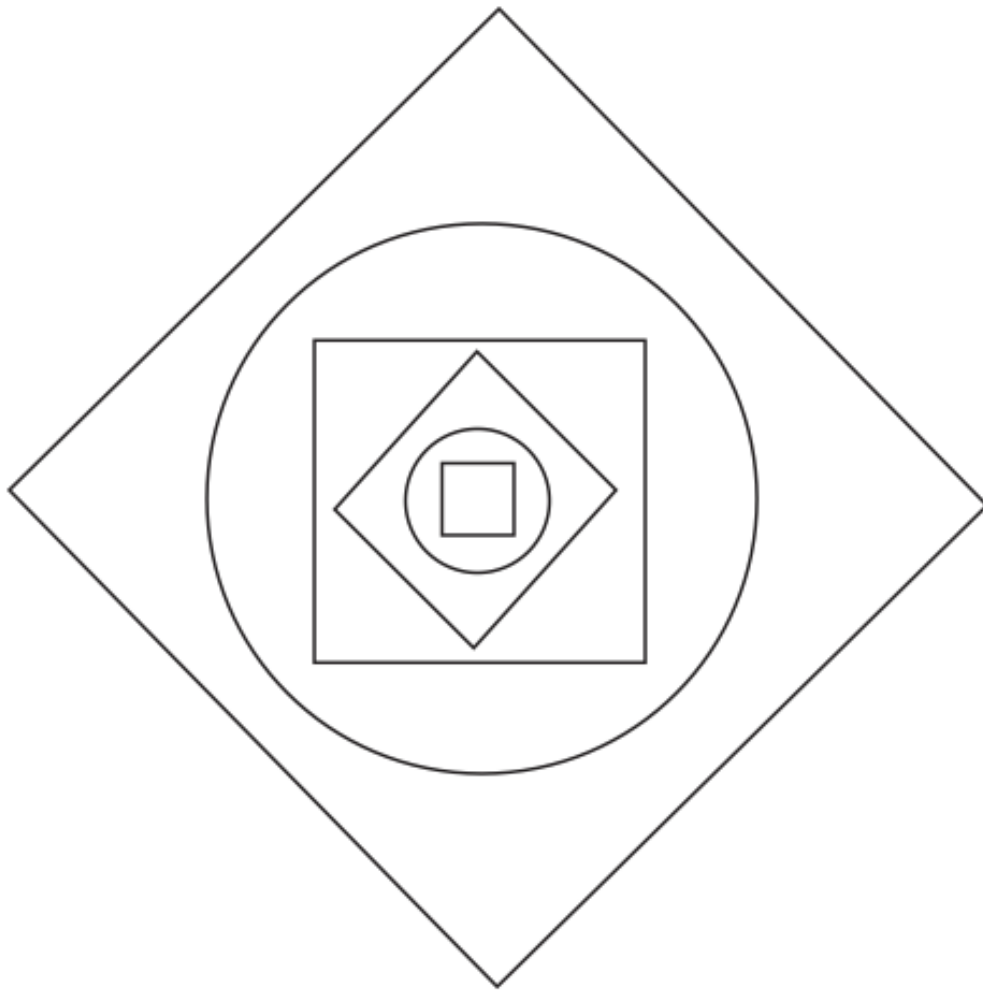


Figura 4.4: As bolas em três métricas que geram a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 5

Topologia inicial. Convergência enumerável. Separação de pontos.

5.1 Imitando quem está na sua frente.

5.1.1 Topologia gerada por funções contínuas. Topologia inicial.

Dada $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, podemos considerar a topologia menos fina sobre X para a qual f seja contínua. Podemos começar com a topologia discreta em X , pois nela f é sempre contínua e tomar a topologia menos fina que torne f contínua.

Esta topologia pode ser a mesma que a topologia de X ou pode ser menos fina. Note que se f é uma bijeção então f será um homeomorfismo. Assim, a ideia é colocar uma topologia em X que se assemelhe mais à topologia de Y via o uso de f .

Podemos fazer o mesmo para uma família de funções.

Definição 5.1. Seja $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de funções $f : X \rightarrow Y_f$, onde τ_f é a topologia de Y_f . A topologia gerada por $\mathcal{F}$ é a topologia menos fina que torna todas as funções em $\mathcal{F}$ contínuas.

Dada uma família $\mathcal{F}$ de funções como acima, dizemos que temos a topologia inicial de $\mathcal{F}$ (ou seja, colocamos topologias no contradomínio para gerar uma topologia no domínio).

Veremos a seguir a topologia acima está bem definida.

Teorema 5.2. A topologia gerada por $\mathcal{F}$ é a topologia gerada pela sub-base $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$. Se $\mathcal{S}_f$ é uma sub-base de τ_f então $\mathcal{S} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{S}_f\}$ é uma sub-base que gera a topologia gerada por $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja τ a topologia gerada pela sub-base $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\}$. Fixada $g \in \mathcal{F}$ temos que $g^{-1}[U] \in \tau$ para cada $U \in \tau_g$. Assim, g é contínua. Reciprocamente, seja τ^* um topologia que torna f contínua para cada $f \in \mathcal{F}$. Então para cada $U \in \tau_f$ temos que $f^{-1}[U] \in \tau^*$. Assim, $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{f^{-1}[U] : U \in \tau_f\} \subseteq \tau^*$. Portanto, $\tau \subseteq \tau^*$. Portanto τ é a topologia menos fina que torna todas as funções de $\mathcal{F}$ contínuas. (Note que isso não significa que apenas as funções em $\mathcal{F}$ são contínuas).

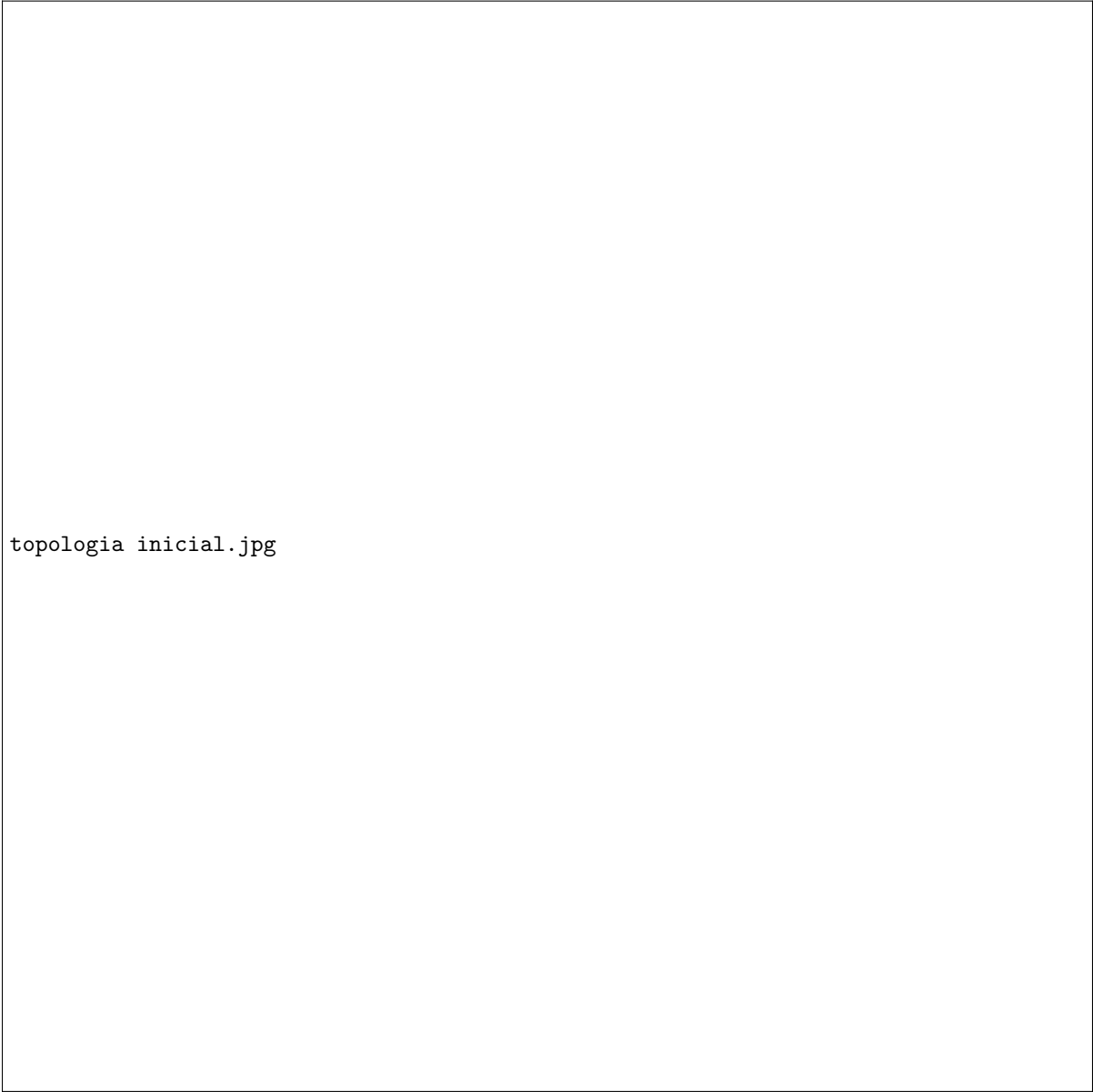
Vamos mostrar agora que $\mathcal{S}$ é uma sub-base. Seja τ' a topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ está contida na sub-base utilizada para gerar τ , segue que $\tau' \subseteq \tau$. Para cada $g \in \mathcal{F}$, temos que $g^{-1}[U] \in \mathcal{S} \subseteq \tau'$ para cada $U \in \tau_g$. Como $\mathcal{S}_g$ é uma sub-base de τ_g , segue que g é contínua em τ' . Logo $\tau \subseteq \tau'$. Assim temos que $\tau = \tau'$. $\square$

A topologia inicial gerada por funções facilita identificar a continuidade de uma função $g : Z \rightarrow X$.

Teorema 5.3. Seja $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de funções $f : X \rightarrow Y_f$, onde τ_f é a topologia de Y_f . E seja X munida com a topologia inicial de $\mathcal{F}$.

Então $g : Z \rightarrow X$ é contínua se e somente se $f \circ g : Z \rightarrow Y_f$ é contínua para cada $f \in \mathcal{F}$.

Demonstração. ($\rightarrow$). Dado um aberto U em Y_f , temos que $(f \circ g)^{-1}[U] = g^{-1}[f^{-1}[U]]$. Como f é contínua segue que $f^{-1}[U]$ é aberto em X . Como g é contínua, segue que $g^{-1}[f^{-1}[U]]$ é aberto em Z .



topologia inicial.jpg

Figura 5.1: Abertos na topologia inicial.

($\leftarrow$). Seja $z \in Z$ e W um aberto de X contendo $g(z)$. Pela definição da topologia em X , existe $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ e U_i aberto em Y_{f_i} para $1 \leq i \leq n$ tal que $g(z) \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq W$. Logo, $f_i \circ g(z) \in U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Como $f_i \circ g$ é contínua, existe $V_i \subseteq Z$ aberto contendo z tal que $f_i \circ g[V_i] \subseteq U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Então $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ é um aberto contendo z e $V \subseteq V_i \subseteq (f_i \circ g)^{-1}[U_i] = g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]]$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto $V \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} g^{-1}[f_i^{-1}[U_i]] = g^{-1}[\bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i]] \subseteq g^{-1}[W]$. Portanto g é contínua em z . Como z é arbitrário, segue que g é contínua em Z . $\square$

Veremos exemplos disto daqui a algumas aulas. Em Análise Funcional, dado um espaço normado, a topologia inicial dos funcionais lineares contínuos é a topologia fraca.

5.2 Onde a convergência enumerável ainda dá conta do recado. Ou não.

5.2.1 Espaços de Fréchet. Espaços sequenciais.

Uma forma de generalizar a ideia da topologia para espaços mais gerais foi trabalhar com as sequências convergentes.

Definição 5.4. Dizemos que X é um espaço de Fréchet se para todo $A \subseteq X$ e todo $x \in \overline{A}$, existe uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A tal que a sequência converge para x .

Nos espaços de Fréchet, todos os pontos do fecho de A podem ser atingido a partir de uma sequência de A .

Uma segunda noção mais fraca é a noção de sequencial.

Definição 5.5. Um espaço X é sequencial se para todo conjunto A tal que A não é fechado, existe $x \in \overline{A} \setminus A$ e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A tal que a sequência converge para x .

Note que no caso de sequencial, existe algum x e alguma sequência convergente a x que testemunha que um conjunto não é fechado. No caso de um espaço Fréchet, todo ponto todo x no fecho de A que não está em A possui uma sequência testemunhando isto.

5.2.2 Continuidade de funções em espaços sequenciais.

Teorema 5.6. Seja $f : X \rightarrow Y$, onde X é um espaço sequencial. Então

f é contínua em X se e somente se para todo $x \in X$ e para toda sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

Demonstração. A ida vale para qualquer espaço topológico X , a sequencialidade é usada apenas na volta.

($\rightarrow$). Tome $x \in X$ e $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x . Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Como f é contínua, segue que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x . Pela convergência de $(x_n : n \in \mathbb{N})$ para x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para todo $n \geq N$. Assim, $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq N$. Portanto $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

($\leftarrow$). Vamos supor por contradição que f não é contínua. Então por uma das equivalências de continuidade, existe um fechado F de Y tal que $f^{-1}(F)$ não é fechado em X . Como X é sequencial, existe $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em $f^{-1}(F)$ que converge para um ponto $x \notin f^{-1}(F)$. Por hipótese, temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência de F que converge para $f(x)$. Como F é um fechado, segue que $f(x) \in F$. Assim, $x \in f^{-1}(F)$, uma contradição. $\square$

5.2.3 Continuidade local em espaços de Fréchet.

A propriedade de Fréchet pode ser usada para continuidade local:

Teorema 5.7. Seja $f : X \rightarrow Y$, onde X é um espaço de Fréchet. Seja $x \in X$. Então

f é contínua em x se e somente se para todo para toda sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X convergente para x temos que $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ converge para $f(x)$.

Demonstração. ($\rightarrow$). A prova vale para qualquer espaço topológico X e foi feita na ida do caso sequencial.

($\leftarrow$). Seja $A \subseteq X$ tal que $x \in \overline{A}$. Por uma das equivalências de continuidade local, basta mostrar que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Como X é Fréchet, segue que existe uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em A convergente para x . Por hipótese, $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ em $f[A]$ converge para $f(x)$. Assim, $f(x) \in \overline{f[A]}$. Como A é arbitrário, segue que f é contínua em x . $\square$

Como discutido anteriormente, sequências convergentes são insuficientes para convergência de espaços topológicos. Assim, a ideia é trocar $\mathbb{N}$ por um conjunto de índices mais geral. Aqui vamos apenas citar um exemplo usando o sistema fundamental de vizinhanças de um ponto como um conjunto de índices. O conjunto de índices deve ter alguma ordem. E nesta ordem, todos os índices devem ‘ir’ para uma mesma ‘direção e sentido’ (por exemplo, se indexarmos por $\mathbb{Z}$ teríamos dois sentidos distintos e isso não daria um bom conjunto de índices para convergência.)

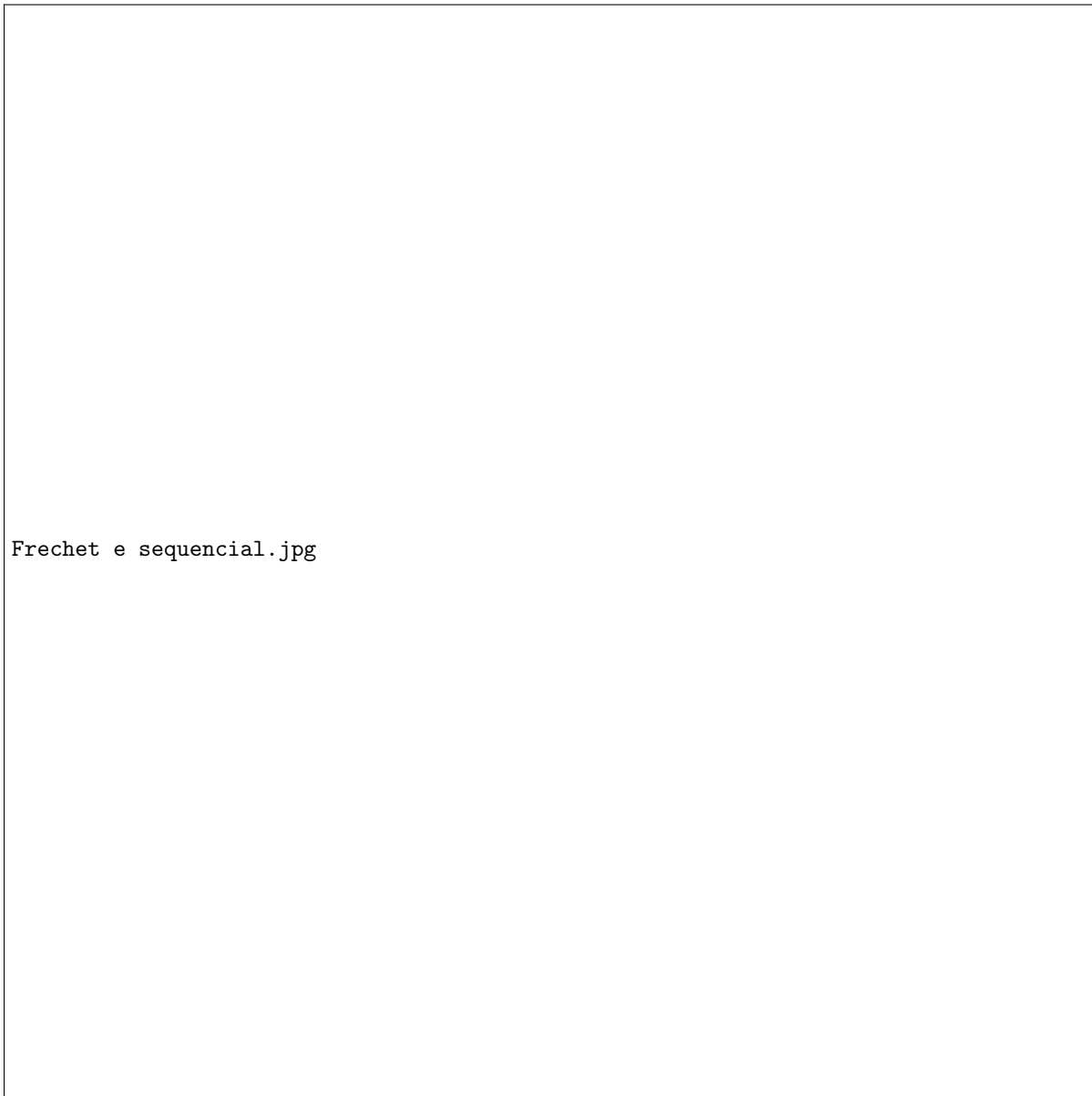


Figura 5.2: Espaços de Fréchet e espaços sequenciais.

5.2.4 Um exemplo de convergência mais geral: rede.

Exemplo 5.8. Seja x um ponto de acumulação de um conjunto A e seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x . Vamos considerar em $\mathcal{V}_x$ a order parcial do $\subseteq$. Por ser um sistema fundamental de vizinhanças, note que dado dois elementos quaisquer de $\mathcal{V}_x$ existe um outro elemento que está abaixo de ambos (a direção e sentido seria ‘encolher cada vez mais em torno do ponto x ’)

Para cada $W \in \mathcal{V}_x$, tome $x_W \in W$. Vamos dizer que $(x_W : W \in \mathcal{V}_x)$ converge se para cada U vizinhança de x , existe $W^* \in \mathcal{V}_x$ tal que $W \subseteq W^*$ então $x_W \in U$. Note que com essa indexação temos convergência: para cada U vizinhança de x , existe W^* tal que $W^* \subseteq U$. Então se $W \subseteq W^*$ com $W \in \mathcal{V}_x$, temos $x_W \in W \subseteq W^* \subseteq U$.

Note a similaridade desse tipo de escolha com o de seqüências quando temos um sistema enumerável de vizinhanças.

5.2.5 Coming next...

Como vimos anteriormente, existem espaços topológicos em que as sequências convergentes podem ter mais de um ponto de acumulação, algo que não ocorre em $\mathbb{R}^n$. Para que possamos tratar de espaços mais interessantes de forma geral, iremos introduzir os axioma de separação que exigem a existência de mais abertos. Porém ao colocar mais abertos, colocamos mais fechados e a relação entre pontos e fechados pode ser ‘estragada’ assim é necessário ter axiomas entre pontos e fechados. Os axioma de separação mais fortes garantem a relação entre pontos e fechados e de fechados com existência de um número maior de funções contínuas. Os axiomas de separação são propriedades topológicas. Iremos ir adotando os axiomas aos poucos com alguma motivação de uso ao invés de listar todos de uma vez. Na próxima aula iremos introduzir os axiomas que separam pontos.

Vimos anteriormente que sequências convergentes podem ter mais de um limite. Vamos agora começar a adicionar condições sobre a topologia para que os limites de sequências convergentes sejam únicos. Vimos também que sequências são insuficientes para recuperar o fecho de um conjunto.

5.3 Separando pontos: Espaços T_0 , T_1 e Hausdorff (T_2).

Se não conseguíssemos enxergar os pontos, mas apenas saber se eles estão ou não dentro dos abertos, teríamos que todos os pontos na topologia caótica não podem ser distinguidos. Alguns autores usam o termo U separa x de y se $x \in U$ e $y \notin U$. No caso de T_0 existe algum aberto que separa x de y ou separa y de x . No caso de um espaço T_1 cada ponto é separado do outro por um aberto (veja Figura 5.3).

5.3.1 Espaços T_0 , T_1 e T_2 .

Definição 5.9. Seja X um espaço topológico.

Dizemos que X é T_0 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe um aberto U tal que $(x \in U \text{ e } y \notin U)$ ou $(x \notin U \text{ e } y \in U)$.

Dizemos que X é T_1 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe um aberto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$. (Note que invertendo a ordem temos um aberto V tal que $y \in V$ e $x \notin V$).

Note que se fixarmos uma base de abertos, as testemunham para T_0 ou T_1 podem ser tomadas nessa base.

Lema 5.10. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de abertos.

X é T_0 se e somente se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $(x \in U \text{ e } y \notin U)$ ou $(x \notin U \text{ e } y \in U)$.

X é T_1 se para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Exemplo 5.11. O espaço caótico com dois ou mais pontos não é T_0 .

O espaço gerado pela base $\{]x, +\infty[: x \text{ é número real } \}$ é um espaço T_0 que não é T_1 .

Proposição 5.12. Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos e $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Então X é T_0 se e somente se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ para todo par $x, y \in X$ de pontos distintos.

Demonstração. Se $x \neq y$ então podemos supor que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$ (trocando a ordem entre x e y caso contrário). Então $U \in \mathcal{B}_x$ mas $U \notin \mathcal{B}_y$. Assim, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Se $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ então existe $U \in (\mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y) \cup (\mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x)$. Vamos supor que $U \in \mathcal{B}_y \setminus \mathcal{B}_x$. Então $y \in U$ e $x \notin U$. Caso $U \in \mathcal{B}_x \setminus \mathcal{B}_y$ temos que $x \in U$ e $y \notin U$. Portanto X é T_0 . $\square$

Corolário 5.13. Se X é um espaço T_0 e $\mathcal{B}$ é uma base de abertos então existe uma função injetora de X em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Demonstração. Basta considerar a função $X \ni x \mapsto \mathcal{B}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. $\square$

Note que em particular, o tamanho de um espaço X que é T_0 é limitado pelo tamanho das partes da sua topologia.

Exemplo 5.14. O espaço caótico pode ser arbitrariamente grande e o conjunto das partes da sua topologia tem quatro elementos.

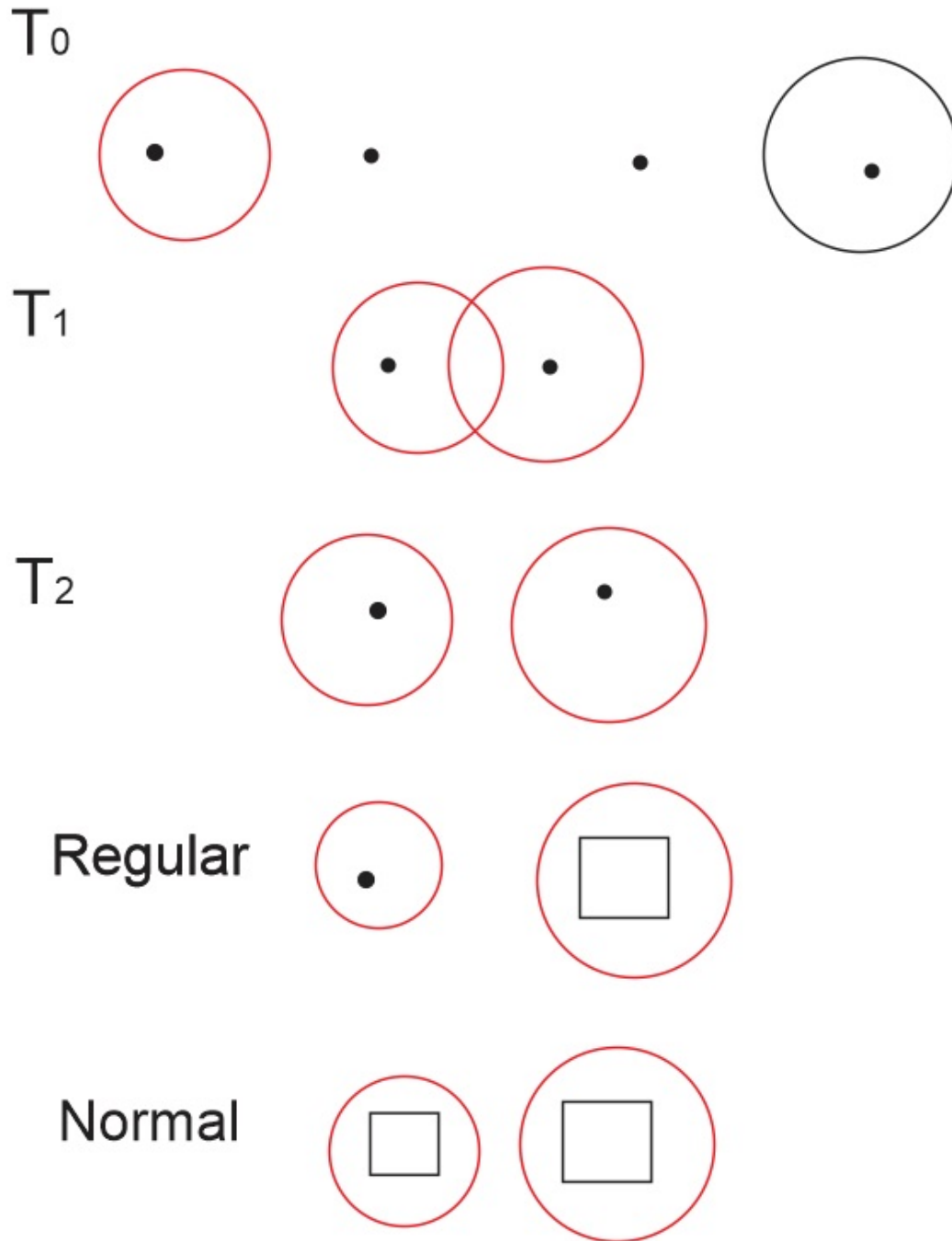
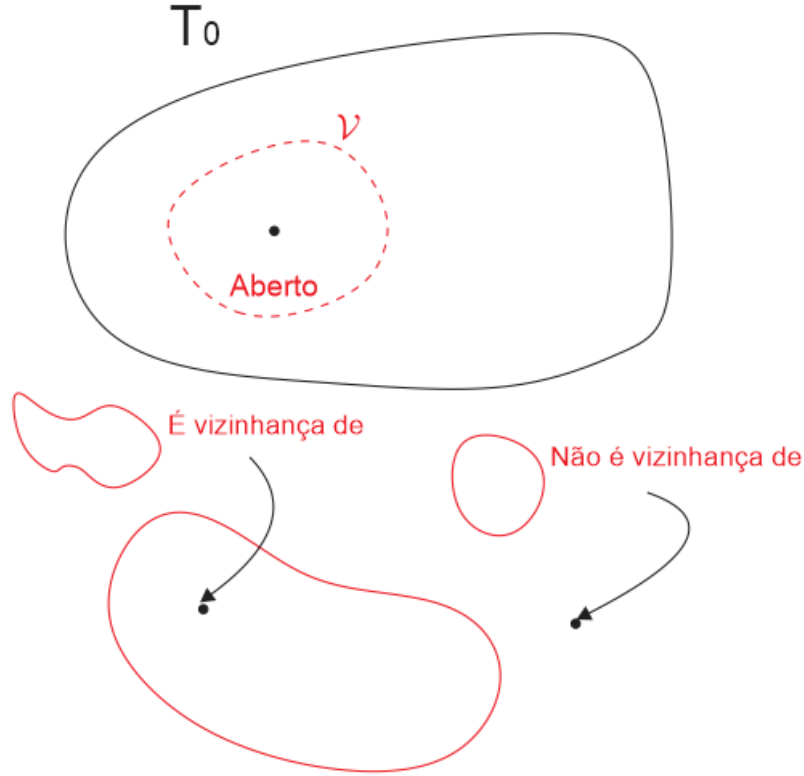


Figura 5.3: Separação de pontos.

Proposição 5.15. Um espaço X é T_0 se e somente se $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para todo $x, y \in X$ distintos.

Demonstração. Suponha que existe U aberto tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Então $y \in X \setminus U$, logo $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U \not\ni x$. Assim, $x \notin \overline{\{y\}}$. Como $x \in \overline{\{x\}}$, segue que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Se y pode ser separado de x por um aberto, temos uma situação similar. Assim, se X é T_0 temos que existe um aberto que separa um dos dois pontos do outro e assim $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Figura 5.4: Equivalência de espaços T_0 .

Se $x \in \overline{\{y\}}$ então $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. Similarmente se $y \in \overline{\{x\}}$ então $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Assim, se $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ então ou $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$. No primeiro caso, temos que $X \setminus \overline{\{y\}}$ separa x de y e no segundo caso, temos que $X \setminus \overline{\{x\}}$ separa y de x . Assim, X é T_0 . $\square$

Proposição 5.16. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{V}_x$ um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

São equivalentes:

- 1) X é um espaço T_1
- 2) $\{x\}$ é um conjunto fechado para todo $x \in X$.
- 3) $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$.

Demonstração. (1) $\rightarrow$ 2)). Suponhamos que X é T_1 . Seja $x \in X$. Para cada $y \in X$ distinto de x , existe um aberto U_y tal que $x \notin U_y$ e $y \in U_y$. Assim $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$ é um conjunto aberto. Logo $\{x\}$ é um fechado.

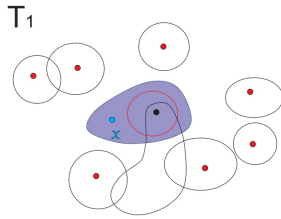
(2) $\rightarrow$ 3)). Assuma 2). Se x e y são pontos distintos de X então $\{y\}$ é fechado, então $U_y = X \setminus \{y\}$ é um aberto tal que $x \in U_y$ e $y \notin U_y$. Como $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x , temos que existe $W_y \in \mathcal{V}_x$ tal que $W_y \subseteq U_y$. Portanto $x \in \bigcap \mathcal{V}_x \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} W_y \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y = \{x\}$. Portanto $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

(3) $\rightarrow$ 1)). Assuma 3) e sejam x, y pontos distintos de X . Como $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$, segue que existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin U$. Como $U \in \mathcal{V}_x$, segue que $x \in U$. Logo X é T_1 . $\square$

Abaixo vemos que um espaço T_1 pode ser sequências que convergem para muitos pontos.

Exemplo 5.17. Seja X um espaço infinito com a topologia co-finita. Então se a sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência injetora em X então a sequência converge para x , para todo $x \in X$.

Demonstração. Seja $x \in X$ e V uma vizinhança aberta de x . Então $X \setminus V$ é finito. Como $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é injetora, existe N tal que $x_n \notin X \setminus V$ para todo $n \geq N$. Como V é uma vizinhança aberta arbitrária, segue que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge para x . $\square$

Figura 5.5: Equivalência de espaços T_1 .

Assim, para que tenhamos limite único precisamos de axiomas de separação em que os abertos não separem apenas os pontos, mas que separem os pontos ‘no entorno do outro ponto’.

Definição 5.18. Dizemos que um espaço topológico X é T_2 ou Hausdorff se para cada par x, y de pontos distintos de X existe U, V abertos tais que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 5.19. O espaço X com X não enumerável com a topologia co-enumerável é um espaço T_1 que não é T_2 .

5.3.2 ‘Este aberto é pequeno demais para dois limites’: Espaços Hausdorff.

Lema 5.20. Seja X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base de abertos e $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x para cada $x \in X$. São equivalentes:

- 1) X é Hausdorff.
- 2) para cada $x, y \in X$ distintos existem $U, V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
- 3) para cada $x \in X$ o conjunto $\bigcap \{\overline{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$.

Demonstração. A condição 1) $\leftrightarrow$ 2) é trivial de um lado e usa o fato de ser base do outro.

(1) $\rightarrow$ 3)). Fixe x e tome $y \in X$ distinto de x . Então existem abertos W e V tais que $x \in W$ e $y \in V$ com $W \cap V = \emptyset$. Como $\mathcal{V}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subseteq W$. Logo $U \subseteq X \setminus V$. Portanto, $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{U}$. Assim $\bigcap \{\overline{U} : U \in \mathcal{V}_x\} = \{x\}$.

(3) $\rightarrow$ 1)). Sejam x e y distintos em X . Por hipótese, existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin \overline{W}$. Como W é vizinhança de x , tome U aberto tal que $x \in U \subseteq W$ e $V = X \setminus \overline{W}$. Então $x \in U, y \in V$ e $U \cap V \subseteq W \cap X \setminus \overline{W} = \emptyset$. $\square$

Teorema 5.21. Seja X um espaço topológico T_2 . Então uma sequência convergente possui um único limite.

Demonstração. Suponha que x e y são limites de $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Suponhamos que x e y são distintos, então existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Existe n_x e n_y tais que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_x$ e $x_n \in V$ para todo $n \geq n_y$. Tomando $n > \max\{n_x, n_y\}$ temos que $x_n \in U \cap V$, contradizendo que $U \cap V = \emptyset$. Assim, $x = y$ e o limite é único. $\square$

Apenas por curiosidade, existe um axioma da separação para espaços em que toda sequência possui um único limite, chamado de $T_{1\frac{1}{2}}$.

5.3.3 Comparando duas funções contínuas em espaços Hausdorff.

Vamos terminar esta secção com um último resultado relacionando a importância da propriedade de Hausdorff em questões de continuidade.

Teorema 5.22. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas tais que Y é Hausdorff. Seja $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é um subconjunto fechado de X .

Demonstração. Vamos mostrar que $X \setminus E$ é um conjunto aberto. Seja $y \in X \setminus E$. Então $f(y) \neq g(y)$. Como Y é Hausdorff, existem U e V abertos disjuntos tais que $f(y) \in U, g(y) \in V$. Como f e g são contínuas, segue que $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ são vizinhanças abertas de y . Então $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de y . Se $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ então $f(x) \in U$ e $g(x) \in V$. Como $U \cap V = \emptyset$, segue que $f(x) \neq g(x)$. Logo $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus E$. Portanto $X \setminus E$ é aberto e E é fechado. $\square$

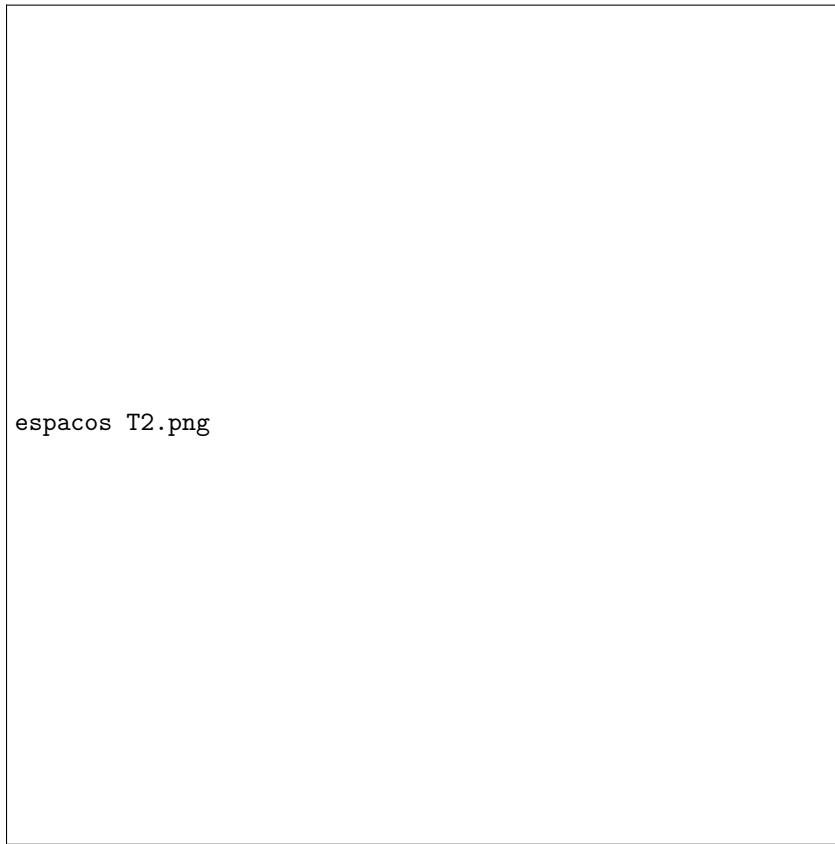


Figura 5.6: Equivalência de espaços T_2 ou Hausdorff.

Corolário 5.23. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas, onde X é um espaço topológico arbitrário e Y é um espaço topológico Hausdorff. Se existe um denso D de X tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in D$ então $f = g$.

Exercício 5.24. Se $F \subseteq X$ finito e X é Hausdorff então existem aberto $\{U_x : x \in F\}$ dois a dois disjuntos tais que $x \in U_x$ para cada $x \in F$.



Figura 5.7: Sequências em espaços Haudorff tem no máximo um limite.

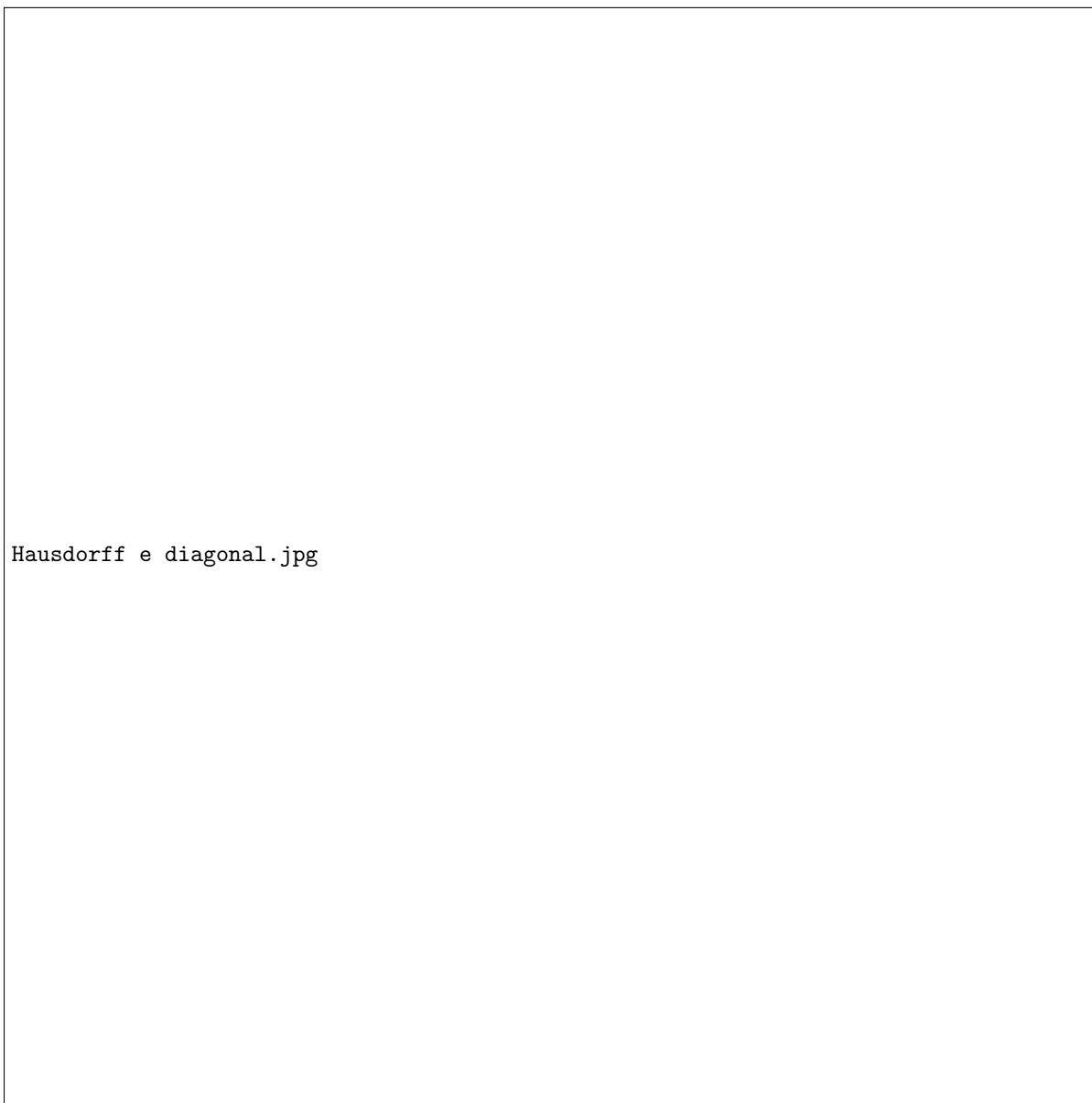


Figura 5.8: $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado para Y Hausdorff.

Capítulo 6

Filtros. Interior. Topologias geradas por Fecho e Interior.

6.1 Filtros

6.1.1 Definição de Filtros.

Dado um conjunto A e um ponto de acumulação de x podemos tentar capturar esta informação usando a intersecção de A com as vizinhança de x . Podemos pensar nisso também quando temos um ‘buraco’ no espaço e usar abertos para identificar o buraco, esta é a noção intuitiva que queremos capturar com o filtro.

A convergência de um filtro pode ser pensados como se estivéssemos dando um ‘zoom’ num conjunto, onde nossas ‘lentes’ são os abertos.

Definição 6.1. Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de subconjuntos de X . Dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro de conjuntos se

- 1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- 2) se $A \subseteq B \subseteq X$ e $A \in \mathcal{F}$ então $B \in \mathcal{F}$.
- 3) se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Note que o filtro depende apenas do conjunto X .

Exemplo 6.2. Dado um conjunto infinito X , temos que $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}$ é um filtro.

Dado $a \in X$ o conjunto $\{A \subseteq X : a \in A\}$ é um filtro. Dizemos que esse é o filtro principal gerado por a .

A família de todas as vizinhanças de um ponto $x \in X$ formam um filtro.

A família de todos os conjuntos que contém um aberto densos de X formam um filtro (intersecção finita de abertos densos é um aberto denso).

Em geral, vemos os elementos de um filtro como elementos grandes (este termo faz bastante sentido quando se pensa, por exemplo, nos conjuntos de medida 1 dentro do intervalo $[0, 1]$.) O maior elemento do filtro sobre X é o próprio X e pensamos que os elementos menores do filtro contém informação mais relevante.

A noção dual de filtro de conjuntos é o ideal (por exemplo, o ideal dos conjuntos de medida nula, é um σ -ideal), mas para convergência em espaços topológicos o dual são as redes, que definiremos em outra aula.

Podemos ver um filtro como um conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$ e considerar ponto de acumulação e limite de uma família indexada de conjuntos $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$.

Definição 6.3. Um ponto de acumulação x de uma família de conjuntos indexado pelo filtro $\mathcal{F}$ se para toda vizinhança U de x e todo $F \in \mathcal{F}$ existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subseteq F$ e $A_{F'} \cap U \neq \emptyset$ para cada $G \subseteq F'$ com $G \in \mathcal{F}$.

Um ponto x é limite de uma família de conjuntos indexado pelo filtro $\mathcal{F}$ se para toda vizinhança U de x e existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A_G \subseteq U$ para cada $G \subseteq F$ com $G \in \mathcal{F}$.

Vamos agora relacionar filtros ao espaço topológico. Após a definição iremos relacionar com a noção de convergência acima.

Definição 6.4. Seja X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X .

Dizemos que x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \bar{A}$.

Dizemos que x é um limite de $\mathcal{F}$ se todas as vizinhanças de x pertencem a $\mathcal{F}$.

Podemos pensar que os elementos dos filtro são os seus próprios índices e considerar convergência de conjuntos.

Lema 6.5. Um ponto x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se e somente se x é ponto de acumulação da família indexada $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$, onde $A_F = F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Temos que $x \in \bar{F}$ se e somente se $F \cap U \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$ e U vizinhança de x se e somente se $A_F \cap U \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Para a ida, se x é ponto de acumulação de x , temos que $A_F \cap U \neq \emptyset$ para cada U vizinhança de x e $F \in \mathcal{F}$. Assim, x é ponto de acumulação de $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$. Para a volta, se $F \in \mathcal{F}$ e U vizinhança de x , existe $F' \subseteq F$ com $F' \subseteq U$ tal que $A_{F'} \cap U \neq \emptyset$ para cada $G \subseteq F'$ com $G \in \mathcal{F}$. Em particular, temos que $\emptyset \neq A_{F'} \cap U = F' \cap U \subseteq F \cap U$. Assim, temos que $x \in \bar{F}$. Como F é um elemento arbitrário de $\mathcal{F}$, segue que x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. $\square$

Lema 6.6. Um ponto x é limite de $\mathcal{F}$ se e somente se x é limite da família indexada $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$, onde $A_F = F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Para a ida, seja U uma vizinhança de x . Como $\mathcal{F}$ converge para x , temos que $U \in \mathcal{F}$. Assim, para todo $F \subseteq U$ com $F \in \mathcal{F}$, temos que $A_F = F \subseteq U$. Assim, temos que $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ converge para x . Para a volta, seja U uma vizinhança de x . Como $\{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ converge para x , existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A_G \subseteq U$ para todo $G \subseteq F$ com $G \in \mathcal{F}$. Em particular temos que $F = A_F \subseteq U$. Como $\mathcal{F}$ é filtro e $F \subseteq U$, segue que $U \in \mathcal{F}$. Assim, x é limite do filtro $\mathcal{F}$. $\square$

6.1.2 Ponto de acumulação e convergência de filtros.

Lema 6.7. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X . Se $x \in X$ é um limite de $\mathcal{F}$ então x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Para isto, basta mostrarmos que $x \in \bar{A}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Fixado, $A \in \mathcal{F}$, isto é equivalente a mostrar que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo U vizinhança de x . Por hipótese, $U \in \mathcal{F}$, portanto $U \cap A \in \mathcal{F}$. Pela definição de filtro, temos que os elementos de $\mathcal{F}$ são não vazios. Logo $U \cap A \neq \emptyset$ portanto x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. $\square$

Lema 6.8. Seja X um espaço Hausdorff e $\mathcal{F}$ um filtro convergente. Então o limite de $\mathcal{F}$ é único. Reciprocamente, se todos os filtros convergentes tem limite único então o espaço é Hausdorff.

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ converge para x e y com $x \neq y$ então $\mathcal{F}$ contém todas as vizinhanças abertas de x e de y . Em particular contém uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tal que $U \cap V = \emptyset$, o que não é possível, pois $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Seja X um espaço que não é Hausdorff e sejam x e y dois pontos que testemunham este fato. Considere o conjunto $\mathcal{C} = \{U : U \text{ é vizinhança de } x \text{ ou de } y\}$. Dada uma família finita não vazia $\mathcal{C}'$ de elementos de $\mathcal{C}$, o conjunto $\bigcap \mathcal{C}'$ contém $U \cap V$, onde U é vizinhança aberta de x e V é vizinhança aberta de y . Assim, $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. Portanto $\mathcal{C}$ é uma base para um filtro $\mathcal{F}$. Claramente $\mathcal{F}$ converge para x e para y . $\square$

Como na construção de topologias, em muitos casos é mais conveniente usar uma família que gera o filtro.

Definição 6.9. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{C}$ tem a propriedade de intersecção finita (PIF) se para toda família finita não vazia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ temos $\mathcal{C}' \neq \emptyset$.

Note que todo filtro tem PIF.

Definição 6.10. Dado uma família $\mathcal{C}$ de X com PIF, dizemos que o filtro gerado por $\mathcal{C}$ é a família $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{C}' \text{ é finito e não vazio e } \bigcap \mathcal{C}' \subseteq A\}$.

Lema 6.11. O filtro gerado acima é de fato um filtro.

Demonstração. Temos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ então $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

- 1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois cada elemento de $\mathcal{F}$ contém algum $\bigcap \mathcal{C}'$ e $\bigcap \mathcal{C}'$ é não vazio.
- 2) Dado $A \subseteq B$ com $A \in \mathcal{F}$, a testemunha de que $A \in \mathcal{F}$ também testemunha que $B \in \mathcal{F}$.
- 3) Se $A, B \in \mathcal{F}$ então existem $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$ tal que $\bigcap \mathcal{C}_A \subseteq A$ e $\bigcap \mathcal{C}_B \subseteq B$. Assim, $\bigcap (\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B) \subseteq A \cap B$ e portanto $A \cap B \in \mathcal{F}$. $\square$

6.1.3 Bases de filtros. Extensão de filtro.

Definição 6.12. Dizemos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ é uma sub-base para o filtro $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}$ é o filtro gerado por $\mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma base para o filtro $\mathcal{F}$ se é uma sub-base tal que para cada $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $F \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$.

Note que se $\mathcal{C}$ é base para um filtro $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq F\}$.

Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ é fechada por intersecções finitas se $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ para todo subconjunto finito $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Claramente uma sub-base fechada por intersecções finitas é uma base, assim, a noção de sub-base de filtro lembra a noção de sub-base de abertos.

Definição 6.13. Dizemos que um filtro $\mathcal{G}$ estende o filtro $\mathcal{F}$ se $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$

As extensões de um filtro em termos de convergência correspondem às subsequências.

Proposição 6.14. Se $\mathcal{F}$ possui x como ponto de acumulação então existe um filtro $\mathcal{G}$ estendendo $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}$ converge para x .

Demonstração. Seja $\mathcal{V}_x$ todas as vizinhanças de x e $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{V}_x$. Usando o fato de que x é ponto de acumulação $\mathcal{F}$ e que todos os elementos de $\mathcal{V}_x$ são vizinhanças de x , temos que $\mathcal{C}$ tem PIF (verifique). Seja $\mathcal{G}$ o filtro gerado por $\mathcal{C}$. Claramente $\mathcal{G}$ estende $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ converge para x . $\square$

A prova do seguinte fato é deixada ao leitor.

Proposição 6.15. Seja $\mathcal{C}$ uma base para um filtro $\mathcal{F}$ sobre X , onde X é um espaço topológico. Então x é ponto de acumulação de x se e somente se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} \bar{A}$.

Lema 6.16. Dado um filtro $\mathcal{F}$ sobre X e uma função $f : X \rightarrow Y$, vamos denotar por $f[\mathcal{F}]$ o conjunto $\{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$. O conjunto $f[\mathcal{F}]$ tem PIF.

6.1.4 Filtros e continuidade.

Teorema 6.17. Seja $x \in X$ e $f : X \rightarrow Y$. São equivalentes:

- a) f é contínua em x .
- b) para todo filtro $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F}$ acumula em x então o filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$ acumula em $f(x)$.
- c) para todo filtro $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F}$ converge para x então o filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$ converge para $f(x)$.

Demonstração. (a) $\rightarrow$ b)). Dado $A \in \mathcal{F}$, temos que $x \in \bar{A}$, por uma das equivalências de continuidade, segue que $f(x) \in \bar{f[A]}$. Pela proposição deixada como exercício, segue que $f(x)$ é ponto de acumulação do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$.

(a) $\leftarrow$ b)) Dado A tal que $x \in \bar{A}$, considere o filtro $\mathcal{F}$ gerado por $\{A\}$. Então por hipótese temos que $f(x) \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} \bar{f[C]}$. Em particular, temos que $f(x) \in \bar{f[A]}$.

(a) $\rightarrow$ c)). Seja $\mathcal{F}$ um filtro que converge para x . Se V é uma vizinhança de $f(x)$, temos pela continuidade de f em x que existe U vizinhança de x tal que $f[U] \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ converge para x , temos que $U \in \mathcal{F}$. Assim, V é um elemento do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$. Portanto o filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$ converge para $f(x)$.

(c) $\rightarrow$ b)) Seja $\mathcal{F}$ um filtro que acumula em x . Então existe um filtro $\mathcal{G}$ estendendo $\mathcal{F}$ que converge para x . Por hipótese, o filtro gerado por $f[\mathcal{G}]$ converge para $f(x)$. Portanto o filtro gerado por $f[\mathcal{G}]$ acumula em $f(x)$. Como $f[\mathcal{G}] \supseteq f[\mathcal{F}]$, segue que $f(x) \in \bigcap_{A \in \mathcal{G}} \bar{f[A]} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \bar{f[A]}$.

Portanto $f(x)$ é um ponto de acumulação do filtro gerado por $f[\mathcal{F}]$. $\square$

6.2 'O aberto dentro de você'.

6.2.1 Definição de Interior.

Já vimos a definição de fecho.

Definição 6.18. Dado um espaço topológico X e $A \subseteq X$ o interior de A , denotado por $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{Int}(A)$ é o maior aberto contido em A .

Vamos mostrar que o interior está bem definido.

Lema 6.19. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os abertos contidos em A . Então $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\overset{\circ}{A} = \bigcup \mathcal{A}$.

Demonstração. O conjunto $\mathcal{A}$ contém $\emptyset$, assim $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ é uma família de abertos contidos em A segue que $\bigcup \mathcal{A}$ é um aberto com $\bigcup \mathcal{A} \subseteq A$. Dado U um aberto contido em A , temos que $U \in \mathcal{A}$. Então $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Assim, $\bigcup \mathcal{A} = \overset{\circ}{A}$. $\square$

O interior simplifica a tomada do aberto que testemunha que um conjunto é vizinhança de um ponto.

Lema 6.20. Um conjunto V é vizinhança de x se e somente se $x \in \overset{\circ}{V}$.

Demonstração. Se V é uma vizinhança de x , então existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq V$. Pela definição de interior, segue que $U \subseteq \overset{\circ}{V}$. Portanto $x \in \overset{\circ}{V}$.

Reciprocamente, se $x \in \overset{\circ}{V}$, temos que $\overset{\circ}{V}$ é um aberto contido em V . Assim, V é vizinhança de x . $\square$

Já vimos como utilizar bases de abertos, base de fechados e sistemas fundamentais de vizinhanças abertas para construir topologias, iremos agora mencionar também como obter topologias usando operadores fecho e interior.

6.3 Fecho vs Interior.

O lema seguinte mostra a relação entre tomar interior e fecho sucessivamente:

Lema 6.21. $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X .

Demonstração. $\overline{\overset{\circ}{A}} \supseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$ e portanto $\overline{\overset{\circ}{A}} \supseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$. Por outro lado, $\overset{\circ}{\overline{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$, portanto, $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$. Assim, $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$. $\square$

Assim como fechados e abertos são relacionados por complementares, o fecho e o interior também o são. Por motivos de visualização vamos usar a notação alternativa de fecho e interior.

Teorema 6.22. $\text{Int}(A) = X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$ e $\text{Cl}(A) = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X .

Demonstração. Temos que $\text{Int}(A) \subseteq A$. Assim, $X \setminus \text{Int}(A) \supseteq X \setminus A$. Como $\text{Int}(A)$ é aberto, segue que $X \setminus \text{Int}(A)$ é um fechado, logo $X \setminus \text{Int}(A) \supseteq \text{Cl}(X \setminus A)$. Usando novamente De Morgan, temos que $\text{Int}(A) \subseteq X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$. Para verificar a recíproca, $\text{Cl}(X \setminus A) \supseteq X \setminus A$. Usando De Morgan, temos que $X \setminus \text{Cl}(X \setminus A) \subseteq X \setminus (X \setminus A) \subseteq A$. Como $X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$ é um aberto contido em A , segue que $X \setminus \text{Cl}(X \setminus A) \subseteq \text{Int}(A)$. Com isto, $\text{Int}(A) = X \setminus \text{Cl}(X \setminus A)$.

Pelo primeiro item temos que $\text{Int}(B) = X \setminus \text{Cl}(X \setminus B)$ para todo subconjunto B de X . Tomando $B = X \setminus A$, teremos $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl}(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus \text{Cl}(A)$. Por De Morgan, temos $X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = \text{Cl}(A)$. $\square$

Corolário 6.23. $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$ para todo subconjunto A de um espaço topológico X .

Demonstração. Já vimos que $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Substituindo A por $X \setminus A$, temos que

$\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}} = \overset{\circ}{\overline{X \setminus A}}$, para todo subconjunto A de um espaço topológico X . Usando a relação de fecho e interior com complementos, temos $\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}} = \text{Int}(X \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus \overline{\overset{\circ}{A}}$.

Similarmente, temos que $\overline{\overset{\circ}{X \setminus A}} = X \setminus \overline{\overset{\circ}{A}}$. Assim, segue que $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$. $\square$

6.4 Topologias geradas pelos Operadores Fecho e Interior.

Vamos agora descrever as propriedades de operador fecho e o operador interior para definirmos uma topologia.

Teorema 6.24. Dado um espaço topológico, o operador fecho tem as seguintes propriedades:

- OF1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.
- OF2) $A \subseteq \bar{A}$, para todo subconjunto A de X .
- OF3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, para todos os subconjuntos A e B de X .
- OF4) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$, para todo subconjunto A de X .

Demonstração. O vazio é fechado, assim o seu fecho é o vazio. O fecho de A contém A . O fecho de A é um fechado e o fecho de um fechado é ele próprio. Assim OF1), OF2) e OF4) estão satisfeitas.

Para OF3), $\overline{A \cup B}$ é um fechado contendo $A \cup B$, assim $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$. Por outro lado, $A \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\bar{A} \cup \bar{B}$ é fechado, assim $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Analogamente, $B \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\bar{A} \cup \bar{B}$ é fechado, assim $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Portanto, $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Portanto $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\square$

Teorema 6.25. Seja $\phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ um operador tal que

- OF1) $\phi(\emptyset) = \emptyset$.
- OF2) $A \subseteq \phi(A)$, para todo subconjunto A de X .
- OF3) $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$, para todos os subconjuntos A e B de X .
- OF4) $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$, para todo subconjunto A de X .

Então existe uma topologia tal que ϕ é o operador fecho desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador fecho ϕ .

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{F \subseteq X : \phi(F) = F\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é uma base para fechados para uma topologia. De fato, $\emptyset \in \mathcal{C}$ e se $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ então $\phi(F_1 \cup F_2) = \phi(F_1) \cup \phi(F_2) = F_1 \cup F_2$. Assim, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.

Seja τ a topologia gerada pela base de fechados $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{C}$ é uma base de fechados para τ . Vamos verificar que $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os fechados. Por OF1) temos que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Por OF2) temos que $X \subseteq \phi(X) \subseteq X$. Assim, $X \in \mathcal{C}$. Já vimos acima que a união de dois elementos de $\mathcal{C}$ pertence a $\mathcal{C}$. Falta mostrar que se $\emptyset \neq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ então $\bigcap \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$. Para isto, temos que verificar que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') = \bigcap \mathcal{C}'$. Por OF2), temos que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \supseteq \bigcap \mathcal{C}'$. Para mostrar a outra inclusão, tome $F \in \mathcal{C}'$. Então $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \phi(\bigcap \mathcal{C}') \cup \phi(F) = \phi((\bigcap \mathcal{C}') \cup F) = \phi(F) = F$. Como vale para todo $F \in \mathcal{C}'$, segue que $\phi(\bigcap \mathcal{C}') \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$. Assim, $\mathcal{C}$ são todos os fechados da topologia τ . Seja $\bar{A}$ o fecho de A na topologia τ .

Pela definição de $\mathcal{C}$ e pelo fato dela ser a família de todos os fechados de τ , temos que $\phi(F) = F = \bar{F}$ para todo $F \in \mathcal{C}$. Tome agora A um subconjunto arbitrário de X .

Por OF4), $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$, assim, pela definição de $\mathcal{C}$, temos que $\phi(A) \in \mathcal{C}$ com $A \subseteq \phi(A)$. Assim, pela definição de fecho temos $\bar{A} \subseteq \phi(A)$. Por outro lado $\phi(A) \subseteq \phi(A) \cup \phi(\bar{A}) = \phi(A \cup \bar{A}) = \phi(\bar{A}) = \bar{A}$, por OF2) e pelo fato que $\bar{A} \in \mathcal{C}$. Assim $\phi(A) = \bar{A}$ para todo A e ϕ é o fecho de A na topologia τ . $\square$

Exemplo 6.26. Dizemos que um conjunto A é sequencialmente fechado se os limites de todas as sequência convergente em A estão em A . Como vimos anteriormente, se um espaço é sequencial, então um conjunto sequencialmente fechado é um fechado. O fecho de um conjunto é sequencialmente fechado. Podemos tomar a intersecção de todos os sequencialmente fechados que contém um conjunto A e definir o fecho sequencial de A .

O fecho sequencial satisfaz as propriedades OF1)-OF4) e a topologia gerada pelo fecho sequencial é mais fina que a topologia original (será estritamente mais fina se o espaço original não for sequencial).

Se começarmos com um espaço em que as sequências convergentes são apenas as eventualmente constantes, então todo conjunto é fechado na topologia gerada pelo fecho sequencial. Assim, a topologia associada ao fecho sequencial neste caso é discreta.

Agora iremos descrever o operador interior:

Teorema 6.27. Dado um espaço topológico, o operador interior tem as seguintes propriedades:

- OI1) $\overset{\circ}{X} = X$.
- OI2) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$, para todo subconjunto A de X .
- OI3) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, para todos os subconjuntos A e B de X .
- OI4) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$, para todo subconjunto A de X .

Demonstração. Fica a cargo do leitor verificar essa relação usando a definição de interior.

As relações acima podem também ser verificadas usando complementos:

Como $\bar{\emptyset} = \emptyset$, segue que $\overset{\circ}{X} = \text{Int}(X \setminus \emptyset) = X \setminus \bar{\emptyset} = X \setminus \emptyset = X$.

Como $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$, segue que $A = X \setminus (X \setminus A) \supseteq X \setminus \overline{X \setminus A} = \text{Int}(X \setminus (X \setminus A)) = \overset{\circ}{A}$

De $\overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = \overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}$ segue que $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))) = X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = X \setminus (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) = (X \setminus \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B}) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

De $\overline{\overline{X \setminus A}} = \overline{X \setminus A}$, segue que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \text{Int}(\text{Int}(A)) = X \setminus \overline{X \setminus \text{Int}(A)} = X \setminus \overline{\overline{X \setminus A}} = X \setminus \overline{X \setminus A} = \overset{\circ}{A}$. $\square$

Agora veremos como definir uma topologia usando um operador interior.

Teorema 6.28. Seja $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ um operador tal que

OI1) $\psi(X) = X$.

OI2) $\psi(A) \subseteq A$, para todo subconjunto A de X .

OI3) $\psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$, para todos os subconjuntos A e B de X .

OI4) $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$, para todo subconjunto A de X .

Então existe uma topologia tal que ψ é o operador interior desta topologia. Diremos que esta é a topologia gerada pelo operador interior ψ .

Demonstração. Podemos definir um operador fecho para uma topologia usando $\phi(A) = X \setminus \psi(X \setminus A)$. As propriedades de operador fecho para ϕ seguem do uso da complementação e da propriedades de ψ . Tome a topologia gerada por ϕ (em que ϕ será o operador fecho). Usando complementares, teremos que ψ será o operador interior desta topologia. $\square$

Capítulo 7

Redes e Subredes. Redes vs Filtros.

7.1 ‘Sai $\mathbb{N}$ e entra Conjuntos Dirigidos’: Redes.

7.1.1 Definição de Conjunto Dirigido.

Como comentado anteriormente, para definir uma rede, temos que fixar um conjunto de índices com algum tipo de ordem. No exemplo que vimos anteriormente usamos o conjunto de vizinhanças de um ponto com a ordem da inclusão. Comparada ao caso abaixo, temos que $U \leq V$ se e somente se $U \supseteq V$.

Definição 7.1. Um conjunto Σ com uma ordem $\leq$ é um conjunto dirigido se

- a) $\sigma \leq \sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$,
- b) $\sigma_1 \leq \sigma_2$ e $\sigma_2 \leq \sigma_3$ então $\sigma_1 \leq \sigma_3$, para todo σ_1, σ_2 e $\sigma_3 \in \Sigma$.
- c) para cada par $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ existe σ tal que $\sigma_1 \leq \sigma$ e $\sigma_2 \leq \sigma$.

Pelo tipo de situação que aparece ao construir redes, é preferível permitir que existam $\sigma_1 \neq \sigma_2$ em Σ tais que $\sigma_1 \leq \sigma_2$ e $\sigma_2 \leq \sigma_1$.

7.1.2 Definição de Rede. Ponto de Acumulação e Convergência.

Definição 7.2. Uma rede em um conjunto X é uma função de domínio Σ tal que $x_\sigma \in X$ para cada $\sigma \in \Sigma$.

O ponto de acumulação e o limite de uma rede são similares às noções para sequências.

Definição 7.3. Seja X um espaço topológico e $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede em X .

Dizemos que x é um ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ se para toda vizinhança U de x e todo $\sigma^* \in \Sigma$, existe $\sigma \geq \sigma^*$ tal que $x_\sigma \in U$. *Comumente, dizemos que a rede está frequentemente em U .*

Dizemos que x é um ponto limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ se para toda vizinhança U de x existe $\sigma^* \in \Sigma$ tal que para $\sigma \geq \sigma^*$ temos $x_\sigma \in U$. *Comumente, dizemos que a rede está eventualmente em U .*

Lema 7.4. Seja X um espaço topológico e $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede. Se $x \in X$ é um limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ então x é um ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.

Demonstração. Para isto, seja U uma vizinhança de x . Então existe σ' tal que $x_\sigma \in U$ para todo $\sigma \geq \sigma'$. Dado $\sigma^* \in \Sigma$, existe $\sigma \geq \sigma'$ e $\sigma \geq \sigma^*$. Então $x_\sigma \in U$ com $\sigma \geq \sigma^*$. Logo x é ponto de acumulação da rede. $\square$

Lema 7.5. Seja X um espaço Hausdorff e $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede convergente. Então o limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ é único. Reciprocamente, se todas as redes convergentes tem limite único então o espaço é Hausdorff.

Demonstração. Se $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ converge para x e y com $x \neq y$. Fixe uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tal que $U \cap V = \emptyset$, então existe σ_x e σ_y em Σ tal que $x_\sigma \in U$ para todo $\sigma \geq \sigma_x$ e $x_\sigma \in V$ para todo $\sigma \geq \sigma_y$. Como Σ é dirigido, segue que existe $\sigma' \in \Sigma$ tal que $\sigma' \geq \sigma_x$ e $\sigma' \geq \sigma_y$. Então $x_{\sigma'} \in U \cap V$, uma contradição.

Se x, y testemunham que X não é Hausdorff, seja $\mathcal{V}_x$ e $\mathcal{V}_y$ sistemas fundamentais de vizinhanças de x e y respectivamente. Seja $\Sigma = \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_y$ com a ordem $(U', V') \geq (U, V)$ se $U' \subseteq U$ e $V' \subseteq V$. O

conjunto Σ é dirigido. Para cada $(U, V) \in \Sigma$, fixe $x_{(U, V)} \in (U \cap V)$. Então x e y são limites da rede $\{x_{(U, V)} : (U, V) \in \Sigma\}$. $\square$

7.2 O exemplo que deu origem à ~~série~~ rede.

7.2.1 Formalização do limite da integral de Riemann usando redes.

A definição de Rede foi motivada como uma ferramenta para formalizar um conceito de limite para a integral de Riemann.

Exemplo 7.6. Dado um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, seja Σ o conjunto dos $\sigma = \langle P_\sigma, C_\sigma \rangle$, onde $P_\sigma = \{a = t_0 \leq \dots \leq t_{n_\sigma} = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $C_\sigma = \{c_1, \dots, c_{n_\sigma}\}$ tal que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para todo $1 \leq i \leq n_\sigma$. Diremos que $\sigma \leq_\Sigma \sigma^*$ se $P_\sigma \subseteq P_{\sigma^*}$. O conjunto Σ é dirigido.

Considere $x_\sigma = \sum_{1 \leq i \leq n_\sigma} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$. Então dizemos que f é Riemann integrável se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que a rede $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ converge para L .

Neste caso, dizemos que $\int_a^b f(x)dx = L$.

7.3 ‘O ‘Jr’ da rede, pode ficar maior que a rede, mas segue seus passos’.

7.3.1 Subredes.

A noção de subrede é menos intuitiva o que de subsequência. Se considerarmos uma sequência como rede, uma subrede não precisa ser uma sequência, nem precisa estar enumerada por um conjunto dirigido enumerável. O principal da subrede é que ela segue os ‘passos’ da rede, apenas ‘pisa’ (pontos do espaço) por onde a rede já passou e segue as direções por onde a rede passou (cofinalidade).

Definição 7.7. Sejam Σ e $\tilde{\Sigma}$ dois conjuntos dirigidos e seja $r : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$.

Dizemos que r preserva ordem se $\sigma_1 \leq_\Sigma \sigma_2$ implica que $r(\sigma_1) \leq_{\tilde{\Sigma}} r(\sigma_2)$.

Dizemos que Σ é cofinal em $\tilde{\Sigma}$ pela r se para todo $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\tilde{\sigma} \leq_{\tilde{\Sigma}} r(\sigma)$.

Exemplo 7.8. Seja Σ os subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{N}$ com a ordem $\subseteq$. Então Σ é um conjunto dirigido. Considere $\mathbb{N}$ com a ordem usual dos naturais. Então $\mathbb{N}$ também é um conjunto dirigido. Tome $r : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ da pelo máximo de F . Então r preserva ordem e é cofinal.

Definição 7.9. Dizemos que $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ é uma subrede de $\{y_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}\}$ se existe $r : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que preserva ordem e é cofinal e tal que $x_\sigma = y_{r(\sigma)}$.

Exemplo 7.10. Uma subsequência $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ é uma subrede usando $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $r(k) = n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se denotarmos uma subsequência como $\{x_n : k \in A\}$ então ela é uma subrede usando $r : A \rightarrow \mathbb{N}$ com $r(n) = n$ para todo $n \in A$.

7.3.2 Rede vs sua Subrede.

Proposição 7.11. Dada um rede que possui x como ponto de acumulação existe uma subrede que possui x como limite.

Demonstração. Tome $\mathcal{V}_x$ uma base local de x . Se $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ possui x como ponto de acumulação então seja $\Gamma = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{V}_x \text{ tal que } x_\sigma \in U\}$. Teremos que usar o fato que a rede acumula em x para provar que Γ é um conjunto dirigido. Por ser um subconjunto do dirigido $\Sigma \times \mathcal{V}_x$ basta ver que Γ é um conjunto cofinal de $\Sigma \times \mathcal{V}_x$. De fato, se $(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{V}_x$, existe $\sigma^* \geq \sigma$ tal que $x_{\sigma^*} \in U$. Assim $(\sigma^*, U) \in \Gamma$ com $(\sigma, U) \leq (\sigma^*, U)$.

Defina $r : \Gamma \rightarrow \Sigma$ como $r(\sigma, U) = \sigma$. Temos que r preserva ordem e r é cofinal, usando o fato que Γ é cofinal em $\Sigma \times \mathcal{V}_x$.

Defina $x_{(\sigma, U)} = x_\sigma$ para cada $(\sigma, U) \in \Gamma$ (pois $r(\sigma, U) = \sigma$). Então $\{x_{(\sigma, U)} : (\sigma, U) \in \Gamma\}$ é uma subrede. Vamos mostrar que esta subrede converge para x . De fato, seja W uma vizinhança de x . Então existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subseteq W$. Fixe σ^* tal que $x_{\sigma^*} \in U$.

Então $(\sigma^*, U) \in \Gamma$ e se $(\sigma, V) \geq (\sigma^*, U)$ com $(\sigma, V) \in \Gamma$ então $x_{(\sigma, V)} \in V \subseteq U \subseteq W$. Como W é uma vizinhança arbitrária de x , segue que a subrede converge para x . $\square$

Proposição 7.12. Seja $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede e $G = \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ uma subrede de S . Se x é ponto de acumulação de G então x é ponto de acumulação de S .

Demonstração. Seja $r : \Gamma \rightarrow \Sigma$ a testemunha que G é subrede de S . Seja U uma vizinhança de x e $\sigma^* \in \Sigma$. Como r é cofinal, existe $\gamma^* \in \Gamma$ tal que $r(\gamma^*) \geq \sigma^*$. Como x é ponto de acumulação de G e U é vizinhança de x , existe $\gamma \geq \gamma^*$ tal que $y_\gamma \in U$. Então $x_{r(\gamma)} \in U$ com $r(\gamma) \geq r(\gamma^*) \geq \sigma^*$ (pois r preserva ordem). Então para $\sigma = r(\gamma)$ temos $x_\sigma \in U$ com $\sigma \geq \sigma^*$. Portanto S acumula em x . $\square$

7.3.3 Continuidade e Redes.

A continuidade da f usando redes parece visualmente mais natural do que usando filtros:

Teorema 7.13. Seja $x \in X$ e $f : X \rightarrow Y$. São equivalentes:

- a) f é contínua em x .
- b) para toda rede $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, se $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ acumula em x então a rede $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ acumula em $f(x)$.
- c) para toda rede $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, se $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ converge para x então a rede $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ converge para $f(x)$.

Demonstração. (a) $\rightarrow$ c)). Seja $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede que converge para x . Vamos mostrar que $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ converge para $f(x)$. Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Pela continuidade de f em x , segue que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x . Logo, existe $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $x_\sigma \in f^{-1}(V)$ para todo $\sigma \geq \sigma^*$. Portanto, $f(x_\sigma) \in V$ para todo $\sigma \geq \sigma^*$. Como V é uma vizinhança arbitrária de $f(x)$, segue que $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ converge para $f(x)$.

(c) $\rightarrow$ b)). Seja $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede que acumula em x . Então existe uma subrede $G = \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ que converge para x . Por hipótese, a rede $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ converge para $f(x)$. Em particular, $f(x)$ é ponto de acumulação de $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

A r que testemunha que G é subrede de S também testemunha que $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ é subrede de $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$, pois $f(y_\gamma) = f(x_{r(\gamma)})$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Como $f(x)$ é ponto de acumulação da subrede $\{f(y_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$, segue que $f(x)$ é ponto de acumulação da rede $\{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$.

(b) $\rightarrow$ a)). Suponhamos que f não é contínua em x . Então existe V uma vizinhança de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ não é vizinhança de x . Seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças de x com a ordem $U \geq V$ se e somente se $U \subseteq V$. Então $\mathcal{V}_x$ é um conjunto dirigido. Para cada $U \in \mathcal{V}_x$, fixe $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$ (o conjunto é não vazio por hipótese). Como visto anteriormente, temos que $\{x_U : U \in \mathcal{V}_x\}$ é uma rede convergente para x . Em particular, esta rede acumula em x . Porém $f(x_U) \notin V$, para todo $U \in \mathcal{V}_x$ (pois $x_U \notin f^{-1}(V)$). Assim x não é ponto de acumulação de $\{f(x_U) : U \in \mathcal{V}_x\}$. $\square$

7.4 Dualidade de Redes e Filtros.

Existe uma forma de passar de um filtro para uma rede e vice versa. Ela não ‘devolve’ a mesma coisa se começarmos de um rede para o filtro e do filtro para a rede, mas no caso de começar com uma rede com certa ‘cara’ para convergência/ponto de acumulação vamos encontrar um filtro com a mesma ‘cara’ e retornar para uma outra rede que tem a mesma ‘cara’, mas que pode ser diferente. Então a dualidade é sobre ‘as propriedades do objeto’ e não o objeto em si.

7.4.1 De redes para filtros.

Lema 7.14. Dada uma rede $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, o conjunto $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$ tem PIF e é base para um filtro.

Demonstração. Dado um número finito de elementos de $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$, estas vão estar associadas a um conjunto finito Σ' de Σ . Como Σ é dirigido, existe σ' tal que $\sigma' \geq \sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma'$. Então a intersecção contém $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma'\}$. $\square$

Usando o fato acima, podemos definir um filtro associado a uma rede:

Definição 7.15. Dada uma rede $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, o filtro dual de S é o filtro gerado pelo conjunto $\{\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} : \sigma^* \in \Sigma\}$.

7.4.2 De filtros para redes.

Para definirmos um filtro a partir de uma rede, iremos usar o fato que o filtro é um conjunto dirigido pelo contido.

Definição 7.16. Dado um filtro $\mathcal{F}$, seja $\Sigma = \{(F, x) \in \mathcal{F} \times X \text{ tal que } x \in F\}$ com a relação $(F, x) \geq (G, y)$ se $F \subseteq G$ (fica a cargo do leitor notar que Σ é um conjunto dirigido). A rede associada a $\mathcal{F}$ é a rede $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, onde $x_\sigma = x$ e $(F, x) = \sigma \in \Sigma$.

7.4.3 A dualidade de redes e filtros.

Teorema 7.17. Seja $\mathcal{F}$ um filtro e $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ a rede gerada por $\mathcal{F}$.

Seja $x \in X$. Então:

- 1) x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se e somente se x é ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.
- 2) x é limite de $\mathcal{F}$ se e somente se x é limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.

Demonstração. 1) Suponhamos que x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. Seja U uma vizinhança de x e $(G, y) \in \Sigma$. Como x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, segue que $G \cap U \neq \emptyset$. Tome $z \in G \cap U$. Então $(G, z) \in \Sigma$, $(G, z) \geq (G, y)$ e $x_{(G, z)} = z \in U$. Portanto x é ponto de acumulação da rede gerada por $\mathcal{F}$.

Suponhamos que x não é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. Então existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin \overline{G}$. Seja U uma vizinhança de x tal que $U \cap G = \emptyset$. Fixe $y \in G$. Então $(G, y) \in \Sigma$ e se $(H, z) \geq (G, y)$ com $(H, z) \in \Sigma$ então $x_{(H, z)} \in H \subseteq G \subseteq X \setminus U$. Portanto $x_{(H, z)} \notin U$ e x não é ponto de acumulação da rede gerada por $\mathcal{F}$.

2) Suponhamos que x é limite de $\mathcal{F}$. Seja U uma vizinhança de x . Como x é limite de $\mathcal{F}$, segue que $U \in \mathcal{F}$. Tome $z \in U$. Então $(U, z) \in \Sigma$. Para todo $(G, y) \geq (U, z)$ com $(G, y) \in \Sigma$ temos $x_{(G, y)} = y \in G \subseteq U$. Portanto x é limite da rede gerada por $\mathcal{F}$.

Suponhamos que x não é limite de $\mathcal{F}$. Então existe uma vizinhança U de x tal que $U \notin \mathcal{F}$. Tome $(G, y) \in \Sigma$. Como $U \notin \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é filtro, segue que $G \not\subseteq U$. Logo, existe $z \in G \setminus U$. Temos que $(G, z) \geq (G, y)$ e $x_{(G, z)} = z \notin U$. Como (G, z) é um elemento arbitrário de Σ , segue que U testemunha que a rede não converge para x . $\square$

Teorema 7.18. Seja $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ uma rede e seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $\mathcal{F}$.

Seja $x \in X$. Então:

- 1) x é ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ se e somente se x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.
- 2) x é limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ se e somente se x é limite de $\mathcal{F}$.

Demonstração. 1) Suponha que x é ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Para mostrarmos que x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, usando a propriedade de base de filtro, basta mostrar que $x \in \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}$ para todo $\sigma^* \in \Sigma$. Fixe σ^* e tome U uma vizinhança de x , como x é ponto de acumulação da rede, existe $\sigma \geq \sigma^*$ tal que $x_\sigma \in U$. Portanto $U \cap \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \neq \emptyset$. Portanto x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

Suponha que x não é ponto de acumulação de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Então existe uma vizinhança U de x e $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $x_\sigma \notin U$ para todo $\sigma \geq \sigma^*$. Logo, $U \cap \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} = \emptyset$. Portanto $x \notin \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}$, com $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \in \mathcal{F}$. Assim, x não é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

2) Suponha que x é limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Seja U uma vizinhança de x . Para provarmos que x é limite de $\mathcal{F}$, basta mostrar que $U \in \mathcal{F}$. Como a rede converge para x , existe σ^* tal que $x_\sigma \in U$ para todo $\sigma \geq \sigma^*$. Logo $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\}$ pertence a base do filtro gerado pela rede. Assim, $U \in \mathcal{F}$.

Suponha que x não é limite de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Então existe uma vizinhança U de x tal que para todo $\sigma^* \in \Sigma$ existe $\sigma \geq \sigma^*$ tal que $x_\sigma \notin U$. Assim, $\{x_\sigma : \sigma \geq \sigma^*\} \not\subseteq U$ para cada $\sigma^* \in \Sigma$. Assim, U não contém nenhum elemento da base que gera $\mathcal{F}$. Assim, $U \notin \mathcal{F}$. $\square$

Capítulo 8

Subespaços. Subespaços métricos. Subespaços e Ordem Linear.

8.1 A topologia nos ‘cacos’ de X .

8.1.1 Topologia de subespaço.

Os subespaços topológicos usam os fragmentos dos abertos de X que podem ser ‘vistas’ dentro do subespaço.

Definição 8.1. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$. Dizemos que Y é um subespaço topológico de X se Y é munida com a topologia $\{Y \cap U : U \in \tau\}$.

Em outras palavras, um subconjunto W de Y é aberto em Y se e somente se existe um aberto de X que intersectado a Y dá W .

Para ver que de fato temos uma topologia em Y , basta utilizar $Y \cap \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (Y \cap C)$ e $Y \cap \bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} (Y \cap C)$.

Proposição 8.2. Seja Z um subespaço de Y e Y um subespaço de X . Então Z é subespaço de X .

Demonstração. Além das igualdades acima, basta notar que para todo subconjunto A de X temos $A \cap Z = (A \cap Y) \cap Z$. $\square$

Vamos ver agora como ficam alguns objetos de X quando restritos a Y .

Lema 8.3. Seja Y um subespaço topológico de X .

- a) Se $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de X então $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ é uma base de abertos de Y .
- b) Se $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de X então $\{\{U \cap Y : U \in \mathcal{V}_y\} : y \in Y\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de Y .
- c) Se $\mathcal{C}$ é uma base de fechados de X então $\{F \cap Y : F \in \mathcal{C}\}$ é uma base de fechados de Y .
- d) Se $A \subseteq Y$ então $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

(Note que em b) ‘jogamos fora’ $\mathcal{V}_x$ se $x \notin Y$, mas isto não afeta a topologia de Y por que há uma relação entre os sistemas fundamentais de vizinhanças dos pontos). Uma pergunta reversa seria, se Y é denso, podemos recuperar a topologia de X usando um sistema fundamental de vizinhanças abertas de Y ?

Demonstração. Basta usar a intersecção em a) e b).

Para c), $\{X \setminus F : F \in \mathcal{C}\}$ é uma base de abertos de X . Portanto $\{Y \setminus F : F \in \mathcal{C}\} = \{Y \cap (X \setminus F) : F \in \mathcal{C}\}$ é uma base de abertos de Y . Logo, $\{Y \cap F : F \in \mathcal{C}\}$ é uma base de fechados de Y .

Para d), ambos os conjuntos estão em Y então fixe $x \in Y$. Então $x \in \overline{A}^X$ se e somente se $V \cap A \neq \emptyset$ para toda vizinhança de x em X se e somente se $(V \cap Y) \cap A \neq \emptyset$ (pois A é subconjunto de Y) se e somente se $W \cap A \neq \emptyset$ para toda vizinhança W de x em Y se e somente se $x \in \overline{A}^Y$. $\square$

8.1.2 Propriedades hereditárias.

Definição 8.4. Dizemos que uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ é hereditária se para todo X que tem $\mathcal{P}$ então todo subespaço de X tem $\mathcal{P}$.

Dizemos que uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ é hereditária para fechados se para todo X que tem $\mathcal{P}$ então todo subespaço fechado de X tem $\mathcal{P}$.

Dizemos que uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ é hereditária para abertos se para todo X que tem $\mathcal{P}$ então todo subespaço aberto de X tem $\mathcal{P}$.

Corolário 8.5. Os axiomas de separação T_0 , T_1 e T_2 são hereditários.

Demonstração. Basta usar as testemunhas do espaço intersectadas com o subespaço. $\square$

Corolário 8.6. O primeiro axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

O segundo axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

Exercício 8.7. Seja $i : Y \rightarrow X$ a função inclusão, onde $Y \subseteq X$. Verifique que a topologia inicial de i é a topologia de subespaço.

8.2 Subespaços e métrica.

Vamos ver agora que no caso de um espaço métrico, podemos recuperar a topologia do espaço usando as bolas de centro num denso e raio $\frac{1}{n}$ com $n > 0$.

8.2.1 A topologia da métrica do subespaço vs a topologia de subespaço do espaço métrico.

Exemplo 8.8. Seja X um espaço topológico gerado pela métrica d . Se Y é denso em X então as bolas centradas em pontos de Y formam uma base para X .

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bolas abertas centradas em pontos de Y com raio $\frac{1}{n}$ para alguma inteiro positivo n . Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de X .

Seja $x \in X$ e U um aberto de X . Fixe $n > 0$ natural tal que $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Tome $m > 0$ natural positivo tal que $\delta = \frac{1}{m}$ satisfaz $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como Y é denso e $B(x, \delta) \neq \emptyset$, existe $y \in Y$ tal que $y \in B(x, \delta)$. Logo, temos que $x \in B(y, \delta)$ (pela simetria da métrica d) e $B(y, \delta) \in \mathcal{B}$. Basta agora mostrar que $B(y, \delta) \subseteq U$. De fato, se $z \in B(y, \delta)$, então pela desigualdade triangular, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \delta + \delta \leq \epsilon$. Assim, $z \in B(x, \epsilon) \subseteq U$. Como z é arbitrário segue que $B(y, \delta) \subseteq U$. $\square$

Note que é importante que tomemos bolas de mesmo tamanho para termos uma base de abertos. Por exemplo se fixarmos uma sequência positiva convergindo para 0 e só tomar bolas com raios desta sequência, ainda teremos uma base de abertos. Mas, se tomarmos para cada ponto do denso uma sequência de bolas centradas que encolhem arbitrariamente, este conjunto de bolas não precisa ser base.

Corolário 8.9. Seja Y um subespaço de X com a topologia gerada por uma métrica. A topologia de Y como subespaço topológico de X coincide com a topologia de Y como subespaço métrico.

Demonstração. As bolas centradas em pontos de X formam uma base de X , assim, as bolas centradas em pontos de Y intersectadas com Y que formam uma base do subespaço topológico, coincidem com as bolas abertas de Y centradas em pontos de Y que formam uma base da topologia gerada pela métrica em Y . $\square$

Corolário 8.10. Se X é um espaço métrico então X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se e somente se X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Já vimos que um espaço topológico que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro. Se X é métrico e satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, então X possui um denso enumerável e vimos acima que uma quantidade enumerável de bolas centradas em cada ponto do denso formam uma base. Como essa base é enumerável, segue que X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. $\square$

8.2.2 Axiomas da enumerabilidade em subespaços não métricos.

Corolário 8.11. A topologia da reta de Sorgenfrey não provém de uma métrica.

Demonstração. Vimos anteriormente que a reta de Sorgenfrey satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade, mas não satisfaz o segundo, assim, sua topologia não pode ser provida por uma métrica. $\square$

Corolário 8.12. Se X é um espaço métrico que satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade e Y é um subespaço de X então Y satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Como visto anteriormente, neste caso, X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Assim, Y também satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Além disso, um espaço que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. $\square$

Vamos ver agora que o terceiro axioma da enumerabilidade não é necessariamente preservada por subespaços.

Exemplo 8.13. Seja X o conjunto dos reais. Para cada x irracional, fixe uma sequência convergente de racionais $\{q_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$. Considere o seguinte sistema de vizinhanças fundamentais: se x é racional, tome $\mathcal{V}_x = \{\{x\}\}$ e se x é irracional, considere $\mathcal{V}_x = \{\{q_{x,n} : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$. Temos que este é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para um topologia, pois $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ e $x \in U$ para todo $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_x$. Assim $BL1)$ está satisfeita.

Dado x , se U e V são elementos de $\mathcal{V}_x$ então um está contido no outro assim a intersecção está em $\mathcal{V}_x$ e $BL2)$ está satisfeita.

Finalmente, tome $x \in X$, $U \in \mathcal{V}_x$ e $y \neq x$ tal que $y \in U$.

Se x é racional então $BL3)$ está trivialmente satisfeita por que $U = \{x\}$. Se x é irracional então y será racional e $\{y\} \in \mathcal{V}_y$ e $BL3)$ está satisfeita.

Cada unitário de racional é aberto, assim o conjunto dos racionais é aberto e o subconjunto Y dos irracionais é fechado. Claramente, todo aberto no sistema fundamental de vizinhanças abertas contém um racional, assim X satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Para cada $x \in Y$ e $U \in \mathcal{V}_x$, temos que $U \cap Y = \{x\}$. Assim, no subespaço Y todo unitário é aberto. Assim, Y é um subespaço discreto não enumerável. Portanto o único subconjunto denso de Y é Y , Assim, Y não satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Este tipo de topologia, com outra notação é chamado de Ψ -espaço, espaço de Moore-Mrówka ou espaço de Mrówka.

Exemplo 8.14. O plano de Niemytzky também é um espaço com conjunto enumerável denso (o conjunto dos pares de racionais dentro do semiplano superior) em que o eixo das abscissas é fechado e discreto não enumerável.

Exemplo 8.15. Note que satisfazer o terceiro axioma da enumerabilidade não é uma propriedade hereditária para fechados, mas é uma propriedade hereditária para abertos.

Ser metrizável é uma propriedade hereditária pelo que vimos nesta secção. Veremos eventualmente que ser ordenável não é uma propriedade hereditária.

8.3 Imersão e ordem linear. Cortes de Dedekind.

Dado um conjunto linearmente ordenado X . Sobre um subconjunto Y de X podemos considerar duas topologias: a topologia da ordem restrita a Y e a topologia de subespaço de X com a topologia da ordem de X .

Definição 8.16. Dizemos que Y é espaço topológico subordinado se existe um espaço ordenado X em que Y é subespaço topológico.

Proposição 8.17. Dado $Y \subseteq X$ e X um espaço ordenado, a topologia de subespaço de Y é mais fina que a topologia de Y com a ordem restrita a Y .

Demonstração. Os elementos da subbase do espaço ordenado Y são $\{z \in Y : z < y\} = \{z \in X : z < y\} \cap Y$ e $\{z \in Y : z > y\} = \{z \in X : z > y\} \cap Y$ que são abertos na topologia de subespaço de Y . $\square$

Exemplo 8.18. Seja $X = [0, 1[\cup \{2\}$. A topologia de X como espaço ordenado é homeomorfa ao intervalo $[0, 1]$ e em particular 2 é ponto de acumulação de $[0, 1[$. O conjunto X como subespaço de $\mathbb{R}$ tem $\{2\}$ como ponto isolado.



ordem e subespaco.jpg

Figura 8.1: O subespaço de um espaço ordenado não precisa ser igual ao espaço gerado pela sub-ordem.

Exemplo 8.19. Considere $X = \mathbb{R}$ com a ordem linear usual e $\{0, 1\}$ com a ordem usual dos naturais. Defina $(r, i) <_2 (s, j)$ se $(r < s)$ ou $(r = s \text{ e } i < j)$. Então $<_2$ é uma ordem linear sobre X e a topologia de subespaço sobre $Y = \mathbb{R} \times \{1\}$ é homeomorfa a topologia de Sorgenfrey.

Os elementos da subbase de Y como subespaço de X são $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 0)\} \cap Y$, $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 1)\} \cap Y$, $\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 0)\} \cap Y$ e $\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 1)\} \cap Y$.

Agora, $\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 0)\} \cap Y =]-\infty, s[\times \{1\}$ (como 0 é mínimo na segunda coordenada todos os menores elementos com segunda coordenada 1 tem primeira coordenada menor que s).

$\{(r, j) \in X : (r, j) < (s, 1)\} \cap Y =]-\infty, s[\times \{1\}$ (todos os elementos de Y tem segunda coordenada 1 assim, a primeira coordenada tem que ser menor que s).

$\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 0)\} \cap Y = [s, +\infty[\times \{1\}$ (o único elemento com primeira coordenada s maior que $(s, 0)$ é $(s, 1)$, os outros elementos maiores que $(s, 0)$ tem primeira coordenada maior que s).

$\{(r, j) \in X : (r, j) > (s, 1)\} \cap Y =]s, +\infty[\times \{1\}$ (todos os elementos de Y tem segunda coordenada 1 assim, os elementos de Y maiores que $(s, 1)$ tem primeira coordenada maior que s).

Todos os intervalos da subbase da cópia da topologia de Sorgenfrey aparecem acima. Assim, a topologia de subespaço é mais fina que a da topologia de Sorgenfrey.

Apenas o quarto tipo de intervalo não aparece na subbase da cópia da topologia de Sorgenfrey, mas é um aberto na topologia de Sorgenfrey, pois $]s, +\infty[\times \{1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n > 0} [s + \frac{1}{n}, +\infty[\times \{1\}$. Assim a topologia de Sorgenfrey é mais fina que a topologia de subespaço.

Assim, a topologia de subespaço de Y é homeomorfa a topologia de Sorgenfrey.

A topologia da ordem sobre $\mathbb{R} \times \{1\}$ é homeomorfa a topologia usual da reta. De fato, $(r, 1) <_2 (s, 1)$ se e somente se $r < s$.

Note que no exemplo acima, para todo r real, não existe $(s, j) \in X$ tal que $(r, 0) <_2 (s, j) <_2 (r, 1)$.

Definição 8.20. Dizemos que $\langle X, < \rangle$ é denso em si mesmo se para todo $x < y$ em X existe $z \in X$ tal que $x < y < z$.

O conjunto dos reais, o conjunto dos irracionais e o conjunto dos racionais são conjuntos densos em si mesmo.

Teorema 8.21. Seja X um espaço ordenado, onde sua ordem linear é densa em si mesmo. Seja Y um subconjunto denso de X . Então a topologia de Y como subespaço de X coincide com a topologia da ordem sobre Y .

Demonstração. Já vimos que a topologia de subespaço sobre Y é mais fina que a topologia da ordem sobre Y .

Vamos mostrar então que os elementos da subbase do subespaço são abertos na topologia da ordem. Os abertos da subbase da topologia de subespaço são $\{y \in X : y < x\} \cap Y$ e $\{y \in X : y > x\} \cap Y$.

Afirmamos que $\{y \in X : y < x\} = \bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}$. De fato, como a ordem é linear, temos que $\supseteq$ está satisfeita. Para mostrar $\subseteq$, tome $y < x$. Como X é densa em si mesma, segue que $]y, x[$ é um intervalo não vazio. Como Y é denso em X , segue que existe $z \in]y, x[\cap Y$. Assim, $y < z < x$ e $y \in \bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}$.

De forma análoga, temos que $\{y \in X : y > x\} = \bigcup_{z > x, z \in Y} \{y \in X : y > z\}$.

Portanto $\{y \in X : y < x\} \cap Y = (\bigcup_{z < x, z \in Y} \{y \in X : y < z\}) \cap Y = \bigcup_{z < x, z \in Y} (\{y \in X : y < z\} \cap Y) = \bigcup_{z < x, z \in Y} (\{y \in Y : y < z\})$. A última reunião é um aberto na topologia da ordem de Y . Analogamente, podemos concluir que $\{y \in X : y > x\} \cap Y$ é aberto na topologia da ordem de Y . Assim, a topologia da ordem em Y é mais fina que a topologia de subespaço de X . $\square$

Um subespaço denso ser denso em si mesmo não garante que o espaço seja denso em si mesmo.

Exemplo 8.22. O conjunto linearmente ordenado $X = [0, e] \cup [\pi, 4]$ não é denso em si mesmo, mas como e e π são irracionais, temos que $X \cap \mathbb{Q}$ é denso em si mesmo.

O complemento de $\mathbb{Q}$ usando cortes de Dedekind pode ser feito para todo conjunto linear Y denso em si mesmo sem ponto máximo ou mínimo. A ordem obtida também é densa em si mesma, sem máximo ou mínimo. A topologia de Y como subespaço coincidirá com a topologia original de Y dada pela ordem.

Exercício 8.23. Seja Y um espaço linear denso em si mesmo sem máximo ou mínimo. Um corte para Y é um conjunto $A \subseteq Y$ tal que

- 1) $A \subseteq Y$, $A \neq \emptyset$ e $A \neq Y$.
- 2) se $x < y$ e $y \in A$ então $x \in A$.
- 3) A não tem máximo, ou seja para todo $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $x < y$.

Seja X o conjunto dos cortes de Dedekind de Y .

Mostre que os cortes estão linearmente ordenados por $\subseteq$, que y pode ser identificado com o corte $\{x \in Y : x < y\}$, que X é denso em si mesmo e que para todo $C \subseteq X$ não vazio, $\bigcup C = Y$ ou $\bigcup C$ é um corte e neste segundo caso $\bigcup C$ é o supremo de C na ordem do $\subseteq$.

Capítulo 9

Espaços regulares. Produto finito. Pseudométricas contínuas.

9.1 Separando pontos e fechados. Regularidade.

Uma outra pergunta natural seria, podemos recuperar a topologia de X apenas usando os pontos de um subconjunto denso Y ?

Como vimos anteriormente, podemos sempre recuperar $\bar{U}$ para U aberto usando um denso, pois $\bar{U} = \overline{U \cap Y}$. Além disso $U \subseteq \bar{U}$, portanto $\bar{U}$ é uma vizinhança de x . A questão aqui é se o fecho não torna os conjuntos com interior muito grande, ou seja $\{\bar{U} : U \text{ vizinhança aberta de } x\}$ é uma base local para x ?

Para isto, é necessário que para toda vizinhança V de x , existe U vizinhança aberta de x tal que $\bar{U} \subseteq V$. Para termos isto iremos definir regularidade.

Definição 9.1. Um espaço X é regular se para todo ponto $x \in X$ e todo aberto U contendo x , existe V aberto contendo x tal que $\bar{V} \subseteq U$.

Vamos ver algumas condições equivalentes a regularidade.

Lema 9.2. Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{C}$ uma sub-base de fechados, $\mathcal{B}$ uma sub-base de abertos e $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ um sistema fundamental de vizinhanças de X . São equivalentes:

- 1) X é regular
- 2) para todo $x \in X$ e todo F fechado tal que $x \notin F$ então existem W e V abertos disjuntos tais que $x \in V$ e $F \subseteq W$.
- 3) se $\mathcal{C}$ é uma subbase de fechados e $x \notin F$ com $F \in \mathcal{C}$ então existe U aberto contendo x tal que $\bar{U} \cap F = \emptyset$.
- 4) se $\mathcal{C}$ é uma subbase de fechados e $x \notin F$ com $F \in \mathcal{C}$ então existe W aberto tal que $F \subseteq W$ e $x \notin \bar{W}$.
- 5) se $\mathcal{B}$ é uma subbase de abertos, e $x \in U$ com $U \in \mathcal{B}$ então existe V aberto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$;
- 6) para todo $x \in X$ e todo $W \in \mathcal{V}_x$ existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $\bar{U} \subseteq W$.

Demonstração. 1) $\rightarrow$ 2). Seja $x \in X$ e F um fechado tal que $x \notin F$ então $X \setminus F$ é um aberto contendo x . Pela regularidade de X segue que existe V aberto tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus F$. Tome $W = X \setminus \bar{V}$. Então temos $x \in V$, $F \subseteq X \setminus \bar{V} = W$ e $V \cap W = V \cap (X \setminus \bar{V}) \subseteq V \cap (X \setminus V) = \emptyset$.

2) $\rightarrow$ 3). Seja $x \notin F$ com $F \in \mathcal{C}$. Então existem abertos U e V disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$. Assim $\bar{U} \subseteq X \setminus V$, pois $U \subseteq X \setminus V$ e $X \setminus V$ é fechado. Assim, $\emptyset = \bar{U} \cap V \supseteq \bar{U} \cap F$. Portanto $\bar{U} \cap F = \emptyset$.

3) $\rightarrow$ 4). Temos que $\bar{U} \cap F = \emptyset$ se e somente se $F \subseteq X \setminus \bar{U} = (X \setminus U)^\circ$. Então $W = (X \setminus U)^\circ \subseteq X \setminus U$. Portanto $W \cap U = \emptyset$ e $x \notin \bar{W}$.

4) $\rightarrow$ 5). Tome $x \in U$ com $U \in \mathcal{B}$. Então $x \notin X \setminus U$. Como $\mathcal{C}$ é uma subbase, existem $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C_1 \cup \dots \cup C_k$ e $C_1 \cup \dots \cup C_k \supseteq X \setminus U$. Para cada C_i , existe W_i aberto tal que $C_i \subseteq W_i$ e $x \notin \bar{W}_i$. Tome $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$. Então $x \notin \bar{W} = \overline{W_1 \cup \dots \cup W_n}$. Seja $V = X \setminus \bar{W}$. Então $x \in V = X \setminus \bar{W} = \text{Int}(X \setminus W) \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k) \subseteq U$.

Regularidade

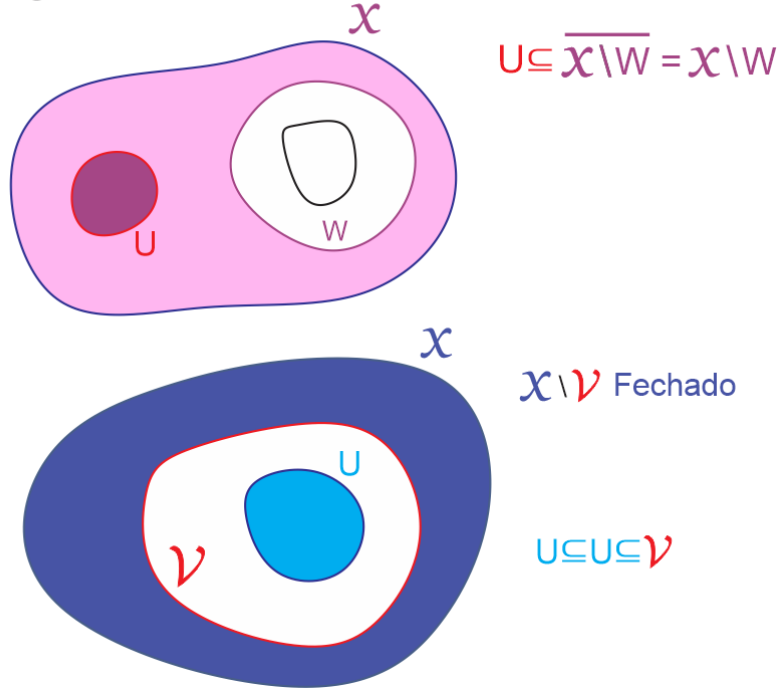


Figura 9.1: Espaços regulares.

5) $\rightarrow$ 6). Seja $W \in \mathcal{V}_x$. Como W é vizinhança de x e $\mathcal{B}$ é subbase de abertos, existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $x \in \bigcap \mathcal{B}' \subseteq W$. Para cada $O \in \mathcal{B}'$ existe V_O aberto contendo x tal que $\overline{V_O} \subseteq O$. Seja $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} V_O$. Então $\overline{U} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} \overline{V_O} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{B}'} O \subseteq \bigcap \mathcal{B}' \subseteq W$.

6) $\rightarrow$ 1). Seja $x \in U$ com U aberto. Como $\mathcal{V}_x$ é sistema fundamental de vizinhanças de x existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subseteq U$. Por hipótese, existe $O \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{O} \subseteq V$. Tome $W = \overset{\circ}{O}$. Então $x \in W \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq V \subseteq U$. Como x é arbitrário, temos que X é regular. $\square$

A última condição é as vezes referida como ‘ X é regular em x ’.

Definição 9.3. Dizemos que U é um aberto regular se $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$.

Definição 9.4. Dizemos que F é um fechado regular se $\overline{\overline{F}} = F$.

Proposição 9.5. Um conjunto F é fechado regular se e somente se $X \setminus F$ é um aberto regular. Um espaço possui uma base de fechados regulares se e somente possui uma base de abertos regulares.

Demonstração. As relações valem das relações de complementações de fechos e interior. $\square$

Teorema 9.6. Um espaço regular X possui uma base de abertos regulares.

Demonstração. Seja x um ponto e U um aberto contendo x . Então existe um aberto V tal que $x \in \overline{V} \subseteq U$. Então $\overset{\circ}{\overline{V}}$ é um aberto regular tal que $x \in \overset{\circ}{\overline{V}} \subseteq U$ (pois $\overset{\circ}{\overline{V}} = \overset{\circ}{\overline{V}}$). Assim os abertos regulares formam uma base. $\square$

Corolário 9.7. Seja X um espaço regular e D é um subconjunto denso de X . Então $\{\overset{\circ}{A} : \emptyset \neq A \subseteq D\}$ é uma base de abertos para X .

Demonstração. Vimos que os abertos regulares formam uma base. Agora para cada aberto regular U , temos que $\overline{U \cap D} = \overline{U} = U$ e $U \cap D \subseteq D$. $\square$

Definição 9.8. Um espaço regular e T_1 é chamado de espaço T_3 .

Lema 9.9. Um espaço T_3 é T_2 .

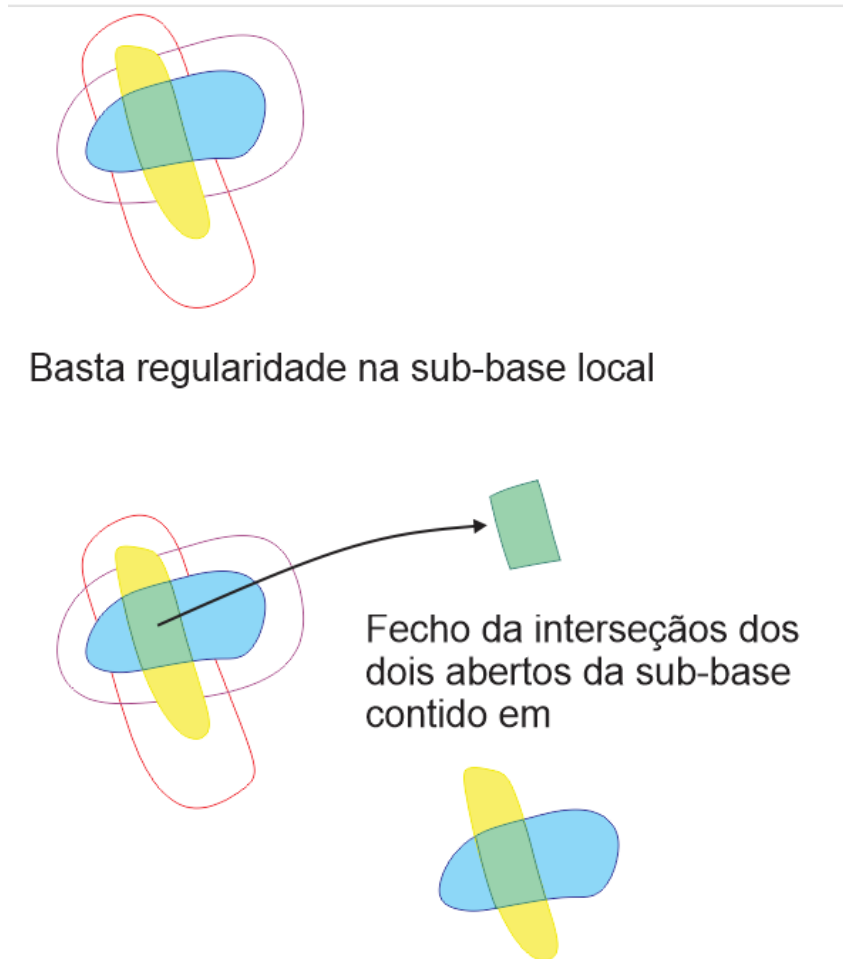


Figura 9.2:

Demonstração. Se um espaço é T_1 então os pontos são fechados. Assim, num espaço T_3 , existe um aberto que separa o ponto do unitário do outro ponto por abertos disjuntos. Assim o espaço satisfaz T_2 . $\square$

Vamos ver um exemplo de espaço Hausdorff que não é regular.

Exemplo 9.10. Seja X o conjunto dos reais e $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Para cada $x = 0$ seja $\mathcal{V}_x = \{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus S : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Para cada $x \neq 0$ seja $\mathcal{V}_x = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Temos um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia mais fina do que a da topologia de $\mathbb{R}$. Claramente esta topologia é Hausdorff e o conjunto dos racionais formam um conjunto denso. O fecho de S na topologia usual é conjunto $S \cup \{0\}$, mas na topologia mais fina, $0 \notin \overline{S}^X$. Assim, S é fechado em X . Dado W um aberto contendo S , para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ existe um irracional ξ_n tal que ξ_n e $\frac{1}{n}$ distam menos que $\frac{1}{n}$. Assim, ξ_n converge para 0 em $\mathbb{R}$, mas também convergem para 0 em X . Assim, $0 \in \overline{W}^X$. Logo, X não é regular.

Vamos mostrar que na verdade X não possui uma base de abertos regulares no 0. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$. O fecho do conjunto $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus S$ é $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ e o interior de $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ é $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Logo, nenhum aberto regular contendo 0 está contido em $X \setminus S$.

Proposição 9.11. Regularidade é uma propriedade hereditária.

Demonstração. Seja $Y \subset X$ com X regular. Se $x \notin F$ em Y com F fechado em Y então $x \notin \overline{F}^X$. Pela regularidade de X existem U e V abertos em X tal que $x \in U$, $\overline{F}^X \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. Então $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos de Y tal que $x \in U \cap Y$, $F = \overline{F}^X \cap Y \subseteq V \cap Y$ e $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. $\square$

9.2 Produto topológico finito.

Num produto de dois espaços topológicos, o mais natural como um aberto no produto de ambos é pensar num retângulo com base um aberto do primeiro espaço e altura um aberto do segundo espaço. Não podemos esperar que todos os abertos sejam retângulos. Não existe métrica para pensarmos em definir ‘discos’.

Definição 9.12. Dado uma família finita de espaços topológicos $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$, a topologia produto sobre $\prod_{i=1}^n X_n$ é a topologia gerada pela base $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \tau_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$. Abertos deste tipo são chamados de abertos básicos da topologia produto.

Note que o conjunto acima satisfaz as propriedades para ser base de uma topologia, pois, $(\prod_{i=1}^n U_i) \cap (\prod_{i=1}^n V_i) = \prod_{i=1}^n (U_i \cap V_i)$.

Lema 9.13. Fixe uma família finita de espaços topológicos $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$.

1) se $\mathcal{B}_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ é uma base de abertos então $\mathcal{B} = \{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ é uma base para a topologia produto. Em particular $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^n \{U_j \times \prod_{i \neq j} X_i : U_j \in \mathcal{B}_j\}$ é uma subbase de abertos.

2) Seja $x_i \in X_i$ e $\mathcal{V}_{x_i}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Então $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{V}_{x_i} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $(x_i : 1 \leq i \leq n)$.

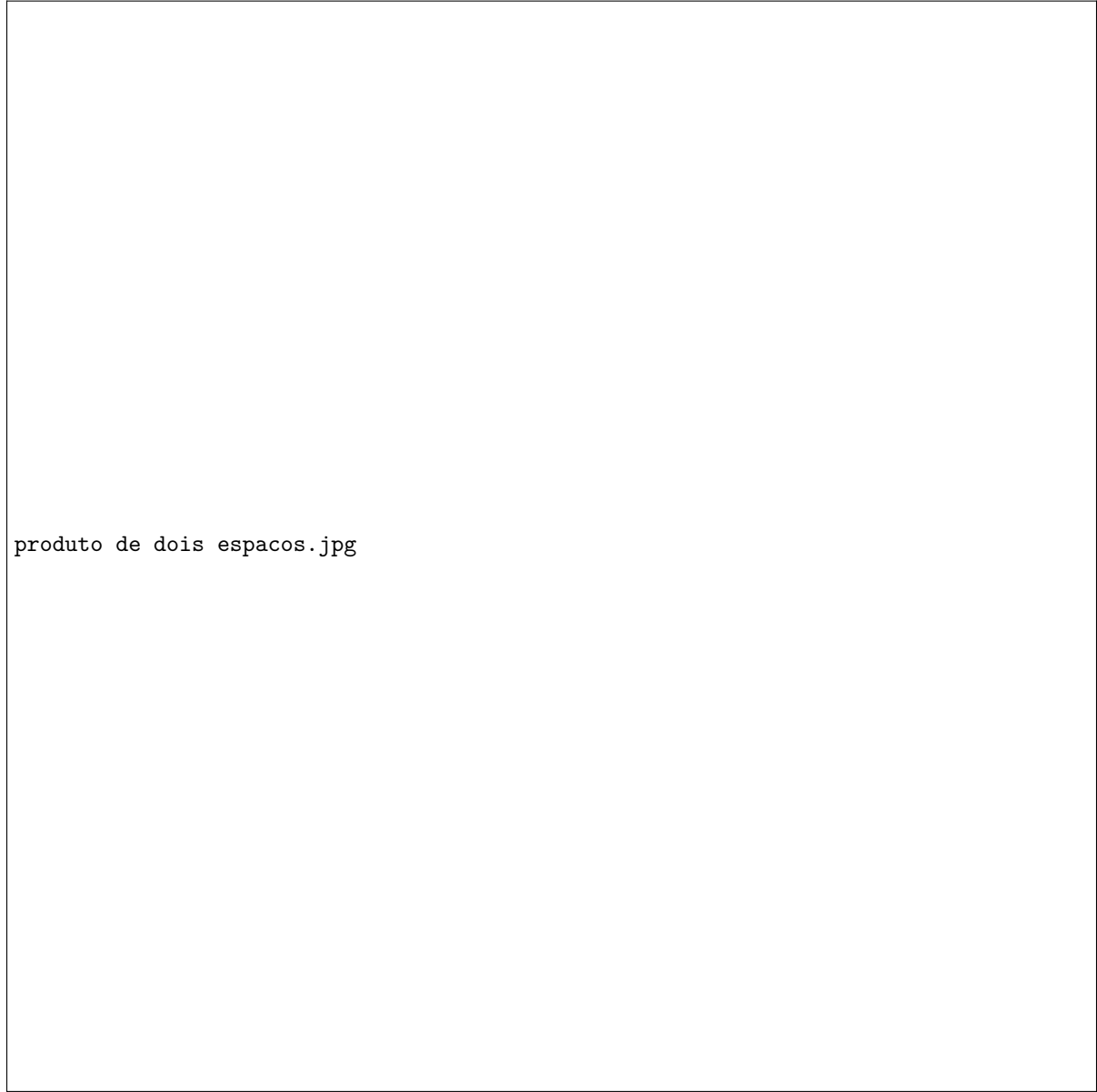
Demonstração. 1) Seja $(x_i : 1 \leq i \leq n)$ um ponto de $\prod_{i=1}^n X_n$ e W um aberto arbitrário de $\prod_{i=1}^n X_n$. Pela definição de topologia produto, existem $U_i \in \tau_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n U_i \subseteq W$. Como $\mathcal{B}_i$ é base para X_i , existe $V_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $x_i \in V_i \subseteq U_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Então $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n V_i \subseteq \prod_{i=1}^n U_i \subseteq W$. Assim, $\mathcal{B}$ é uma base.

Para ver que $\mathcal{S}$ é uma sub-base, basta aplicar $\bigcap_{j=1}^n (U_j \times \prod_{i \neq j} X_i) = \prod_{i=1}^n U_i$.

2) A demonstração é similar a de 1). $\square$

Corolário 9.14. O produto finito de espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

O produto finito de espaços que satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.



produto de dois espacos.jpg

Figura 9.3: Um aberto básico de um produto de dois espacos.

Lema 9.15. Fixe uma família finita de espaços topológicos $\{\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle\}$ e bases de fechados $\mathcal{C}_i$ de X_i para $1 \leq i \leq n$.

Temos que $\prod_{i=1}^n C_i$ é fechado se C_i é fechado em X_i para todo $1 \leq i \leq n$ e a família $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^n \{F_j \times \prod_{i \neq j} X_i : F_j \in \mathcal{C}_j\}$ é uma sub-base de fechados para a topologia produto.

Demonstração. Note que $\prod_{i=1}^n X_i \setminus (C_j \times \prod_{i \neq j} X_i) = (X_j \setminus C_j) \times \prod_{i \neq j} X_i$ e o conjunto à direita é um aberto. Portanto, $C_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ é um fechado. Como $\prod_{i=1}^n C_i = \bigcap_{j=1}^n (C_j \times \prod_{i \neq j} X_i)$ e a intersecção de fechados é fechada temos que $\prod_{i=1}^n C_i$ é um fechado. Basta notar que $\{\prod_{i=1}^n X_i \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma sub-base de abertos usando as sub-bases de abertos $\{X_i \setminus F : F \in \mathcal{C}_i\}$, pois $\mathcal{C}_i$ é uma base de fechados de X_i . Logo $\mathcal{F}$ é uma sub-base de fechados. $\square$

Proposição 9.16. Se $A_i \subseteq X_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, então $\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$.

Demonstração. Seja $x_i \in X_i$ e $\mathcal{V}_{x_i}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Então $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \overline{\prod_{i=1}^n A_i}$ se e somente se $\prod_{i=1}^n U_i \cap \prod_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ para cada $U_i \in \mathcal{V}_{x_i}$ e $1 \leq i \leq n$ (usando o fato que $\{\prod_{i=1}^n U_i : U_i \in \mathcal{V}_{x_i} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de

$(x_i : 1 \leq i \leq n)$ se e somente se $\prod_{i=1}^n (U_i \cap A_i) \neq \emptyset$ se e somente se $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq n$ se e somente se $x_i \in \overline{A_i}$ para $1 \leq i \leq n$ se e somente se $(x_i : 1 \leq i \leq n) \in \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$. $\square$

Corolário 9.17. Se D_i é denso em X_i para $1 \leq i \leq n$ então $\prod_{i=1}^n D_i$ é denso em $\prod_{i=1}^n X_i$. O produto finito de espaços que satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma da enumerabilidade.

Proposição 9.18. Dada uma $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ funções contínuas, a função $f = \prod_{i=1}^n f_i : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \prod_{i=1}^n Y_i$ dada por $(x_i : 1 \leq i \leq n) \mapsto (f_i(x_i) : 1 \leq i \leq n)$ é uma função contínua.

Demonstração. Seja $\prod_{i=1}^n U_i$ um aberto básico de $\prod_{i=1}^n Y_i$. Temos que $f^{-1}[\prod_{i=1}^n U_i] = \prod_{i=1}^n f_i^{-1}[U_i]$ que é um aberto básico de $\prod_{i=1}^n X_i$. Assim f é uma função contínua. $\square$

Deixaremos para provar alguns resultados de produtos para quando definirmos a topologia produto para um produto arbitrário de espaços topológicos.

A seguir iremos falar de pseudométricas contínuas e de grupos topológicos cuja definições dependem do produto no quadrado. O objetivo aqui é usar essas noções como exemplos que utilizam a continuidade no quadrado e por isso não faremos comentários sobre os diversos exemplos de grupos topológicos existentes. Todo grupo é um grupo topológico munido com a topologia discreta.

9.3 Pseudométricas contínuas.

9.3.1 Relacionando funções com pseudométricas,

Definição 9.19. Dizemos que ρ é uma pseudométrica em X se $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

- 1) $\rho(x, x) = 0$ e $\rho(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. ($\rho(x, y)$ pode ser 0 com $x \neq y$).
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Ou seja, a única diferença entre métricas e pseudométricas é que a distância de dois pontos numa pseudométrica pode ser 0. A noção de pseudométrica acaba sendo útil para falar sobre espaços completamente regulares que veremos futuramente.

Definição 9.20. Dada uma pseudométrica ρ , a topologia gerada por ρ é dada pela base de bolas abertas $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X \text{ e } \epsilon > 0\}$.

Para mostrar que a interseção de duas bolas é reunião de bolas, basta usar a desigualdade triangular como no caso da métrica. Note que se a distância de dois pontos é 0 então as bolas de mesmo raio centradas nelas são iguais.

Definição 9.21. Dado uma pseudométrica $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ e X um espaço topológico, dizemos que ρ é uma pseudométrica contínua em X se ρ é contínua com $X \times X$ tem a topologia produto e $\mathbb{R}$ tem a topologia usual da reta.

Proposição 9.22. Seja ρ uma pseudométrica sobre X e considere τ um espaço topológico cuja topologia é mais fina do que a topologia τ_ρ gerado por uma pseudométrica.

Então $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, onde $X \times X$ é munido com a topologia produto, onde X está com a topologia τ .

Demonstração. Seja $(x, y) \in X \times X$ e tome um $\epsilon > 0$. Seja $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Então, dado $(a, b) \in B_\rho(x, \delta) \times B_\rho(y, \delta)$ temos $\rho(a, b) - \rho(x, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) - \rho(x, y) = \rho(a, x) + \rho(y, b)$ e $\rho(x, y) - \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) - \rho(a, b) = \rho(x, a) + \rho(b, y) = \rho(a, x) + \rho(y, b)$. Assim $|\rho(a, b) - \rho(x, y)| \leq \rho(a, x) + \rho(y, b)$ e $\rho[B_\rho(x, \delta) \times B_\rho(y, \delta)] \subseteq]\rho(x, y) - \epsilon, \rho(x, y) + \epsilon[$. Logo ρ é contínua. $\square$

Proposição 9.23. Seja X um espaço topológico e ρ é uma pseudométrica contínua em X . Então as bolas abertas de ρ são abertas em X . Assim, a topologia gerada por ρ é menos fina do que a topologia de X .

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $x \in X$. Tome $y \in B_\rho(x, \epsilon)$. Seja $\delta = \frac{\epsilon - \rho(x, y)}{2}$.

Como ρ é contínua em (x, y) existe um aberto $U \times V$ contendo (x, y) tal que $\rho[U \times V] \subseteq]\rho(x, y) - \delta, \rho(x, y) + \delta[$. Em particular, para $z \in V$ temos que $(x, z) \in U \times V$. Logo, $\rho(x, z) \in]\rho(x, y) - \delta, \rho(x, y) + \delta[$. Portanto $|\rho(x, z) - \rho(x, y)| < \delta$. Com isto $\rho(x, z) = |\rho(x, z) - \rho(x, y) + \rho(x, y)| \leq |\rho(x, z) - \rho(x, y)| + |\rho(x, y)| < \delta + \rho(x, y) < \epsilon$ e $V \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. Como $y \in B_\rho(x, \epsilon)$ é arbitrário e $y \in V \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$, segue que $B_\rho(x, \epsilon)$ é aberto em X . $\square$

Proposição 9.24. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então $\rho_f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ é uma pseudométrica. Se f é contínua então a topologia gerada por ρ_f é menos fina do que a topologia de X e ρ_f é uma pseudométrica contínua em X .

Demonstração. Primeiro, vamos verificar que ρ é uma pseudométrica. De fato, $\rho_f(x, x) = |f(x) - f(x)| = 0$. $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \rho_f(y, x) \geq 0$. Assim, as condições 1) e 2) estão satisfeitas. Finalmente, $\rho_f(x, z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \rho_f(x, y) + \rho_f(y, z)$, assim a condição 3) de pseudométrica está satisfeita.

Suponha que X é um espaço topológico e f é contínua. Já vimos em produtos finitos que $f \times f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (tal que $(x, y) \mapsto (f(x), f(y))$) é contínua. A função $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(a, b) \mapsto |a - b|$ é contínua. Assim a composta $h \circ (f \times f) = \rho_f$ é uma função contínua. Foi visto acima que, como ρ_f é contínua em X , a topologia gerada por ρ_f é menos fina do que a topologia de X . $\square$

Capítulo 10

Topologias geradas por pseudométricas. Grupos topológicos.

10.1 Topologia geradas por pseudométricas.

Definição 10.1. Dada uma família de pseudométricas $\mathcal{R}$ sobre o conjunto X dizemos que a topologia gerada pelas pseudométricas em $\mathcal{R}$ é a topologia gerada pela sub-base de abertos $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R} \text{ e } \epsilon > 0\}$.

Proposição 10.2. A topologia gerada pelas pseudométricas $\{\rho_1, \rho_2\}$ coincide com a topologia gerada pela pseudométrica $\rho = \rho_1 + \rho_2$

Demonstração. Primeiro, note que ρ é uma pseudométrica usando o fato que ela é a soma de duas pseudométricas.

($\leftarrow$). Fixe um ponto x e $\epsilon > 0$. Então $B_\rho(x, \epsilon) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon)$. De fato, se $z \in B_\rho(x, \epsilon)$ então $\rho(x, z) = \rho_1(x, z) + \rho_2(x, z) < \epsilon$. Assim, $\rho_1(x, z) < \epsilon$ e $\rho_2(x, z) < \epsilon$.

Vamos mostrar que $B_{\rho_1}(x, \epsilon)$ é ρ -aberta. De fato, se $y \in B_{\rho_1}(x, \epsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\rho_1}(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon)$. Logo, $y \in B_\rho(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(y, \delta) \subseteq B_{\rho_1}(x, \epsilon)$. Assim, $B_{\rho_1}(x, \epsilon)$ é ρ -aberto. Analogamente, temos que $B_{\rho_2}(x, \epsilon)$ é ρ -aberto. .

($\rightarrow$). Por outro lado, se $z \in B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon)$ então $\rho(x, z) = \rho_1(x, z) + \rho_2(x, z) < 2\epsilon$. Portanto $B_{\rho_1}(x, \epsilon) \cap B_{\rho_2}(x, \epsilon) \subseteq B_\rho(x, 2\epsilon)$. Assim, dado $y \in B_\rho(x, \epsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\rho(y, 2\delta) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. Então $y \in B_{\rho_1}(y, \delta) \cap B_{\rho_2}(y, \delta) \subseteq B_\rho(y, 2\delta) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. Assim, $B_\rho(x, \epsilon)$ é aberta na topologia gerada por $\{\rho_1, \rho_2\}$, $\square$

Corolário 10.3. Dada uma família de pseudométricas $\mathcal{R}$, existe uma família de pseudométricas $\mathcal{R}^*$ que gera a mesma topologia que $\mathcal{R}$ e tal que $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R}^* \text{ e } \epsilon > 0\}$ é uma base para a topologia.

Demonstração. Seja $\mathcal{R}^* = \{\rho_1 + \dots + \rho_n : \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{R}\}$. Então as topologia geradas por ambas são as mesmas e para cada ponto $x \in X$ e uma intersecção finita de elementos de $\{B_\rho(x, \epsilon) : x \in X, \rho \in \mathcal{R} \text{ e } \epsilon > 0\}$ que contém x utiliza uma quantidade finita de pseudométricas. A pseudométrica ρ que é a soma dessas pseudométricas está em $\mathcal{R}^*$ e há uma ρ -bola centrada em x contida na intersecção. $\square$

10.1.1 ‘Esta pseudométrica rende até $\mathbb{N}$ vezes mais.’

Vimos que duas (e assim finitas) pseudométricas geram a mesma topologia de alguma pseudométrica. Vamos ver agora que isso pode ser melhorado para uma quantidade enumerável.

Lema 10.4. Dada uma pseudométrica ρ existe uma pseudométrica ρ^* limitada por 1 tal que a topologia gerada por ambas é a mesma. Se r é um real positivo então a topologia gerada por $r\rho$ coincide com a topologia gerada por ρ .

Demonstração. Dada uma pseudométrica ρ , tome $\rho^*(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$. Fica a cargo do leitor notar que ρ^* é uma pseudométrica. Note também que $B_\rho(x, \epsilon) = B_{\rho^*}(x, \epsilon)$ para cada $x \in X$ e $0 < \epsilon < 1$. Assim as topologias geradas pelos sistemas fundamentais de vizinhanças geram a mesma topologia, pois

a topologia gerada pelas bolas abertas coincide com a topologia gerada pelas bolas de raio menor que 1.

No segundo caso, fica a cargo do leitor notar que $r\rho$ é uma métrica. Temos que $r\rho(x, y) < \epsilon$ se e somente se $\rho(x, y) < \frac{\epsilon}{r}$. Portanto, $B_{r\rho}(x, \frac{\epsilon}{r}) = B_\rho(x, \epsilon)$. Segue então que as topologias geradas pelas bolas abertas de cada métrica serão as mesmas. $\square$

Proposição 10.5. Seja X um espaço topológico. Dada uma família $\mathcal{R} = \{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ de pseudométricas contínuas limitadas por 1 então $\rho = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n}{2^{n+1}} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma pseudométrica contínua.

Em particular, a topologia gerada por $\mathcal{R}$ coincide com a topologia gerada por ρ .

Demonstração. Vamos assumir que todas as topologias em $\mathcal{R}$ são contínuas em X . Como $\rho(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in X \times X$, então $\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x, y)}{2^{n+1}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$. Sob estas condições, a função ρ é contínua (iremos fazer a prova deste resultado em separado no final da secção). $\square$

Teorema 10.6. Dada uma topologia sobre X gerada por uma família enumerável de pseudométricas, existe uma pseudométrica que gera a topologia de X .

Demonstração. Podemos tomar então uma família $\mathcal{R}$ enumerável de pseudométricas limitadas por 1 que geram a topologia de X . As pseudométricas em $\mathcal{R}$ são contínuas, pois a topologia gerada por $\mathcal{R}$ é menos fina que a topologia de X . Enumerando $\mathcal{R} = \{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ podemos definir uma pseudométrica ρ que é contínua na topologia de X . Assim a topologia de ρ é menos fina que a topologia de X .

Fixe $n \in \mathbb{N}$. Então $\rho_n(x, y) \leq 2^{n+1}\rho(x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times X$.

Assim, temos que $B_\rho(x, \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon) = B_{2^{n+1}\rho}(x, \epsilon) \subseteq B_{\rho_n}(x, \epsilon)$. Logo, a topologia gerada por ρ é mais fina que a topologia gerada por $\mathcal{R}$.

Como $\mathcal{R}$ gera a topologia de X , concluímos que a topologia gerada por ρ é mais fina que a topologia de X . Assim ρ gera a topologia de X . $\square$

Na proposição acima, aplicaremos para o espaço $X \times X$, $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ e $f_n = \frac{\rho_n}{2^{n+1}}$ for $n \in \mathbb{N}$.

Lema 10.7. Seja $(a_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de reais positivos tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ e sejam $f_n : X \rightarrow [0, a_n]$ contínuas para todo n (topologia usual do intervalo em $[0, 1]$).

Então $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ é contínua.

Demonstração. Seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Tome $N \in \mathbb{N}$ positivo tal que $\sum_{n \geq N} a_n < \frac{\epsilon}{4}$. Para cada $i < N$, seja U_i uma vizinhança de x tal que $f_i[U_i] \subseteq]f_i(x) - \frac{\epsilon}{2N}, f_i(x) + \frac{\epsilon}{2N}[$. Tome $U = \bigcap_{0 \leq i < N} U_i$. Se $y \in U$ então para cada $i < N$ temos que se $y \in U \subseteq U_i \rightarrow |f_i(y) - f_i(x)| < \frac{\epsilon}{2N}$. Assim, $|\sum_{i=0}^{N-1} f_i(y) - \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x)| < \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\epsilon}{2N} = \frac{\epsilon}{2}$. Logo $|f(x) - f(y)| \leq |\sum_{i=0}^{N-1} f_i(y) - \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x)| + |\sum_{n \geq N} f_n(y)| + |\sum_{n \geq N} f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n \geq N} a_n + \sum_{n \geq N} a_n < \epsilon$. Logo f é contínua em x . Como x é arbitrário, a função f é contínua. $\square$

10.2 Distância de ponto a fechado em espaços pseudométricos.

10.2.1 Distância de um ponto a um subconjunto.

Definição 10.8. Dada uma pseudométrica ρ e A um subconjunto não vazio de X podemos definir a função: $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$.

Lema 10.9. Seja X um espaço topológico com a topologia τ e ρ uma pseudométrica contínua em X . Seja τ_ρ a topologia gerada por ρ . A função $f(x) = \rho(x, A)$ é uma contínua em X . Temos que $f(x) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$. Dado $y \notin \overline{A}^{\tau_\rho}$, a função $g(x) = \frac{f(x)}{\rho(x, y) + f(y)}$ é contínua, $g(x) \in [0, 1]$, $g(y) = 1$ e $g[\overline{A}^{\tau_\rho}] \subseteq \{0\}$.

Demonstração. Dado $a \in A$, $\rho(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$. Portanto $\rho(x, A) - \rho(x, y) \leq \rho(y, a)$ para cada $a \in A$. Logo $\rho(x, A) - \rho(x, y) \leq \rho(y, A)$. Assim, $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$. Similarmente, podemos concluir que $\rho(y, A) \leq \rho(y, x) + \rho(x, A) = \rho(x, y) + \rho(x, A)$. Portanto temos que $|f(x) - f(y)| = |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$. Assim, fixado ϵ , se $y \in B_\rho(x, \epsilon) \rightarrow \rho(x, y) < \epsilon \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \rightarrow f(y) \in]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$. Assim, f é contínua em x . Como x é arbitrário, segue que f é contínua em X .

Temos que $f(x) = 0$ se e somente se $\rho(x, A) = 0$ se e somente se $B_\rho(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ se e somente se $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$.

Dado $y \notin \overline{A}^{\tau_\rho}$, temos que $f(y) \neq 0$. A função no denominador de g não se anula, e tanto a função no numerador quanto no denominador são contínuas, portanto g é contínua. Como g é uma fração de números não negativos, temos que $g(x) \geq 0$. Vimos acima que $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$, assim $g(x) = \frac{f(x)}{\rho(x, y) + f(y)} \leq \frac{\rho(x, y) + f(y)}{\rho(x, y) + f(y)} = 1$.

Para y temos $g(y) = \frac{f(y)}{\rho(y, y) + f(y)} = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$.

Se $x \in \overline{A}^{\tau_\rho}$ então $f(x) = 0$. Logo $g(x) = \frac{0}{\rho(x, y) + f(y)} = 0$. $\square$

10.2.2 Funções contínuas geradas por pseudométricas contínuas.

Teorema 10.10. Seja $\mathcal{R}$ uma família de pseudométricas em X e τ a topologia gerada por estas pseudométricas. Então para todo $x \in X$ e todo F τ -fechado tal que $x \notin F$ existe uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ τ -contínua tal que $g(x) = 1$ e $g[F] \subseteq \{0\}$.

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalizada que as somas finitas de pseudométricas em $\mathcal{R}$ estão em $\mathcal{R}$. Assim o conjunto das ρ -bolas abertas com ρ in $\mathcal{R}$ formam uma base. Sejam x e F como no enunciado. Temos que $X \setminus F$ é um aberto contendo x . Assim existe $\rho \in \mathcal{R}$ e $\epsilon > 0$ tal que $x \in B_\rho(x, \epsilon) \subseteq X \setminus F$.

Seja $A = X \setminus B_\rho(x, \epsilon) \supseteq F$. Como τ_ρ é menos fina que τ , segue do teorema que existe g contínua tal que $g(x) = 1$ e $g[F] \subseteq g[A] = g[\overline{A}^{\tau_\rho}] \subseteq \{0\}$. $\square$

O teorema abaixo é a versão métrica do Teorema de Urysohn que veremos daqui a algumas aulas (no caso o que une é o enunciado e não a demonstração).

Teorema 10.11. Seja X um espaço definido por uma pseudométrica. Sejam F e G dois conjunto fechado e disjuntos de X . Então existe uma função contínua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g[G] \subseteq \{1\}$ e $g[F] \subseteq \{0\}$.

Demonstração. Como X é a topologia gerada pela pseudométrica, temos que $F = \overline{F}^{\tau_\rho}$ e $G = \overline{G}^{\tau_\rho}$. Assim $g(x) = \frac{\rho(x, F)}{\rho(x, G) + \rho(x, F)}$ é uma função contínua de X em $[0, 1]$ tal que $g(x) = 0$ se $x \in F$ e $g(x) = 1$ se $x \in G$. $\square$

10.3 Grupos Topológicos.

10.3.1 Definição de grupo topológico.

Os grupos topológicos são definidos a partir da continuidade das suas operações. Como a definição serve para grupos Abelianos ou não-Abelianos, iremos usar a notação multiplicativa. Quando o grupo é Abeliano, em alguns casos é utilizado a notação aditiva.

Definição 10.12. Um conjunto G com uma operação binária $\cdot : G \times G \rightarrow G$ e uma operação unária $^{-1} : G \rightarrow G$ e um elemento e é um grupo com estas operações se:

- 1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in G$ (propriedade associativa).
- 2) $x \cdot e = e \cdot x = x$ para cada $x \in G$.
- 3) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Um grupo é chamado de Abeliano se

- 4) $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in G$ (propriedade comutativa).

Definição 10.13. Seja $\cdot$ a operação multiplicativa de um grupo, e seu elemento neutro e $^{-1}$ a operação inversa. Dizemos que τ é uma topologia de grupo para G se as funções

- 1) $\cdot : G \times G \rightarrow G$, com $G \times G$ com a topologia produto.
- 2) $^{-1} : G \rightarrow G$.

são contínuas. Neste caso, dizemos que G é um grupo topológico (munido com a topologia τ).

Dizemos que G é um grupo paratopológico se 1) é contínua (sem se preocupar com a continuidade de 2)

Exemplo 10.14. O $\mathbb{R}$ com a topologia usual e a operação da soma é um grupo topológico.

A reta de Sorgenfrey é um grupo paratopológico que não é um grupo topológico.

Demonstração. O caso de $\mathbb{R}$ fica a cargo do leitor.

Fixado (x, y) e $\epsilon > 0$, $[x + y, x + y + \epsilon[$ é uma vizinhança de $x + y$ e $[x + \frac{\epsilon}{2} \times [y + \frac{\epsilon}{2}$ é uma vizinhança básica de (x, y) tal que $[x + \frac{\epsilon}{2} \times [y + \frac{\epsilon}{2} \subseteq [x + y, x + y + \epsilon[$. Portanto $+$ é contínua em (x, y) . Como (x, y) é arbitrária, segue que $+$ é contínua.

Vamos mostrar que $-$ não é contínua na topologia de Sorgenfrey, note que $[0, 1[$ é uma vizinhança aberta de 0 na reta de Sorgenfrey, mas dada uma vizinhança U de 0, existe $\delta > 0$ tal que $[0, 2\delta[\subseteq U$. Agora $\delta \in U$ e $-\delta \notin [0, 1[$, portanto $-U \not\subseteq [0, 1[$ para toda vizinhança U de 0. Logo $-$ não é contínua em 0 (o mesmo argumento serve para qualquer outro ponto). $\square$

Como a translação é uma operação contínua, o conjunto de todas as vizinhanças de um ponto podem ser encontradas por translação. Assim ao tentar definir uma topologia de grupo usando sistemas de vizinhanças, é razoável esperar que possamos definir a topologia definindo apenas um sistema fundamental de vizinhanças de e e obtendo as vizinhanças dos outros pontos por translação.

Como o grupo pode não ser Abelian, pode haver diferenças entre translações à direita ou à esquerda.

Vamos analisar um pouco a situação para as vizinhanças de e para um espaço topológico G . Dado uma vizinhança aberta W de e , como $e \cdot e = e$, existe O, V abertos contendo e tal que $O \cdot V \subseteq W$. Tomando a intersecção $U = O \cap V$, segue que

$$1) U^2 := U \cdot U \subseteq W.$$

Se W é uma vizinhança aberta de e , a continuidade da inversa implica que existe V vizinhança aberta de e tal que

$$2) V^{-1} \subseteq W.$$

Se $x \in V$ então pela translação contínua, segue que existe U vizinhança de e tal que

$$3) x \cdot U \subseteq V.$$

Se U é uma vizinhança de e , pela continuidade das translações, temos que para cada $x \in X$, $x \cdot U$ é uma vizinhança de x e $x \cdot U \cdot x^{-1}$ é uma vizinhança de e . Temos que estes tipos de vizinhanças são um sistema de fundamental de vizinhanças de e (isto relaciona as translações à direita e à esquerda com vizinhanças de e). Então para todo V , existe U tal que

$$4) x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V.$$

Lema 10.15. Para todo W vizinhança aberta de e no grupo topológico G existe U vizinhança aberta de e tal que $U \subseteq W$ e $U^{-1} = U$.

Demonstração. Como W é aberto, temos que W^{-1} é aberto. Como $e^{-1} = e$, temos que W^{-1} é vizinhança aberta de e . Logo $U = W \cap W^{-1}$ é vizinhança aberta de e contida em W . Além disso, $x \in U$ se e somente se $x \in W \cap W^{-1}$ se e somente se $x^{-1} \in W^{-1} \cap W$ se e somente se $x^{-1} \in U$. $\square$

Definição 10.16. Dizemos que U é uma vizinhança simétrica de e se $U = U^{-1}$.

Proposição 10.17. Grupos topológicos T_0 são T_1 .

Todo grupo topológico é regular.

Demonstração. Sejam $x, y \in G$. Como G é T_0 , trocando x e y de posição se necessário, existe W aberto tal que $x \in W$ e $y \notin W$. Seja V vizinhança aberta de e tal que $x \cdot V \subseteq W$. Então $y \notin x \cdot V$. Temos que V^{-1} é uma vizinhança de e , assim $y \cdot V^{-1}$ é vizinhança de y . Afirmamos que $x \notin y \cdot V^{-1}$. De fato, se $x \in y \cdot V^{-1}$ então existe $z \in V^{-1}$ tal que $x = y \cdot z$. Assim, $y = x \cdot z^{-1} \in x \cdot V$, contradição. Portanto existe uma vizinhança de y que separa x , assim X é T_1 .

Seja $x \in G$ e V um aberto tal que $x \in V$. Seja W uma vizinhança de e tal que $x \cdot W \subseteq V$. Tome U uma vizinhança simétrica de e tal que $U \cdot U \subseteq W$. Seja $y \in \overline{x \cdot U}$. Então $y \cdot U \cap x \cdot U \neq \emptyset$. Então existe $z_1, z_2 \in U$ tais que $y \cdot z_1 = x \cdot z_2$. Portanto, segue que $x^{-1} \cdot y = z_2 \cdot (z_1)^{-1} \in U \cdot U^{-1} = U \cdot U \subseteq W$. Assim, $y \in x \cdot W$ e $x \cdot \overline{U} \subseteq x \cdot W \subseteq V$. Assim, G é regular em x . Como x é arbitrário, temos que G é regular. $\square$

10.3.2 Topologia de grupo gerada pelo sistema de vizinhanças do elemento neutro.

Teorema 10.18. Seja $\mathcal{V}_e$ uma família não vazia de subconjuntos de G contendo e tais que

GT1) para cada $W \in \mathcal{V}_e$, existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U^2 \subseteq W$.

GT2) para cada $W \in \mathcal{V}_e$ existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $V^{-1} \subseteq W$.

GT3) para cada $V \in \mathcal{V}_e$ e para cada $x \in V$ existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $x \cdot U \subseteq V$.

GT4) para cada $V \in \mathcal{V}_e$ e para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V$.

GT5) para cada $V, W \in \mathcal{V}_e$ existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U \subseteq V \cap W$.

Então $\{\mathcal{V}_x : x \in G\}$, onde $\mathcal{V}_x = \{x \cdot U : U \in \mathcal{V}_e\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia de grupo.

Além disso, $\{\mathcal{W}_x : x \in G\}$, onde $\mathcal{W}_x = \{U \cdot x : U \in \mathcal{V}_x\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para a topologia acima.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que temos um sistema fundamental de vizinhanças para uma topologia. Temos que $\mathcal{V}_x$ é não vazio e pela definição se $W \in \mathcal{V}_x$ então existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $W = x \cdot U \ni x \cdot e = x$. Logo $x \in W$. Assim BL1) está satisfeita.

Se $W_1, W_2 \in \mathcal{V}_x$ então existem $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_e$ tal que $W_1 = x \cdot U_1$ e $W_2 = x \cdot U_2$. Por GT5), existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Então $x \cdot U \in \mathcal{V}_x$ e $x \cdot U \subseteq (x \cdot U_1) \cap (x \cdot U_2) = W_1 \cap W_2$. Assim, BL2) está satisfeita.

Seja $x \in G$, $W \in \mathcal{V}_x$ e $y \in W$ então existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $W = x \cdot V$. Logo, $x^{-1} \cdot y \in x^{-1} \cdot W = x^{-1} \cdot x \cdot V = V$. Então por GT3), existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $x^{-1} \cdot y \cdot U \subseteq V$. Portanto $x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot U \subseteq x \cdot V$. Portanto, $y \cdot U \subseteq x \cdot V = W$. Assim BL3) está satisfeita, pois $y \cdot U \in \mathcal{V}_y$.

Seja τ a topologia gerada pelo sistema fundamental de vizinhanças.

Vamos mostrar que $\cdot$ é contínua. Dado $x, y \in G$, tome $W \in \mathcal{V}_{x \cdot y}$ e seja $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $x \cdot y \cdot V \subseteq W$. Por GT1) existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U^2 \subseteq V$. Usando GT4) existe $O \in \mathcal{V}_e$ tal que $y^{-1} \cdot O \cdot y \subseteq U$. Assim, $O \subseteq y \cdot U \cdot y^{-1}$. Temos que $(x \cdot O) \times (y \cdot U)$ é uma vizinhança básica de (x, y) e $x \cdot O \cdot y \cdot U \subseteq x \cdot y \cdot U \cdot y^{-1} \cdot y \cdot U = x \cdot y \cdot U \cdot U \subseteq x \cdot y \cdot V \subseteq W$. Assim, $\cdot$ é contínua em (x, y) . Como $(x, y) \in G^2$ é arbitrária, segue que $\cdot$ é contínua.

Vamos mostrar que $^{-1}$ é contínua. Seja $x \in G$ e $W \in \mathcal{V}_e$. Então $x^{-1} \cdot W$ é uma vizinhança básica arbitrária de x^{-1} . Existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $x \cdot V \cdot x^{-1} \subseteq W$, por GT4). Então $V \subseteq x^{-1} \cdot W \cdot x$. Usando GT2), tome $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U^{-1} \subseteq V$. Então $x \cdot U$ é vizinhança de x e $(x \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot x^{-1} \subseteq V \cdot x^{-1} \subseteq x^{-1} \cdot W \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot W$. Assim, $^{-1}$ é contínua em x . Como x é um ponto arbitrário de G , segue que $^{-1}$ é contínua.

Para terminar, fixe $x \in G$. Vamos mostrar que $\mathcal{W}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x . Primeiro precisamos checar que $W \cdot x$ é um aberto na topologia para cada $W \in \mathcal{V}_e$. Dado $y \in W \cdot x$, temos que $y \cdot x^{-1} \in W$. Por GT3), existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $y \cdot x^{-1} \cdot V \subseteq W$. Por GT4), tome $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq V$. Assim, $y \cdot x^{-1} \cdot x \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq W$. Portanto, $y \cdot U \cdot x^{-1} \subseteq W$ e $y \cdot U \subseteq W \cdot x$. Como $y \in W \cdot x$ é arbitrário segue que $W \cdot x$ é um aberto.

Dada uma vizinhança $x \cdot W$ com $W \in \mathcal{V}_e$. Pela GT4), existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $x^{-1} \cdot U \cdot x \subseteq W$. Assim, $U \subseteq x \cdot W \cdot x^{-1}$. Portanto, $U \cdot x \subseteq x \cdot W \cdot x^{-1} \cdot x = x \cdot W$. $\square$

Note que GT4) está sempre satisfeita para grupos Abelianos.

Exemplo 10.19. Seja G um grupo Abeliano e $\mathcal{V}_e$ uma família de subgrupos fechada por intersecções finitas (ou seja, a intersecção de um número finito de elementos da família pertence à família). Então $\mathcal{V}_e$ gera uma topologia de grupo para G .

Capítulo 11

Produtos. Imersão.

11.1 Produtos Infinitos. O Axioma da Escolha. Produto caixa.

Quando tratamos do produto de dois conjuntos, seus elementos são vistos como pares ordenados. No caso de um produto finito, são vistos como uma n -upla, fixando um bijeção entre a família finita de conjuntos e um natural n que servirá de índice. Para o produto infinito, isto precisa de uma formulação melhor.

Dada uma família $\{X_i : i \in I\}$, iremos considerar os elementos de $\prod_{i \in I} X_i$ como funções $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

Em geral, a primeira reação ao trabalhar com um produto infinito é tomar um elementos. Ao tomar um elemento, já estamos aplicando o Axioma da Escolha (já utilizamos o Axioma da Escolha diversas vezes aqui sem fazer menção dele).

Definição 11.1. O Axioma da Escolha é a afirmação: Para toda família $\{X_i : i \in I\}$ tal que $X_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, o conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ é não vazio.

O Axioma da Escolha é consistente com os outros axiomas usuais da teoria dos conjuntos (resultado demonstrado por Gödel na década de 1940). Falando toscamente, consistente significa que você não aumenta o risco de mostrar que os axiomas usuais levam a uma contradição se assumir o Axioma da Escolha. Ou seja, se chegarmos a uma contradição usando os axioma usuais da teoria dos conjuntos e o Axioma da Escolha, então existe uma contradição apenas usando os axiomas usuais da teoria dos conjuntos sem usar o Axioma da Escolha.

Na década de 1960, Cohen provou que a negação do Axioma da Escolha também é consistente com os outros axiomas usuais da teoria dos conjuntos criando uma técnica chamada de forcing. Neste caso, dizemos que o Axioma da Escolha é independente dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos.

Em geral, iremos continuar a usar o Axioma da Escolha sem fazer menção do uso dele, com exceção de quando utilizarmos alguma de suas diversas equivalências.

11.1.1 ‘Que topologia para o produto de espaços topológicos arbitrários combina melhor com o produto finito?’

Talvez a mais natural de se pensar seja (como foi o caso historicamente) tomar um aberto de cada coordenada e tomar o produto destes para formar uma base.

Definição 11.2. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos, onde X_i está munido com uma topologia τ_i para cada $i \in I$. O produto-caixa (‘box-product’ em inglês) é a topologia gerada pela base $\{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i\}$.

Exemplo 11.3. O produto caixa de espaços discretos é um espaço discreto. Basta notar que se $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$ então $\prod_{i \in I} \{x_i\}$ é um aberto cujo único elemento é $(x_i : i \in I)$.

Este produto torna os abertos ‘muito pequenos’ e acabou caindo em desuso com a prova do teorema de Tychonoff usando o que é chamado agora de produto de Tychonoff.

Note que se tomarmos uma sub-base $\mathcal{S}_i$ para X_i para cada $i \in I$, $\bigcup_{j \in I} \{U_j \times \prod_{j \neq i} X_i : U_j \in \mathcal{S}_j\}$ é uma sub-base para uma topologia em $\prod_{i \in I} X_i$ menos fina que a topologia caixa. A relação pode

ser estrita, pois as intersecções finitas podem não recuperar os abertos básicos do produto caixa. Esta sub-base vai ser uma base da topologia de Tychonoff.

11.2 Produto de Tychonoff.

11.2.1 Definição do produto de Tychonoff.

Antes de definirmos o produto de Tychonoff, iremos definir suporte.

Definição 11.4. Dado $\prod_{i \in I} A_i$, onde $\emptyset \neq A_i \subseteq X_i$ para cada $i \in I$, dizemos que o suporte de $\prod_{i \in I} A_i$ é o conjunto $\{i \in I : A_i \neq X_i\}$. Se este conjunto é finito, diremos que o suporte é finito.

Note que a base de abertos do produto caixa consiste de um produto de abertos de suporte arbitrário. O produto de Tychonoff limita o suporte utilizado.

Definição 11.5. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos, onde X_i está munido com uma topologia τ_i para cada $i \in I$. O produto de Tychonoff é a topologia gerada pela base $\{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} U_i \text{ tem suporte finito}\}$.

Exemplo 11.6. Seja X_i com pelo menos dois pontos para cada X_i e I infinito. Então $\prod_{i \in I} X_i$ com a topologia de Tychonoff não possui pontos isolados.

De fato, seja $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$ e seja V é uma vizinhança arbitrária de $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$. Então existe um aberto da base $\prod_{i \in I} U_i$ tal que $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq V$. Seja J o suporte de $\prod_{i \in I} U_i$. Como J é finito e I é infinito, temos $I \setminus J$ infinito. Então o conjunto $\prod_{j \in J} \{x_j\} \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \subseteq \prod_{i \in I} U_i \subseteq V$. Assim, V possui infinitos pontos (na verdade uma quantidade não enumerável) e portanto nenhum ponto de $\prod_{i \in I} X_i$ é isolado.

Proposição 11.7. Se $A_i \subseteq X_i$, para todo $1 \leq i \in I$, então $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Demonstração. Seja $x_i \in X_i$ e $\mathcal{V}_{x_i}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x_i para cada $i \in I$. Seja $\mathcal{V}$ o sistema fundamental de vizinhanças de $(x_i : i \in I)$ definido a partir dos abertos básicos usando $\mathcal{V}_{x_i}$

Então $(x_i : i \in I) \in \overline{\prod_{i \in I} A_i}^{\prod_{i \in I} X_i}$ se e somente se $U \cap \prod_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ para cada $U = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}$ se e somente se $\prod_{i \in I} (U_i \cap A_i) \neq \emptyset$ se e somente se $W_i \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $W_i \in \mathcal{V}_{x_i}$ e $i \in I$ se e somente se e somente se $x_i \in \overline{A_i}^{X_i}$ para $i \in I$ se e somente se $(x_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}^{X_i}$. $\square$

Proposição 11.8. Se Y_i é um subespaço de X_i para cada $i \in I$ então a topologia de subespaço de $\prod_{i \in I} Y_i$ como subespaço de $\prod_{i \in I} X_i$ coincide com a topologia de produto dos subespaços Y_i .

Demonstração. A topologia de subespaço de $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ é dada pela base $\{(\prod_{i \in I} U_i) \cap Y : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} U_i \text{ tem suporte finito}\}$.

A topologia do produto de subespaços $\prod_{i \in I} Y_i$ é dada pela base $\{\prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i) : U_i \in \tau_i \text{ tal que } \prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i) \text{ tem suporte finito}\}$ (neste caso se não estiver no suporte $U_i \cap Y_i = Y_i$).

Basta notar que $(\prod_{i \in I} U_i) \cap Y = \prod_{i \in I} (U_i \cap Y_i)$ para concluirmos que as bases são iguais e portanto temos a mesma topologia. $\square$

Obviamente o caso interessante é tomar outros tipos de subespaços.

Teorema 11.9. Seja $\mathcal{B}_i$ uma base para X_i para cada $i \in I$. Então $\{\prod_{i \in I} U_i : \exists J \subseteq I \text{ finito}, U_j \in \mathcal{B}_j \forall j \in J \text{ e } U_i = X_i \forall i \in I \setminus J\}$ é uma base para a topologia de Tychonoff de $\prod_{i \in I} X_i$.

Seja $\mathcal{S}_i$ uma sub-base para X_i para cada $i \in I$. Então $\bigcup_{j \in I} \{U_j \times \prod_{i \neq j} X_i : U_j \in \mathcal{S}_j\}$ é uma sub-base a topologia de Tychonoff de $\prod_{i \in I} X_i$.

Seja $\mathcal{V}_{x_i}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x_i em X_i para cada $i \in I$. Então $\{\prod_{i \in I} U_i : \exists J \subseteq I \text{ finito}, U_j \in \mathcal{V}_{x_j} \forall j \in J \text{ e } U_i = X_i \forall i \in I \setminus J\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $(x_i : i \in I)$ em $\prod_{i \in I} X_i$ para a topologia de Tychonoff de $\prod_{i \in I} X_i$.

11.2.2 Convergência em produtos.

Definição 11.10. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é aberta se $f[U]$ é aberto em Y , para todo U aberto de X .

Lema 11.11. Seja $f : X \rightarrow Y$ e $\mathcal{B}$ é uma base de X . Então f é uma função aberta se e somente se $f[U]$ é aberto para todo $U \in \mathcal{B}$.

Demonstração. $(\rightarrow)$. Basta usar a hipótese e o fato que elementos da base são abertos.

$(\leftarrow)$. Se W é um aberto de X , então seja $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq W\}$. Como $\mathcal{B}$ é base, temos que $\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\} = W$. Assim, $f[W] = f[\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}] = \bigcup\{f[U] : U \in \mathcal{V}\}$, pois a união das imagens é imagem da união. $\square$

Proposição 11.12. Seja $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ a projeção na coordenada j . A projeção π_j é contínua e aberta, para cada $j \in I$. A topologia inicial de $\{\pi_i : i \in I\}$ é a topologia de Tychonoff.

Demonstração. Fixe $j \in I$ e U_j um aberto de X_j . Então $\pi_j^{-1}[U_j] = U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$ é um aberto na topologia produto. Assim, π_j é uma função contínua.

Seja $\prod_{i \in I} U_i$ um aberto básico na topologia produto. Então $\pi_j[\prod_{i \in I} U_i] = U_j$ é aberto em X_j . Como os abertos básicos do produto formam uma base da topologia, segue que π_j é uma função aberta.

Vamos agora verificar que a topologia produto coincide com a topologia das projeções.

Já vimos que π_j é contínua na topologia produto, para cada $j \in I$. Assim, a topologia produto é mais fina que a topologia gerada pelas projeções.

Por outro lado, vimos que os abertos básicos $U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$ com U_j aberto em X_j e $j \in I$ formam uma subbase da topologia produto e estas são abertos na topologia gerada pelas projeções por serem da forma $\pi_j^{-1}[U_j]$. $\square$

Corolário 11.13. $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ é contínua se e somente se $\pi_j \circ f$ é contínua para cada $j \in I$.

Demonstração. Segue do fato da topologia produto ser a topologia gerada pelas projeções. $\square$

Proposição 11.14. Seja $S = ((x_{i,\lambda}) : i \in I) : \lambda \in \Lambda$ uma rede em $\prod_{i \in I} X_i$. Então S converge para $(x_i : i \in I)$ se e somente se $S_i = (x_{i,\lambda} : \lambda \in \Lambda)$ converge para x_i para todo $i \in I$.

Demonstração. $(\rightarrow)$. Se S converge para $(x_i : i \in I)$, pela continuidade de π_j segue que $(\pi_j((x_{i,\lambda}) : i \in I)) : \lambda \in \Lambda = (x_{j,\lambda} : \lambda \in \Lambda)$ converge para $\pi_j((x_i : i \in I)) = x_j$.

Reciprocamente, seja $U = \prod_{i \in I} U_i$ um aberto básico da topologia produto contendo $(x_i : i \in I)$. Seja $J = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$ o suporte de $\prod_{i \in I} U_i$ (J é finito por definição de aberto básico). Para cada $j \in J$, fixe λ_j tal que $x_{j,\lambda} \in U_j$ para cada $\lambda \geq \lambda_j$. Como Λ é dirigido e J é finito, existe λ^* tal que $\lambda^* \geq \lambda_j$ para cada $j \in J$. Assim $x_{j,\lambda} \in U_j$, para cada $j \in J$ e $\lambda \geq \lambda^*$.

Portanto $((x_{i,\lambda}) : i \in I) \in U$ para cada $\lambda \geq \lambda^*$. Como os abertos básicos formam uma base de abertos, segue que a rede S converge. $\square$

Proposição 11.15. Seja $\mathcal{F}$ um filtro $\prod_{i \in I} X_i$ e seja $\mathcal{F}_i$ o filtro gerado por $\{\pi_i[F] : F \in \mathcal{F}\}$. Então $\mathcal{F}$ converge para $(x_i : i \in I)$ se e somente se $\mathcal{F}_i$ converge para x_i para todo $i \in I$.

Demonstração. $(\rightarrow)$. Suponha que $\mathcal{F}$ converge para $(x_i : i \in I)$. Então as vizinhanças de $(x_i : i \in I)$ são elementos de $\mathcal{F}$. Dado $j \in I$ e U_j uma vizinhança aberta de x_j , temos que $\pi_j^{-1}[U_j]$ é vizinhança de $(x_i : i \in I)$. Logo, $\pi_j^{-1}[U_j] \in \mathcal{F}$. Portanto, $\pi_j[\pi_j^{-1}[U_j]] = U_j \in \mathcal{F}_j$. Assim, toda vizinhança de x_j pertence a $\mathcal{F}_j$. Portanto, $\mathcal{F}_j$ converge para x_j .

$(\leftarrow)$. Se $\mathcal{F}_i$ converge para x_i para cada $i \in I$ então toda vizinhança U_i de x_i em X_i está no filtro $\mathcal{F}_i$. Assim, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\pi_i[F] \subseteq U_i$. Portanto $F \subseteq \pi_i^{-1}[U_i]$. Como $\mathcal{F}$ é filtro e $F \in \mathcal{F}$, segue que $\pi_i^{-1}[U_i] \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é filtro segue que todas as vizinhanças abertas básicas que contém $(x_i : i \in I)$ pertencem a $\mathcal{F}$. Assim, $\mathcal{F}$ converge para $(x_i : i \in I)$. $\square$



produto topologia inicial.jpg

Figura 11.1: A topologia de Tychonoff é a topologia inicial das projeções.

11.2.3 Propriedade produtiva.

Definição 11.16. Dizemos que uma propriedade é produtiva se dada uma propriedade $\mathcal{P}$, se cada espaço numa família tem $\mathcal{P}$ então o produto de Tychonoff dessa família tem propriedade $\mathcal{P}$.

Dizemos que a propriedade é finitamente (enumeravelente) produtiva se cada espaço da família tem $\mathcal{P}$ e a família de espaços é finita (enumerável) então o produto de Tychonoff dessa família tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Corolário 11.17. O primeiro axioma de enumerabilidade é enumeravelmente produtiva.

O segundo axioma de enumerabilidade é enumeravelmente produtiva.

Demonstração. Se I é enumerável e X_i satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade para cada $i \in I$ então tomando uma base enumerável $\mathcal{B}_i$ para cada X_i , a base de abertos usando os $\mathcal{B}_i$'s é enumerável e portanto $\prod_{i \in I} X_i$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Se I é enumerável e X_i satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade para cada $i \in I$ então tomando uma base enumerável $\mathcal{V}_{x_i}$ para um ponto x_i de X_i , a base local de abertos usando os $\mathcal{V}_{x_i}$'s é enumerável e portanto $\prod_{i \in I} X_i$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. $\square$

Proposição 11.18. Os axiomas de separação T_0 , T_1 , Hausdorff e regular são propriedades produtivas.

Demonstração. Dados dois pontos distintos $(x_i : i \in I)$ e $(y_i : i \in I)$, existe $j \in I$ tal que $x_j \neq y_j$. Sejam U_j e V_j as testemunhas para T_0 , T_1 ou Hausdorff para x_j e y_j em X_j . Então $U = U_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$ e $V = V_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$ são as testemunhas, pois

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_j \cap V_j) \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i, \\ (x_i : i \in I) &\in V \text{ se e so se } x_j \in V_j \text{ e} \\ (y_i : i \in I) &\in U \text{ se e so se } y_j \in U_j. \end{aligned}$$

Vamos agora verificar que a regularidade é produtiva. Seja $(x_i : i \in I)$ e tome W um aberto contendo este ponto. Existe então um aberto básico U de suporte finito J tal que $(x_i : i \in I) \in U = \prod_{i \in I} U_i \subseteq W$. Para cada $j \in J$ segue da regularidade de X_j que existe V_j vizinhança aberta de x_j em X_j tal que $x_j \in V_j \subseteq \overline{V_j}^{X_j} \subseteq U_j$. Tome $V = \prod_{j \in J} V_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$. Então $(x_i : i \in I) \in V \subseteq \overline{V}^{\prod_{i \in I} X_i} = \overline{\prod_{j \in J} V_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i}^{\prod_{i \in I} X_i} = \prod_{j \in J} \overline{V_j}^{X_j} \times \prod_{i \in I \setminus J} \overline{X_i}^{X_i} \subseteq \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i = U \subseteq W$. Assim, o produto $\prod_{i \in I} X_i$ é regular. $\square$

O próximo exemplo usa um argumento diagonal.

Exemplo 11.19. Seja $X_i = \{a_i, b_i\}$ com a topologia discreta para cada $i \in I$ com I não enumerável. Então $\prod_{i \in I} X_i$ não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (e por isso, também não satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade).

Demonstração. Suponha que $(a_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$ possua uma base local enumerável $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Podemos supor que cada V_n é um aberto básico e tome J_n o suporte de V_n . Como J_n é finito, segue que $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ é enumerável. Como I é não enumerável, existe $k \in I \setminus J$. Então $U = \{a_k\} \times \prod_{i \in I \setminus \{k\}} X_i$ é uma vizinhança $(a_i : i \in I)$.

Como V_n e U são abertos básico do produto, temos que $V_n \subseteq U$ implica que suporte U é um subconjunto do suporte de V_n . Mas, $k \notin J_n$, assim, $V_n \not\subseteq U$ e $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é uma base local, contradição. $\square$

Corolário 11.20. Seja X_i um produto de espaços T_1 com pelo menos dois pontos para cada $i \in I$ com I não enumerável. Então todos os pontos de $\prod_{i \in I} X_i$ não possuem base local enumerável.

Demonstração. Seja $(a_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$ um ponto arbitrário. Para cada $i \in I$ fixe um ponto $b_i \in X_i \setminus \{a_i\}$. Então $(a_i : i \in I)$ não possui base enumerável em $\prod_{i \in I} \{a_i, b_i\}$. Claramente, $\prod_{i \in I} \{a_i, b_i\}$ é um subespaço de $\prod_{i \in I} X_i$ e portanto, $\prod_{i \in I} X_i$ também não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. $\square$

Fixe $x_i \in X_i$. Se D_i é denso em X_i para todo $i \in I$ então $D = \{(y_i : i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i : \exists J \subseteq I \text{ finito } y_j \in D_j \forall j \in J \text{ e } y_i = x_i \forall i \in I \setminus J\}$ é denso em $\prod_{i \in I} X_i$. Para ver isto, mas notar que todo aberto básico interepta D .

Em particular, temos que o produto enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade. Veremos que este resultado pode ser melhorado.

11.2.4 Produto não enumerável de espaços satisfazendo o terceiro axioma de enumerabilidade.

A prova utiliza funções ‘escada’ e usar uma base num conjunto de índices para construir um denso pequeno.

Teorema 11.21. Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (caso enumerável). Seja $\{X_i : i \in 2^{\mathbb{N}}\}$ uma família de espaços que satisfazem o terceiro axioma de enumerabilidade. Então $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} X_i$ satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Para cada $i \in 2^{\mathbb{N}}$, fixe D_i um subconjunto denso enumerável de X_i .

Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável de $2^{\mathbb{N}}$ (tomando $2 = \{0, 1\}$ com a topologia discreta e $2^{\mathbb{N}}$ com a topologia de Tychonoff). Seja $\mathcal{F}$ a família de subconjuntos finitos $\{B_1, \dots, B_n\}$ de $\mathcal{B}$ tal que $B_1, \dots, B_n$ são dois a dois disjuntos.

A família $\mathcal{F}$ é enumerável. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções f tal que f tem domínio $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}$ e $f(B) \in \mathbb{N}$ para cada $B \in \mathcal{B}'$. Então $f \in \mathcal{D} := \bigcup_{\mathcal{B}' \in \mathcal{F}} \mathbb{N}^{\mathcal{B}'}$. Como cada $\mathcal{B}'$ é finito, logo cada $\mathbb{N}^{\mathcal{B}'}$ é enumerável. Como $\mathcal{F}$ é enumerável, segue que $\mathcal{D}$ é enumerável. *A f é uma função escada no conjunto de índices.*

Para cada $f \in \mathcal{D}$, vamos associar um ponto de $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} X_i$. Antes, enumere cada D_i como $\{d_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$ (pode haver repetição se for um conjunto finito). Defina $x_f = (x_{f,i} : i \in 2^{\mathbb{N}})$ tal que $x_{f,i} = d_{i,f(B)}$ se existe algum $B \in \mathcal{B}' = \text{dom } f$ tal que $i \in B$ e $x_{f,i} = d_{i,0}$ se $i \notin \bigcup \mathcal{B}'$.

Vamos provar que $D = \{x_f : f \in \mathcal{D}\}$ é denso em $\prod_{i \in I} X_i$. De fato, tome $\prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i$ um aberto básico de $\prod_{i \in I} X_i$. Como o suporte J desse aberto é finito e $2^{\mathbb{N}}$ é um espaço Hausdorff, existe $\{B_j : j \in J\}$ abertos de $\mathcal{B}$ dois a dois disjuntos tais que $j \in B_j$ para cada $j \in J$. Então $\{B_j : j \in J\} \in \mathcal{F}$. Como D_j é denso em X_j , fixe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $d_{j,n_j} \in U_j$ para cada $j \in J$. Seja $g \in \mathcal{D}$ tal que $\text{dom } g = \{B_j : j \in J\} \in \mathcal{F}$ e $g(B_j) = n_j$ para cada $j \in J$.

Então $x_{g,j} = d_{j,g(B_j)} = d_{j,n_j} \in U_j$ para cada $j \in J$. Logo $x_g \in \prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i$ e $D \cap \prod_{i \in 2^{\mathbb{N}}} U_i \neq \emptyset$. Assim, D é denso enumerável. $\square$

Teorema de HMP.jpg

Figura 11.2: O teorema de Hewitt Marczewski Pondiczery.

11.3 ‘Aquecimento antes de imergir’.

Vimos anteriormente como definir um subespaço a partir de um espaço. Podemos pensar no processo inverso: dado um espaço topológico Y , queremos ver Y como um subespaço de algum espaço X com propriedades interessantes. Por exemplo, construir os reais a partir dos racionais. Como no caso da construção dos reais, temos uma cópia usando uma função que preserva a ordem e as propriedades das operações dos racionais.

No caso de espaços topológicos, isto significa usar funções contínuas.

Definição 11.22. Dizemos que $f : Y \rightarrow X$ é uma imersão contínua se $f : Y \rightarrow f[Y]$ é um homeomorfismo, onde $f[Y]$ está equipada com a topologia de subespaço de X .

Podemos começar com a situação que temos uma função injetora num produto de espaços e usar a topologia inicial para gerar uma topologia. Neste caso, vamos ter uma imersão.

Exemplo 11.23. Seja Y um subespaço topológico de X . A função $i : Y \rightarrow X$ tal que $y \mapsto y$ é uma imersão contínua. É comum identificarmos $f[Y]$ com Y e pensarmos em imersões como inclusões.

11.4 ‘Kit imersão’.

Podemos também já ter uma topologia no espaço e querer vê-lo como subespaço de um produto de espaços. Precisamos que a função seja injetora e que seja um homeomorfismo com a imagem. Em cada um desses casos, precisamos impor alguma propriedade à família de funções.

11.4.1 Função diagonal usando uma família de funções.

Mesmo no dia a dia, alguns dados das pessoas são tabelados (idade, sexo, altura, peso, etc...) e a partir delas é possível diferenciar as pessoas mesmo sem ter todos os seus dados. Cada dado pode ser pensado como uma coluna na tabela e a pessoa é representada pelos dados de uma linha da tabela. Se duas linhas tem a mesma informação, os dados que temos não diferenciam todas as pessoas da lista. Mas para tomada de algumas decisões ignoramos a pessoa e comparamos a outra a partir dos seus dados.

Definição 11.24. Seja X um conjunto e $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções tal que $f_i : X \rightarrow Y_i$ para cada $i \in I$ e definir $f = \Delta\mathcal{F} = \Delta_{i \in I} f_i : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ tal que para cada $x \in X$, $f(x) = (f_i(x) : i \in I)$.

Para podermos trabalhar com funções contínuas de um espaço X , o espaço precisa ter funções contínuas com uma certa abundância. No caso, a abundância será conseguir separar pontos e separar pontos de fechados, que serão definidos a seguir. Sem uma métrica conseguimos apenas dizer que estão ele está encostado ou não, o que nos faz remeter a fecho.

Por exemplo, existem espaços regulares X em que as únicas funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ são constantes (as constantes são sempre contínuas). Assim, quando tentarmos usar as funções no produto de funções contínuas reais deste espaço, as funções contínuas enxergam só um ponto e a diagonal é um ponto.

11.4.2 Famílias que separam pontos.

Se as pessoas estiverem em fila e estiverem bem alinhados nem sabemos quantas pessoas estão nela dependendo do ângulo de visão.

Definição 11.25. Dizemos que $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ separa pontos se para cada $x, y \in X$ distintos, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Teorema 11.26. Se $\mathcal{F}$ separa pontos então $\Delta\mathcal{F}$ é injetora. (*isto não envolve topologias.*)

Demonstração. Se $x \neq y$ então existe $j \in I$ tal que $f_j(x) \neq f_j(y)$. Portanto $\Delta_{i \in I} f_i(x) \neq \Delta_{i \in I} f_i(y)$ e a função diagonal é injetora. $\square$

11.4.3 Famílias que separam pontos de fechados

Dependendo do ângulo de visão uma pessoa pode ficar escondida atrás de uma árvore.

Se a pessoa estiver camuflada, ter algum ângulo de visão em que ela não esteja grudada a árvore ajudaria reconhecer que ela não faz parte da árvore. No caso, se não enxergamos distâncias, só conseguimos saber se está encostado ou não, o que nos remete a fechados.

Definição 11.27. Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções tais que tal que $f_i : X \rightarrow Y_i$, onde Y_i é um espaço topológico para cada $i \in I$. Dizemos que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados de X se para cada $x \in X$ e todo F fechado com $x \notin F$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin f_i[F]$.

Teorema 11.28. Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ uma família de funções tais que tal que $f_i : X \rightarrow Y_i$, onde Y_i é um espaço topológico para cada $i \in I$. Se $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados então $\Delta\mathcal{F}[F]$ é fechado em $\Delta\mathcal{F}[X]$ para todo subconjunto fechado F de X .

Demonstração. Suponhamos que F seja fechado em X . Seja $y \in \Delta\mathcal{F}[X]$ com $y \in \overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i}$. Então existe $x \in X$ tal que $\Delta\mathcal{F}(x) = y = (f_i(x) : i \in I)$. Vamos mostrar que $x \in F$. Caso contrário, como $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados, existe $j \in I$ tal que $f_j(x) \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j}$. Assim $y = (f_i(x) : i \in I) \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$.

Como $\Delta\mathcal{F}[F] \subseteq \prod_{i \in I} f_i[F] \subseteq \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$, e o último conjunto é fechado, segue que $\overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i} \subseteq \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$. Como $y \notin \overline{f_j[F]}^{Y_j} \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} Y_i$, segue que $y \notin \overline{\Delta\mathcal{F}[F]}^{\prod_{i \in I} Y_i}$, contradição. Assim, $\Delta\mathcal{F}[F]$ é fechado em $\Delta\mathcal{F}[X]$. $\square$

Teorema 11.29. (Teorema de Imersão). Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções contínuas que separa pontos e separa pontos de fechados, então $\Delta\mathcal{F}$ é uma imersão.

Demonstração. Temos que $\Delta\mathcal{F}$ é uma função injetora e contínua. Então $\Delta\mathcal{F} : X \rightarrow \Delta\mathcal{F}[X]$ é uma bijeção contínua que leva fechados a fechados. Assim, a sua inversa, $(\Delta\mathcal{F})^{-1} : \Delta\mathcal{F}[X] \rightarrow X$ é contínua e portanto $\Delta\mathcal{F}$ é uma imersão contínua. $\square$

11.5 ‘Antes de imergir num produto, verifique se os equipamentos funcionam’.

11.5.1 Imersão de espaços T_0 .

Há como fazer a imersão de qualquer espaços T_0 usando o espaço $D = \{0, 1\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, \{0\}, D\}$. O espaço D é T_0 logo o produto de cópias de D é T_0 .

Proposição 11.30. Seja X um espaço T_0 e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em D . Então $\mathcal{F}$ separa pontos e separa pontos de fechados. Assim, $\Delta\mathcal{F}$ é uma imersão de X em $D^{\mathcal{F}}$.

Demonstração. O argumento da imersão é similar, pois estamos usando funções contínuas. Então basta provar que $\mathcal{F}$ separa pontos e separa pontos de fechados. Como o espaço X não precisa ser T_1 , separar fechados não implica separar pontos.

Dado $x \neq y$, devido a X ser T_0 podemos assumir que existe U aberto em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ (invertamos x e y caso contrário). Seja $f : X \rightarrow D$ tal que $f[U] = \{0\}$ e $f[X \setminus U] = \{1\}$. Temos que os abertos de D tem imagem inversa aberta: $f^{-1}[\{0\}] = U$ e $f^{-1}[D] = X$. Assim, f é contínua e $\mathcal{F}$ separa pontos.

Se $x \in X$, $x \notin F$ com F fechado então seja g tal que $g[X \setminus F] = \{0\}$ e $g[F] = \{1\}$. De modo análogo, g é contínua. Para finalizar $g(x) \notin g[F] = \{1\}$ e $\{1\}$ é fechado, pois seu complemento, $\{0\}$, é aberto em D . $\square$

11.5.2 Imersões de 0-dimensionais.

Definição 11.31. Um espaço topológico X é 0-dimensional se possui uma base de aberto-fechados (clopens), ou seja uma base em que para todo U da base de abertos, $U = \overset{\circ}{U} = \overline{U}$.

Proposição 11.32. Seja X um espaço 0-dimensional. Então as funções contínuas em $\{0, 1\}$ separam pontos de fechados.

Demonstração. Para cada U aberto e fechado, a função $f : X \rightarrow \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f[U] = \{0\}$ e $f[X \setminus U] = \{1\}$ é contínua. Como temos uma base de clopens, segue que X é completamente regular. $\square$

Teorema 11.33. Um espaço é 0-dimensional e Hausdorff se e somente se pode ser imerso no espaço $\{0, 1\}^J$, para algum conjunto de índices J , onde $\{0, 1\}$ é discreto.

Demonstração. Se X é 0-dimensional então a família $\mathcal{F}$ das funções contínuas de X em $\{0, 1\}$ separam pontos de fechados. Como X é T_1 também separa pontos. Assim, X pode ser imerso em $\{0, 1\}^{\mathcal{F}}$.

Por outro lado, fixe J um conjunto de índices. Note que ser 0-dimensional é uma propriedade topológica hereditária, pois a base de clopens do espaço gera uma base de clopens do subespaço. Ser 0-dimensional também é produtiva, por que os abertos básicos usando bases de clopens formam uma base de clopens do produto.

Como T_2 também é uma propriedade hereditária e produtiva e $\{0, 1\}$ é Hausdorff e 0-dimensional, então todo subespaço de $\{0, 1\}^J$ é 0-dimensional e T_2 . Assim, como 0-dimensional é propriedade topológica, todo subespaço imerso em $\{0, 1\}^J$ é 0-dimensional e T_2 . $\square$

Exemplo 11.34. O Ψ -espaço definido anteriormente usando sequências de racionais convergindo para irracionais, foi definido por uma base de clopens e é T_1 , assim é 0-dimensional e T_2 . Assim pode ser imerso num produto de $\{0, 1\}$'s.

Capítulo 12

Separando fechado de fechados.

12.1 Axiomas de separação para fechados e fechados.

12.1.1 Normalidade. T_4 .

Definição 12.1. Um espaço X é normal se dados dois subconjuntos fechados disjuntos F e G de X existem abertos disjuntos U e V tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$.

Teorema 12.2. São equivalentes para um espaço topológico X :

- 1) X é normal.
- 2) $X = O \cup W$ com O e W abertos então existem A e B fechados com $A \subseteq O$ e $B \subseteq W$ tal que $X = A \cup B$.
- 3) Se F e G são fechados disjuntos então existe U aberto de X tal que $F \subseteq U$ e $\overline{U} \cap G = \emptyset$.
- 4) Se F é fechado e $F \subseteq W$ com W aberto, então existe U aberto tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W$.

Demonstração. A verificação fica a cargo do leitor. □

Teorema 12.3. Normalidade é uma propriedade hereditária para fechados.

Demonstração. Seja Y um subespaço fechado de X , com X normal. Tome F e G fechados disjuntos de Y . Então F e G são fechados em X . Pela normalidade, existe U e V abertos disjuntos em X tal que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Então $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos disjuntos de Y tais que $F \subseteq U \cap Y$ e $G \subseteq V \cap Y$. □

Exemplo 12.4. (Espaço normal T_0 que não é T_1). Seja X o conjunto dos reais com a topologia gerada pelos intervalos $\{[r, +\infty[: r \in X\}$. O espaço é T_0 . O fecho de $\{x\}$ é $] - \infty, x]$. Assim o espaço não é T_1 e é normal, pois não há um par de fechados disjuntos não vazios. Se tomarmos um ponto que não pertence a um fechado, o ponto está à direita do fechado, assim, qualquer aberto que contém o fechado contém o ponto. Com isto, o espaço não é regular.

Proposição 12.5. Um espaço normal T_1 é regular.

Demonstração. Basta notar que pontos são fechados e usar a normalidade entre um ponto e um fechado para obter regularidade. □

Definição 12.6. Dizemos que um espaço é T_4 se é normal e T_1 .

Corolário 12.7. Espaços T_4 são T_3 .

12.1.2 ‘Colcha de retalhos’ ou ‘amarrar sapatos’?

Vamos provar um lema técnico que é usado na demonstração de que regular + base enumerável = normal e regular + espaço enumerável = normal. Ela será usada novamente quando definirmos espaços Lindelöf. Alguns autores chamam o método de “shoe lacing”.

Lema 12.8. Sejam F e G fechados e $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ tais que $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, $G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}) \cap G = \emptyset$ e $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}) \cap F = \emptyset$. Então existem A e B abertos disjuntos tais que $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$.



equiv normalidade.jpg

Figura 12.1: Equivalências de normalidade.

Demonstração. Note que não precisaríamos fazer nada se $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}$ ou $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n}$, pois nesse caso teríamos $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n} \cap G = \emptyset$ ou $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} \cap F = \emptyset$ que é testemunha para a normalidade para F e G .

A ideia é ‘remover rebarbas’ de U_n e V_n para que as uniões do que sobrar dos U_n e do V_n fiquem disjuntas. Só que é preciso tomar o cuidado de não ‘cortar demais’, para que a união ainda cubra F e G .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $U_n^* = U_n \setminus \overline{\bigcup_{m \leq n} V_m}$ e $V_n^* = V_n \setminus \overline{\bigcup_{m \leq n} U_m}$. Defina então $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$ e $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$. A e B são abertos pois são uniões de abertos.

Note que $F \cap \overline{\bigcup_{i \leq n} V_i} = F \cap \bigcup_{i \leq n} \overline{V_i} = \emptyset$ por que estamos tomando o fecho de uma união finita. Similarmente, $G \cap \overline{\bigcup_{i \leq n} U_i} = \emptyset$. Assim, temos que a parte removida de U_n e V_n não foi demasiada, pois $F \cap U_n = F \cap U_n^*$ e assim $F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^* = F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = F$ e portanto $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^* = A$. De modo análogo, $G \subseteq B$.

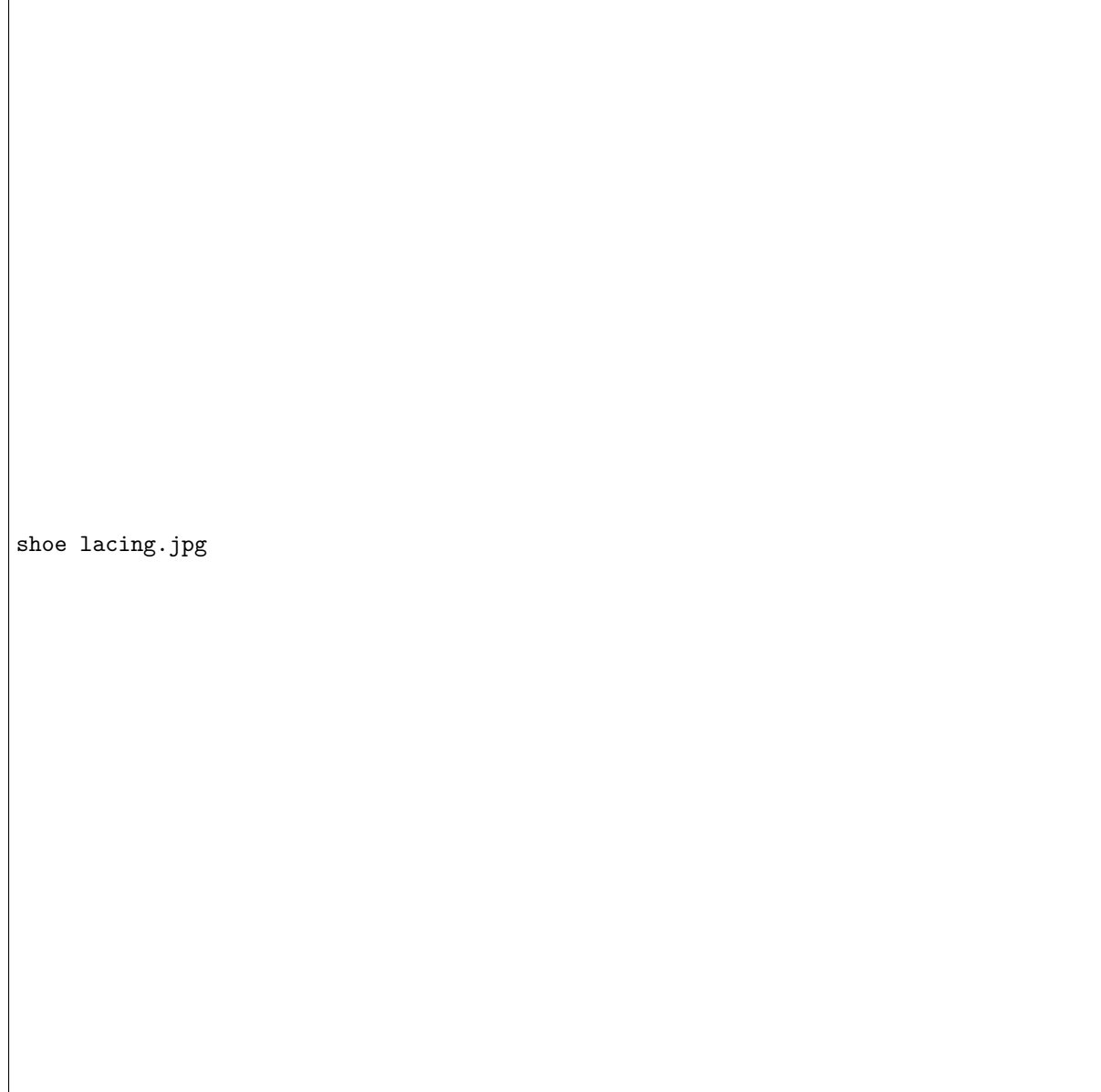
Resta verificar A e B são disjuntos. Suponhamos por contradição que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$ se intersectam e tome $x \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*)$. Em particular, $x \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n)$. Tome k mínimo tal que $x \in U_k$ ou $x \in V_k$. Neste caso, temos que $x \notin U_l \cup V_l$ para $l < k$. Em particular, $x \notin U_l^*$ e $x \notin V_l^*$.

para cada $l < k$.

Se $x \in U_k$ então $x \in \overline{\bigcup_{n \leq m} U_n}$ para todo $m \geq k$, assim temos que $x \notin V_m \setminus \overline{\bigcup_{n \leq m} U_n} = V_m^*$ para todo $m \geq k$. Assim, $x \notin V_m^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma contradição.

Se $x \in V_k$, por um argumento análogo, temos que $x \notin U_m^*$ para todo $m \geq k$. Assim, $x \notin U_m^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma contradição.

Assim $x \notin U_k \cup V_k$ contradizendo a existência de k . Assim, não existe x na interseção e os abertos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^*$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$ são disjuntos. $\square$



shoe lacing.jpg

Figura 12.2: O ‘Shoe-lacing’.

12.1.3 Regular + algo enumerável = normal.

Teorema 12.9. Se X é regular e enumerável então X é normal. Se X é regular e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade então X é normal.

Demonstração. Seja X um espaço regular enumerável e sejam F e G fechados disjuntos. Enumere $F = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $G = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pela regularidade, como $a_n \notin G$ existe U_n aberto contendo a_n

tal que $\overline{U_n} \cap G = \emptyset$. Como $b_n \notin F$, também segue da regularidade que existe V_n aberto contendo b_n tal que $\overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Esta família satisfaz as condições para que existam abertos disjuntos contendo F e G . Portanto X é normal.

Se X é um espaço regular satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade, fixe $\mathcal{B}$ uma base enumerável de abertos.

Seja $\mathcal{B}_F = \{O \in \mathcal{B} : \exists x \in F, x \in O \text{ e } \overline{O} \cap G = \emptyset\}$ e $\mathcal{B}_G = \{O \in \mathcal{B} : \exists x \in G, x \in O \text{ e } \overline{O} \cap F = \emptyset\}$. Vamos checar que $\bigcup \mathcal{B}_F \supseteq F$. De fato, se $x \in F$ então $x \notin G$ e pela regularidade e o fato de $\mathcal{B}$ ser base, existe $O \in \mathcal{B}$ tal que $x \in O$ e $\overline{O} \cap G = \emptyset$. Assim, $x \in O \in \mathcal{B}_F$. De modo análogo, teremos $\bigcup \mathcal{B}_G \supseteq G$. Basta então enumerar $\mathcal{B}_F = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{B}_G = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como no caso anterior, isto testemunha a normalidade. $\square$

12.2 ‘Conte comigo para encontrar um espaço que não é normal’.

12.2.1 Cardinalidade de conjuntos.

Definição 12.10. Dados dois conjuntos A e B dizemos que $|A| \leq |B|$ se existe uma função injetora $f : A \rightarrow B$.

A definição acima pode ser feita sem se preocupar com o Axioma da Escolha. O próximo teorema também pode ser demonstrado sem o Axioma da Escolha:

Teorema 12.11. (Cantor-Bernstein) Dados dois conjuntos A e B , se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ então uma função bijetora $f : A \rightarrow B$.

A prova do teorema acima (sem usar o Axioma da Escolha) é feito no curso de Teoria dos Conjuntos. Para poder apreciar por que o Axioma da Escolha não é usado precisa ver o Teorema da recursão (também estudado no curso de Teoria dos Conjuntos).

Definição 12.12. Dizemos que $|A| = |B|$ se existe uma bijeção entre A e B .

Dizemos que X é enumerável se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Um conjunto A é finito se e somente se existe um natural n tal que $|A| = |n|$.

Com o Axioma da Escolha, temos que um conjunto X é infinito se e somente se $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Sob o Axioma da Escolha, um conjunto é finito se e somente se não existe uma função injetora de $\mathbb{N}$ em X , mas isto não é equivalente a ser finito sem assumir alguma forma fraca do Axioma da Escolha.

Note que a princípio o $|A|$ usado para a desigualdade e na igualdade poderiam não ter correlação direta. Elas têm pelo teorema de Cantor-Bernstein.

Não podemos pensar em $|A|$ como uma classe de equivalência por que $|A|$ não é um conjunto. Existe porém uma forma de encontrar um representante bem definido quando assumimos o Axioma da Escolha. Então sob o Axioma da Escolha, teremos um conjunto κ que denotaremos $|A| = \kappa$.

Iremos comentar sobre isso quando falarmos de boa ordem. Por enquanto $|A|$ se refere a comparar a cardinalidade de um conjunto com o do outro usando funções injetora e bijetoras.

Podemos comparar cardinalidade usando funções sobrejetoras quando temos o Axioma da Escolha (se existe uma função sobrejetora de B em A então existe uma injetora de A em B).

Definição 12.13. Se A e B são disjuntos então $|A| + |B|$ é a cardinalidade de $A \cup B$. Se A e B não são disjuntos tome A' e B' com as cardinalidade de A e B com A' e B' disjuntos e tome $|A| + |B| = |A' \cup B'|$. Se A e B são conjuntos $|A| \cdot |B|$ é a cardinalidade de $A \times B$.

Vamos assumir os seguintes resultados:

Proposição 12.14. A soma e produto de cardinais é bem definida, é comutativa e associativa.

Para todo A e B temos $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ ou $|B| < |A|$. (Isto é equivalente ao Axioma da Escolha).

Se B é infinito e $|A| < |B|$ então $|B \setminus A| = |B|$.

$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

$|A \cup B| \leq |A| + |B|$.

Se A e B são infinitos então $|A| \cdot |B| = |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$. (Levando em consideração a ‘ordem’).

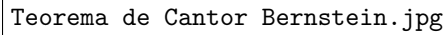


Figura 12.3: O Teorema de Cantor-Bernstein.

Note que dos resultados acima, temos que o conjunto dos irracionais tem a mesma cardinalidade dos reais.

Teorema 12.15. (Cantor) Seja A um conjunto. Então não existe uma função injetora de $\mathcal{P}(A)$ em A .

Demonstração. A prova é feita por um argumento diagonal.

Suponha por absurdo que existe $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$. Seja $B = \{f(x) : f(x) \notin x\}$. Como $B \in \mathcal{P}(A)$, temos que $f(B)$ está definido.

Se $f(B) \in B$ então pela definição de B , temos que $f(B) \notin B$, uma contradição. Se $f(B) \notin B$ então $f(B)$ satisfaz a propriedade para estar em B , assim $f(B) \in B$, novamente uma contradição. Assim, $f(B)$ não está bem definida e portanto f não existe. $\square$

12.2.2 Usando cardinalidade para mostrar que um espaço não é normal.

Teorema 12.16. Se X é um espaço normal com $D \subseteq X$ denso e A é um subconjunto fechado e discreto de X com A e D infinitos. Então $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(D)|$.

Demonstração. A primeira coisa a notar é que todo subconjunto de A é fechado. De fato, $A \setminus B$ é aberto em A , assim $B = A \setminus (A \setminus B)$ é fechado em A . Como A é fechado em X , segue que B é fechado em X .

Pela normalidade de X , para cada $B \in \mathcal{P}(A)$, podemos fixar um aberto U_B tal que $B \subseteq U_B$ e $\overline{U_B} \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

Seja $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(D)$ dada por $B \mapsto U_B \cap D$. Vamos provar que f é injetora. Antes, lembramos que o fecho de um aberto por um denso é igual ao fecho desse aberto. Se $B \neq C$ e ambos são subconjuntos de X , podemos assumir que $B \setminus C \neq \emptyset$ (caso contrário trocamos a ordem de B e C). Seja $x \in B \setminus C$. Então $x \in B \subseteq \overline{U_B} = \overline{U_B} \cap \overline{D}$. Por outro lado, $x \in A \setminus C$ e $\emptyset = (A \setminus C) \cap \overline{U_C} = (A \setminus C) \cap \overline{U_C} \cap \overline{D}$, assim $x \notin \overline{U_C} \cap \overline{D}$. Logo $\overline{U_B} \cap \overline{D} \neq \overline{U_C} \cap \overline{D}$, o que implica que $U_B \cap D \neq U_C \cap D$. Assim, $f(B) \neq f(C)$, como queríamos. $\square$

Exemplo 12.17. (Um espaço que não é normal). Tomemos o Ψ -espaço visto anteriormente, onde o conjunto dos racionais é denso e o conjunto dos irracionais é fechado e discreto. Como os racionais tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$ e os irracionais tem a mesma cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| \not\leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, segue que o espaço não pode ser normal. Como visto anteriormente, é um espaço T_3 .

Exemplo 12.18. O Plano de Niemytski. Mais um espaço que não é T_4 .

Demonstração. A prova da não normalidade do Plano de Niemytski segue o argumento de contagem. Temos um denso enumerável (os pares de racionais no semiplano superior aberto são densos por que todos os elementos da base contém uma bola do $\mathbb{R}^2$ contida no semiplano superior aberto). O espaço é Hausdorff por que a topologia é mais fina do que a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^2$. Veremos mais tarde que ela satisfaz axiomas mais fortes que T_2 . $\square$

12.3 ‘Tem alguém não-normal aí?’.

12.3.1 Espaços hereditariamente normais. Espaços T_5 .

Eventualmente provaremos que normalidade não é uma propriedade hereditária. Porém já podemos mostrar que normalidade não é uma propriedade produtiva.

Definição 12.19. Dizemos que X é um espaço hereditariamente normal se todo subespaço de X é normal. Dizemos que um espaço é T_5 se é hereditariamente normal e T_1 .

Exemplo 12.20. Todo espaço pseudométrico é hereditariamente normal.

Demonstração. Todo espaço métrico é normal já que os fechados disjuntos podem ser separados por uma função contínua f . De fato, se F e G são fechados, vimos que existe f contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$ então $f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$ e $f^{-1}[[\frac{1}{2}, 1]]$ testemunham a normalidade para F e G . Como todo subespaço de um métrico é métrico, segue que todo subespaço é normal. $\square$

Teorema 12.21. Um espaço X é hereditariamente normal se e somente se todos os subespaços abertos de X são normais.

Demonstração. A ida é óbvia. Vamos provar a volta. Seja Y um subconjunto de X e F e G dois fechados disjuntos de Y .

Note que se $\overline{F}^X$ e $\overline{G}^X$ são disjuntos segue da normalidade de X (*esta linha é desnecessária, sai do argumento abaixo, com $W = X$.*)

Temos que $\overline{F}^X \cap \overline{G}^X \neq \emptyset$ é um fechado. Então tome $W = X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X)$. Note que $Y \subseteq W$ (e em particular $F \cup G \subseteq W$), de fato temos $Y \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = (Y \cap \overline{F}^X) \cap (Y \cap \overline{G}^X) = F \cap G = \emptyset$. E portanto $Y \subseteq X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = W$. Temos que $\overline{F}^W$ e $\overline{G}^W$ são fechado de W . Vamos mostrar que estes fechados de W são disjuntos. De fato, $\overline{F}^W \cap \overline{G}^W = (\overline{F}^X \cap W) \cap (\overline{G}^X \cap W) = W \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = (X \setminus (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X)) \cap (\overline{F}^X \cap \overline{G}^X) = \emptyset$. Assim, usando a normalidade de W (pois W é aberto), existem U e V abertos disjuntos de W tais que $\overline{F}^W \subseteq U$ e $\overline{G}^W \subseteq V$. Assim $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos disjuntos de Y tais que $F \subseteq U \cap Y$ e $G \subseteq V \cap Y$. Assim, Y é normal. $\square$

Para um outra equivalência de hereditariamente normal, precisamos de uma definição.

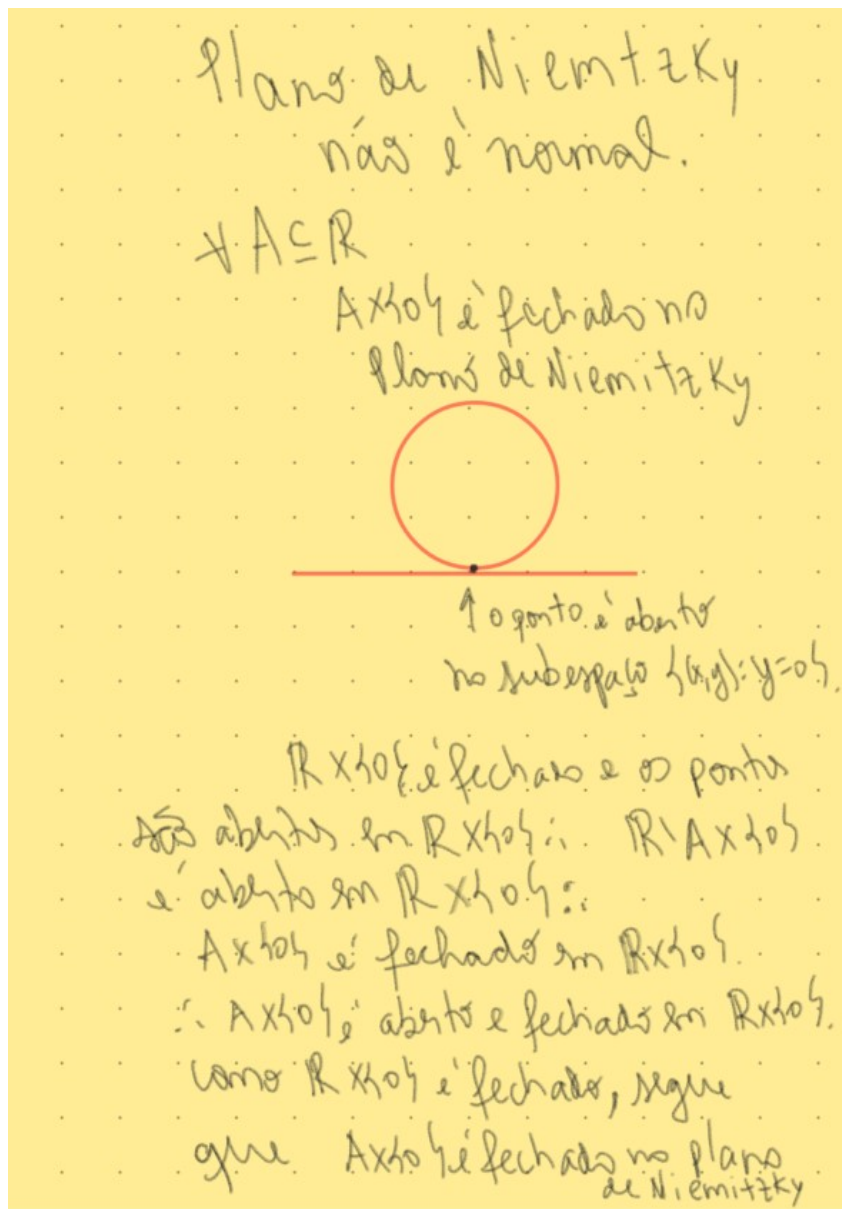


Figura 12.4: O plano de Niemytzky não é normal.

Definição 12.22. Dizemos que um par de subconjuntos A e B de um espaço topológico X são separados se $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Claramente estas propriedades são topológicas.

Teorema 12.23. Um espaço é hereditariamente normal se e somente se para todo par de conjuntos separados A e B existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Demonstração. Suponhamos que X seja hereditariamente normal. Tome A e B separados em X . Então $W = X \setminus \bar{A}^X \cap \bar{B}^X$ é um subconjunto aberto. Similarmente à prova da outra equivalência, temos que $\bar{A}^W$ e $\bar{B}^W$ são fechados disjuntos de W . Assim, existem abertos disjuntos U e V de W tais que $A \subseteq \bar{A}^W \subseteq U$ e $B \subseteq \bar{B}^W \subseteq V$. Como W é aberto em X , temos que U e V são abertos de X .

Para a recíproca, basta provar que todo subconjunto aberto W de X é normal. Seja F e G subconjuntos fechados disjuntos de W . Então $W \setminus F$ é aberto em W , portanto aberto em X . Portanto $F \subseteq X \setminus (W \setminus F)$ com $X \setminus (W \setminus F)$ fechado e portanto $\bar{F}^X \subseteq X \setminus (W \setminus F)$. Assim $\bar{F}^X \cap G \subseteq \bar{F}^X \cap (W \setminus F) = \emptyset$. Por um argumento similar, temos $\bar{G}^X \cap F = \emptyset$. Portanto F e G são separados em X . Por hipótese, existem abertos disjuntos U e V tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Então $U \cap W$ e $V \cap W$ são testemunhas da normalidade de W para F e G . $\square$

12.3.2 ‘Ser normal não é sempre produtivo’.

Exemplo 12.24. A reta de Sorgenfrey é hereditariamente normal.

Demonstração. Seja W um aberto na reta de Sorgenfrey X . Sejam F e G subconjuntos fechados de W . Para cada $x \in F$ existe um intervalo $[x, a_x[$ contido em W tal que $x \in [x, a_x[$ e $[x, a_x[\cap G = \emptyset$. Para cada $y \in G$ existe um intervalo aberto $[y, b_y[$ contido em W tal que $y \in [y, b_y[$ e $[y, b_y[\cap F = \emptyset$.

Tome $U = \bigcup_{x \in F} [x, a_x[$ e $V = \bigcup_{y \in G} [y, b_y[$. Resta verificar que U e V são disjuntos. Se este não é o caso, existe $z \in W$, $x \in F$ e $y \in G$ tal que $z \in [x, a_x[\cap [y, b_y[$. Temos então $x \leq z < a_x$ e $y \leq z < b_y$. Primeiro note que $x \neq y$, pois $x \in F$, $y \in G$ e $F \cap G = \emptyset$. Se $x < y$ então $x < y \leq z < a_x$ e $[x, a_x[\cap G \neq \emptyset$, contradição. Se $y < x$ então $y < x \leq z < b_y$ e $[y, b_y[\cap F \neq \emptyset$, contradição. Logo $U \cap V = \emptyset$ e U e V testemunham a normalidade de F e G em W . $\square$

Exemplo 12.25. Normalidade e normalidade hereditária não são propriedades produtivas.

Demonstração. Bastará mostrarmos que o quadrado do espaço de Sorgenfrey não é normal. Primeiro, note que $\{[x, x + \epsilon[\times [y, y + \epsilon[: x, y \in X\}$ é uma base de abertos de $X \times X$. Seja Q o conjunto dos racionais (não iremos escrever $\mathbb{Q}$ por que a topologia usada aqui não é a da reta real). Então claramente $Q \times Q$ é denso em $X \times X$.

Seja $A = \{(x, -x) : x \in X\}$. O conjunto A é um fechado na topologia produto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e a topologia de $X \times X$ é mais fina, assim, A é fechada na topologia de $X \times X$. Temos que $A \cap ([x, x+1[\times [-x, -x+1]) = \{(x, -x)\}$ (pois $y \geq x$ implica que $-y \leq -x$). Assim, A é um subespaço fechado e discreto em A . Vimos que se $X \times X$ fosse normal, teríamos $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(Q \times Q)|$, mas $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))|$ e $|\mathcal{P}(Q \times Q)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, contradizendo o teorema de Cantor. $\square$



quadrado de Sorgenfrey.jpg

Figura 12.5: O produto cartesiano de retas de Sorgenfrey é não normal.

Capítulo 13

Básico de Compacidade.

13.1 ‘Não só de fechado e limitado vive o compacto’.

A palavra compacto = ‘fechado e limitado’ vale para subespaços de $\mathbb{R}^n$, mas não é a noção geral de compacidade.

13.1.1 Bê-á-bá da compacidade.

Definição 13.1. Dado X , dizemos que $\mathcal{M}$ é uma cobertura ou recobrimento de X se $\bigcup \mathcal{M} = X$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma subcobertura ou subrecobrimento de $\mathcal{M}$ se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ e $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup \mathcal{M} = X$. Se todos os elementos de $\mathcal{M}$ tem alguma propriedade como aberto, fechado, clopen etc.. dizemos que temos um cobertura aberta, fechada, clopen etc...

A ideia é que compacto deve tentar preservar um pouco da finitude. Como uma quantidade de abertos interessantes fossem ‘pontos’.

Definição 13.2. Dado X um espaço topológico, dizemos que X é compacto se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura aberta finita, ou seja se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X então existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finita tal que $\bigcup \mathcal{U}' = X$.

Note que não estamos assumindo nenhum axioma de separação para definir compacidade. Vamos provar alguns resultados básicos para espaços compactos arbitrários.

Primeiro deles é falar sobre a compacidade de um subespaço usando abertos do espaço:

Proposição 13.3. Um subespaço $Y \subseteq X$ é compacto se e somente se para toda família $\mathcal{U}$ de abertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ então existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ (note que $\bigcup \mathcal{U}'$ não precisa ser igual a $\bigcup \mathcal{U}$).

Demonstração. ($\leftarrow$). Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura de Y . Como Y é subespaço de X , podemos fixar $\mathcal{U} = \{U \in \tau_X : U \cap Y \in \mathcal{V}\}$. Claramente para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V = U \cap Y$. Assim, $\bigcup \mathcal{U} \supseteq Y$. Por hipótese existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Assim $Y = (\bigcup \mathcal{U}') \cap Y = \bigcup \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}'\}$. Temos que $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}'\} \subseteq \mathcal{V}$ e assim encontramos uma subcobertura finita de $\mathcal{V}$.

($\rightarrow$). Seja $\mathcal{U}$ uma família de abertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Temos que $\mathcal{V} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura aberta de Y . Por hipótese, existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\bigcup \mathcal{V}' = Y$. Para cada $V \in \mathcal{V}'$, fixe $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V = U_V \cap Y$ (note que $\{U : U \cap Y = V\}$ pode ser um conjunto infinito). Então $\mathcal{U}' = \{U_V : V \in \mathcal{V}'\}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}' \supseteq \bigcup \mathcal{V}' = Y$. $\square$

Corolário 13.4. Subespaços fechados de um compacto X são compactos.

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma família de abertos de X tal que $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Como F é um fechado, $X \setminus F$ é aberto e portanto $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X . Pela compacidade de X segue que existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finita tal que $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}'$ é recobrimento finito de $\{X \setminus F\} \cup \mathcal{U}$. Como $X \setminus F \cap F = \emptyset$, segue que $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Como $\mathcal{U}$ era arbitrária, segue que F é compacta. $\square$

Teorema 13.5. Seja X um espaço. São equivalentes:

- 1) Um espaço é compacto.
- 2) toda família de fechados com PIF tem intersecção não vazia.
- 3) toda rede possui ponto de acumulação.
- 4) toda rede possui uma subrede convergente.
- 5) todo filtro possui ponto de acumulação.
- 6) todo filtro pode ser estendido a um filtro convergente.

Demonstração. (1) $\rightarrow$ 2)). Suponha que X possui uma família $\mathcal{F}$ de fechados com PIF cuja intersecção é vazia. Então $\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma cobertura de X (note que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X \setminus (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = X$) e sem subcobertura finita. Assim, X não é compacto.

(2) $\rightarrow$ 3)). Suponha que $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ é uma rede. Seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$. Então $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família com PIF. Portanto, $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Fixe $x \in \bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Logo o filtro $\mathcal{F}$ tem x como ponto de acumulação e pela dualidade, $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ tem x como ponto de acumulação.

(3) $\rightarrow$ 4)). Já visto que toda rede que acumula num ponto possui uma rede que converge para este ponto.

(4) $\rightarrow$ 5)). Dado um filtro, tome a rede S associada. Por hipótese, a rede possui uma subrede que converge para x . Assim, a rede tem x como ponto de acumulação. Pela dualidade, x é ponto de acumulação do filtro.

(5) $\rightarrow$ 6)). Já foi visto que se um filtro acumula para um ponto então existe uma extensão do filtro que converge para o ponto.

(6) $\rightarrow$ 1)). Seja X um espaço que não é compacto. Então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ sem cobertura finita. Assim, $\mathcal{C} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ possui PIF. Tome $\mathcal{F}$ um filtro estendendo o filtro gerado por $\mathcal{C}$. Então $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap \mathcal{C} = \emptyset$. Assim, $\mathcal{F}$ não tem ponto de acumulação e portanto não converge. Assim, o filtro gerado por $\mathcal{C}$ não satisfaz a condição 6). □

Definição 13.6. Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço topológico X . Dizemos que x é um ponto de acumulação completo de X se $|U \cap A| = |A|$, para cada vizinhança U de x .

Teorema 13.7. Se X é compacto então todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação completo.

Demonstração. Suponha que A é infinito e não tem ponto de acumulação completo. Para cada $x \in X$ tome U_x vizinhança aberta de x tal que $|U_x \cap A| < |A|$. Então $\{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X . Qualquer subfamília é da forma $\{U_x : x \in X'\}$, onde $X' \subseteq X$ é finito. Agora, $A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\} = \bigcup \{A \cap U_x : x \in X'\}$. Assim, $|A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\}| = |\bigcup \{A \cap U_x : x \in X'\}| \leq \sum_{x \in X'} |A \cap U_x| < |A|$. Logo $A \cap \bigcup \{U_x : x \in X'\} \neq A$. Assim esta cobertura aberta testemunha que X não é compacto. □

A recíproca do resultado acima também vale, mas iremos usar boa ordem, por isso ela será feita quando retornamos a equivalências do Axioma da Escolha.

Definição 13.8. Dizemos que Y é uma imagem contínua de X se existe uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f[X] = Y$.

Proposição 13.9. A imagem contínua de um compacto é um compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de Y . Pela continuidade da f , temos que $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe $\mathcal{V}'$ subcobertura finita de $\mathcal{V}$. Fixe $\mathcal{U}'$ finita tal que $\mathcal{V}' = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}'\}$. Então $Y = f[X] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} f[V] = \bigcup_{V \in \mathcal{U}'} U = \bigcup \mathcal{U}'$. Assim, $\mathcal{U}'$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é arbitrário, segue que Y é compacto. □

Proposição 13.10. Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos de X . Então X é compacto se e somente se toda cobertura de abertos por elementos de $\mathcal{B}$ possui uma subcobertura finita.

Demonstração. A ida é verdade, pois os elementos de $\mathcal{B}$ são abertos.

Para a volta, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Seja $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U}, V \subseteq U\}$. Primeiro, note que $\mathcal{V}$ é uma cobertura. De fato, dado $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Assim, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$ e portanto $x \in V \in \mathcal{V}$. Por hipótese, existe $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V}$ finito tal que $\mathcal{V}^*$ é uma subcobertura de $\mathcal{V}$. Para cada $V \in \mathcal{V}^*$, fixe $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$ (existe pela definição de $V \in \mathcal{V}$). Assim, $\{U_V : V \in \mathcal{V}^*\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$, pois $\bigcup_{V \in \mathcal{V}^*} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}^*} U_V$. □

13.1.2 Compactos com axiomas de separação.

Vimos que subespaços fechados de compactos são compactos. A recíproca não vale em geral:

Exemplo 13.11. Seja X o conjunto dos naturais com a topologia co-finita. Então o único fechado infinito é X . O espaço X é compacto e T_1 .

Tome Y o conjunto dos pares. O conjunto Y na topologia de subespaço tem a topologia co-finita em Y e é um subconjunto compacto, mas não é fechado em X .

Teorema 13.12. Se X é Hausdorff e $F \subseteq X$ é compacto então F é fechado.

Demonstração. Para cada $x \in X \setminus F$, e $y \in F$, existe U_y e V_y abertos disjuntos tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$. Assim $F \subseteq \bigcup \{V_y : y \in F\}$. Pela compacidade de F , existe $F^* \subseteq F$ finita tal que $F \subseteq \bigcup \{V_y : y \in F^*\}$. Tome $U = \bigcap_{y \in F^*} U_y$. Então $U \cap F \subseteq U \cap (\bigcup_{y \in F^*} V_y) = \bigcup_{y \in F^*} (U \cap V_y) \subseteq \bigcup_{y \in F^*} (U_y \cap V_y) = \emptyset$. Como $x \in X \setminus F$ é arbitrário, segue que $X \setminus F$ é aberto e portanto F é fechado. $\square$

Corolário 13.13. Se X é compacto T_2 então X é regular.

Demonstração. Seja $x \in X$ e F um fechado que não contém x . Temos que F é compacto, e pela prova do teorema U e $V = \bigcup \{V_y : y \in F^*\}$ são abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$. Assim, X é regular. $\square$

Teorema 13.14. Se X é regular e compacto então X é normal.

Demonstração. O argumento é similar ao que já foi feito acima. Tome F e G fechados disjuntos. Para cada $x \in F$, temos que $x \notin G$, assim existe U_x e V_x abertos disjuntos tais que $x \in U_x$ e $G \subseteq V_x$. Pela compacidade de F existe $F' \subseteq F$ finito tal que $F \subseteq \bigcup \{U_x : x \in F'\}$. Tome $V = \bigcap \{V_x : x \in F'\}$. Então U e V são abertos disjuntos tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. $\square$

Corolário 13.15. Se X é compacto T_2 então X é T_4 .

O resultado de que compactos regulares são normais segue da demonstração de 'shoe-lacing', o que neste caso é um desperdício de notação por que estamos usando uma quantidade finita de abertos. Veremos uma demonstração usando o 'shoe-lacing' para espaços Lindelöf, quando falarmos sobre propriedades relacionadas à compacidade.

13.1.3 Três provas de que produto finito de compactos é compacto.

Vimos que normalidade não era produtiva. A compacidade é produtiva, mas o caso geral será feito mais tarde.

Teorema 13.16. Se X e Y são compactos então $X \times Y$ é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ a base dos abertos básicos de $X \times Y$.

Tome $\mathcal{W}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$ contida em $\mathcal{B}$. Para cada $x \in X$, temos que $\{x\} \times Y$ é um subespaço homeomorfo a Y portanto, compacto. Então existe $\mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{W}$ finita tal que $\bigcup \mathcal{W}_x \supseteq \{x\} \times Y$. Seja $U_x = \bigcap \{U : x \in U, \exists V (U \times V \in \mathcal{W}_x)\}$. Por ser uma interseção finita de abertos contendo x , U_x é uma vizinhança aberta de x . Então $\{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X .

Assim, existe $X_0 \subseteq X$ finito tal que $\{U_x : x \in X_0\}$ é uma subcobertura finita de $\{U_x : x \in X\}$. Afirmamos que $\mathcal{W}^* = \bigcup_{x \in X_0} \mathcal{W}_x$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{W}$. Claramente $\mathcal{W}^* \subseteq \mathcal{W}$ e é finita. Para ver que $\mathcal{W}^*$ recobre $X \times Y$, fixe $(x, y) \in X \times Y$. Por hipótese, existe $x_0 \in X_0$ tal que $x \in U_{x_0}$. Por hipótese, $\bigcup \mathcal{W}_{x_0} \supseteq \{x_0\} \times Y$. Assim, existe $U \times V \in \mathcal{W}_{x_0}$ tal que $(x_0, y) \in U \times V$. Então $x \in U_{x_0} \subseteq U$ e $y \in V$. Assim, $(x, y) \in U \times V \in \mathcal{W}_{x_0} \subseteq \mathcal{W}^*$. $\square$

Exercício 13.17. (Tentativa de usar redes). Seja $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$ uma rede em $X \times Y$. Então $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ é uma rede em X e $(y_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ é uma rede em Y . Pela compacidade de X e Y existem $a \in X$ e $b \in Y$ e subredes $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ e $(b_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ que convergem para a e b respectivamente. Seja $\theta_x : \Sigma \rightarrow \Lambda$ e $\theta_y : \Gamma \rightarrow \Lambda$ tais que $a_\sigma = x_{\theta_x(\sigma)}$ e $b_\gamma = y_{\theta_y(\gamma)}$.

1) qual o problema de tentar usar a rede $((a_\sigma, b_\gamma) : (\sigma, \gamma) \in \Sigma \times \Gamma)$?

2) qual o problema de tentarmos usar $(\Sigma, \Gamma)^* = \{(\sigma, \gamma) \in \Sigma \times \Gamma : \theta_x(\sigma) = \theta_y(\gamma)\}$ e a rede $((a_{\sigma, \gamma}, b_{\sigma, \gamma}) : (\sigma, \gamma) \in (\Sigma, \Gamma)^*, \text{ onde } (a_{\sigma, \gamma}, b_{\sigma, \gamma}) = (a_\sigma, b_\gamma) \text{ para todo } (\sigma, \gamma) \in (\Sigma, \Gamma)^*)$?

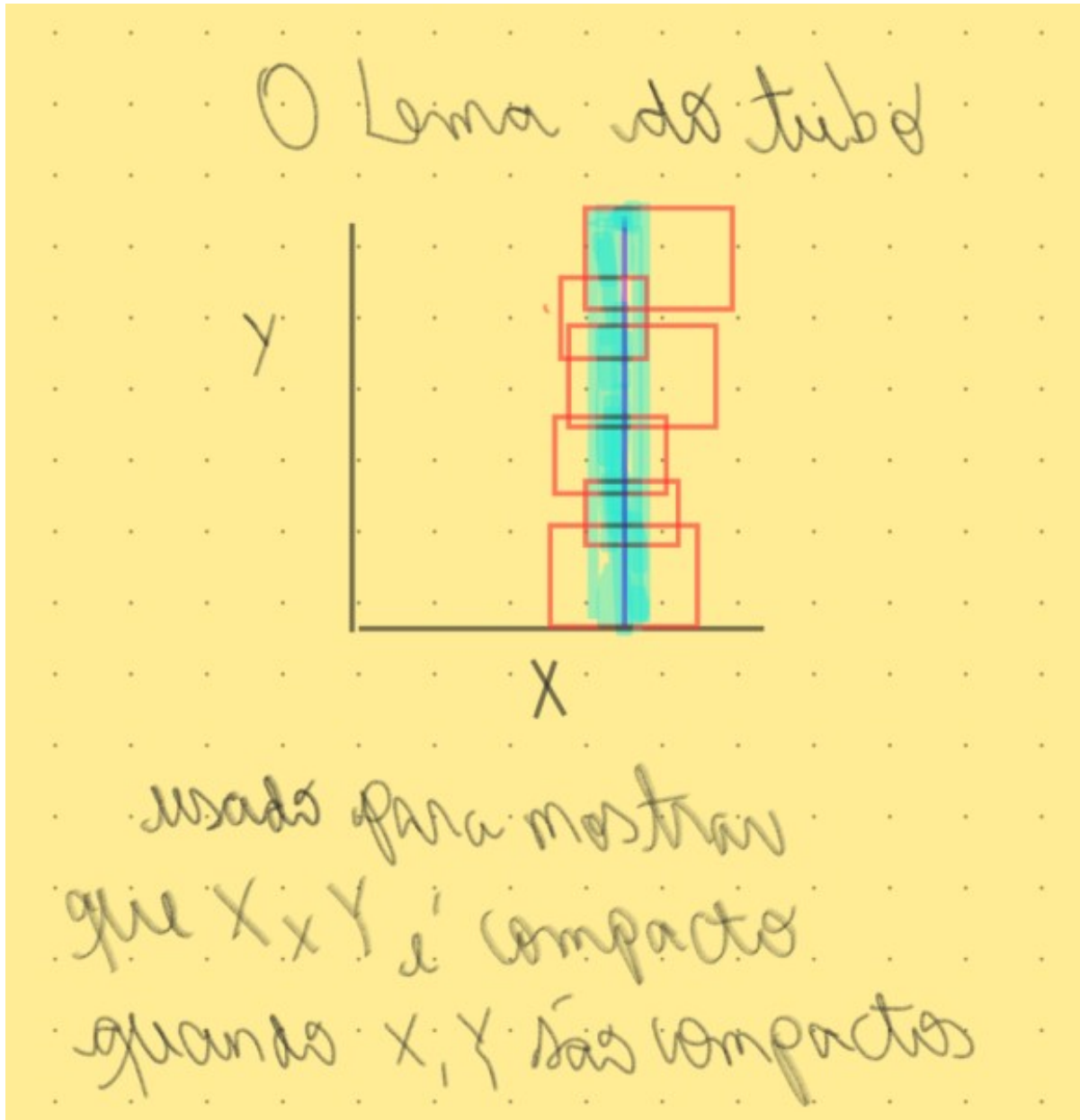


Figura 13.1: O lema do Tubo - produtos de dois compactos é compacto.

Demonstração. (Usando redes). Seja $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$ uma rede em $X \times Y$. Então $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ é uma rede em X .

Pela compacidade de X existem $x \in X$ e uma subrede $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ de $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ que converge para x . Seja $\theta_1 : \Sigma \rightarrow \Lambda$ a testemunha que é subrede, ou seja, tal que $a_\sigma = x_{\theta_1(\sigma)}$. Podemos definir $(b_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ uma subrede de $(y_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ de modo que $b_\sigma = y_{\theta_1(\sigma)}$. Então $((a_\sigma, b_\sigma) : \sigma \in \Sigma)$ é um subrede de $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$. Agora, $(b_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ é uma rede em Y . Pela compacidade de Y existe uma subrede $(v_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ que converge para $y \in Y$ e $\theta_2 : \Gamma \rightarrow \Sigma$ a testemunha que é subrede, ou seja $v_\gamma = b_{\theta_2(\gamma)}$. Defina $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ tal que $u_\gamma = a_{\theta_2(\gamma)}$. Então $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ é uma subrede de $(a_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ e portanto $(u_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ converge para x . Logo, $((u_\gamma, v_\gamma) : \gamma \in \Gamma)$ é uma subrede de $((a_\sigma, b_\sigma) : \sigma \in \Sigma)$. Como subrede de subrede é subrede, segue que $((u_\gamma, v_\gamma) : \gamma \in \Gamma)$ é uma subrede de $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$. Como a primeira coordenada da subrede converge para x e a segunda converge para y segue que a rede $((x_\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda)$ possui uma subrede que converge para (x, y) . Assim, $X \times Y$ é compacto. $\square$

Note que num produto infinito, não poderíamos usar este mesmo argumento para ir achando subredes

de subredes infinitas vezes.

Demonstração. (Usando filtros) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em $X \times Y$ e π_X e π_Y as projeções em X e Y respectivamente. Seja $\mathcal{F}_X$ o filtro gerado por $\{\pi_X[F] : F \in \mathcal{F}\}$. Como X é compacto, existe $x \in X$ e um filtro estendendo $\mathcal{F}_x$ que converge para x . Seja $\mathcal{V}_x$ o sistema de vizinhanças de x em X . Então pela definição de convergência, segue que $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{F}_X$ tem PIF (pois está contido na extensão de $\mathcal{F}_X$ que converge para x).

Afirmamos que $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$ tem PIF. Como $\mathcal{F}$ tem PIF e $\{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$ tem PIF, basta mostrar que $F \cap (U \times Y) \neq \emptyset$ para $F \in \mathcal{F}$ e $U \in \mathcal{V}_x$. Mas $F \cap (U \times Y) \neq \emptyset$ se e somente se $\pi_X[F] \cap U \neq \emptyset$ (de fato, $(a, b) \in F \cap (U \times Y) \leftrightarrow (a, b) \in F$ e $a \in U \leftrightarrow a \in \pi_X[F]$ e $a \in U \leftrightarrow \pi_X[F] \cap U$). O último termo da equivalência é não vazio por que $\mathcal{V}_x \cup \{\pi_X[F] : F \in \mathcal{F}\}$ tem PIF.

Seja $\mathcal{F}_1$ o filtro gerado por $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\}$ e $\mathcal{F}_Y$ o filtro gerado por $\{\pi_Y[F] : F \in \mathcal{F}_1\}$. Como Y é compacto, existe $y \in Y$ e um filtro estendendo $\mathcal{F}_Y$ que converge para y . Seja $\mathcal{V}_y$ as vizinhanças de y em Y . Então temos que $\mathcal{F}_Y \cup \mathcal{V}_y$ tem PIF. Por argumentos similares ao anterior, temos que $\mathcal{F}_1 \cup \{X \times V : V \in \mathcal{V}_y\}$ tem PIF. Então $\mathcal{F} \cup \{U \times Y : U \in \mathcal{V}_x\} \cup \{X \times V : V \in \mathcal{V}_y\}$ tem PIF.

Logo, $\mathcal{F} \cup \{U \times V : U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$ tem PIF. Com isto, este conjunto gera um filtro que estende $\mathcal{F}$ e que contém uma base local de (x, y) . Portanto $\mathcal{F}$ pode ser estendido para um filtro que converge para (x, y) . Portanto $X \times Y$ é compacto. $\square$

Note que aqui também não podemos fazer extensões sucessivas do filtro se tivermos um produto infinito.

Como em redes, não podemos tomar os dois filtros das projeções, estender ambos para convergir e depois tentar usar o produto dessas duas extensões para estender o filtro original.

Capítulo 14

Compacidade em espaço ordenado. O Lema de Urysohn.

14.0.1 Ordem e Compacidade. A compacidade de $[0, 1]$.

Vamos relembrar algumas definições.

Dado um conjunto não-vazio A de um conjunto linearmente ordenado X por $<$.

Dizemos que $a \in X$ é limitante superior de A se $x \leq a$ para todo $x \in A$. Caso $a \in A$, dizemos que a é máximo.

Dizemos que $a \in X$ é supremo de A se

$x \leq a$ para todo $x \in A$ e

se $b \in X$, $x \leq b$ para todo $x \in A$ então $a \leq b$.

Dizemos que $a \in X$ é limitante inferior de A se $x \geq a$ para todo $x \in A$. Se $a \in A$ dizemos que a é o mínimo de A .

Dizemos que $a \in X$ é ínfimo de A se

$x \geq a$ para todo $x \in A$ e

se $b \in X$, $x \geq b$ para todo $x \in A$ então $a \geq b$.

Lembramos que um espaço é conexo se e somente se não possuem subconjuntos abertos e fechados (clopen) distintos de $\emptyset$ e o espaço todo.

Teorema 14.1. Seja X uma ordem linear que possui mínimo e tal que todo subconjunto não-vazio possui supremo. Então X é compacto e conexo na topologia gerada pela ordem.

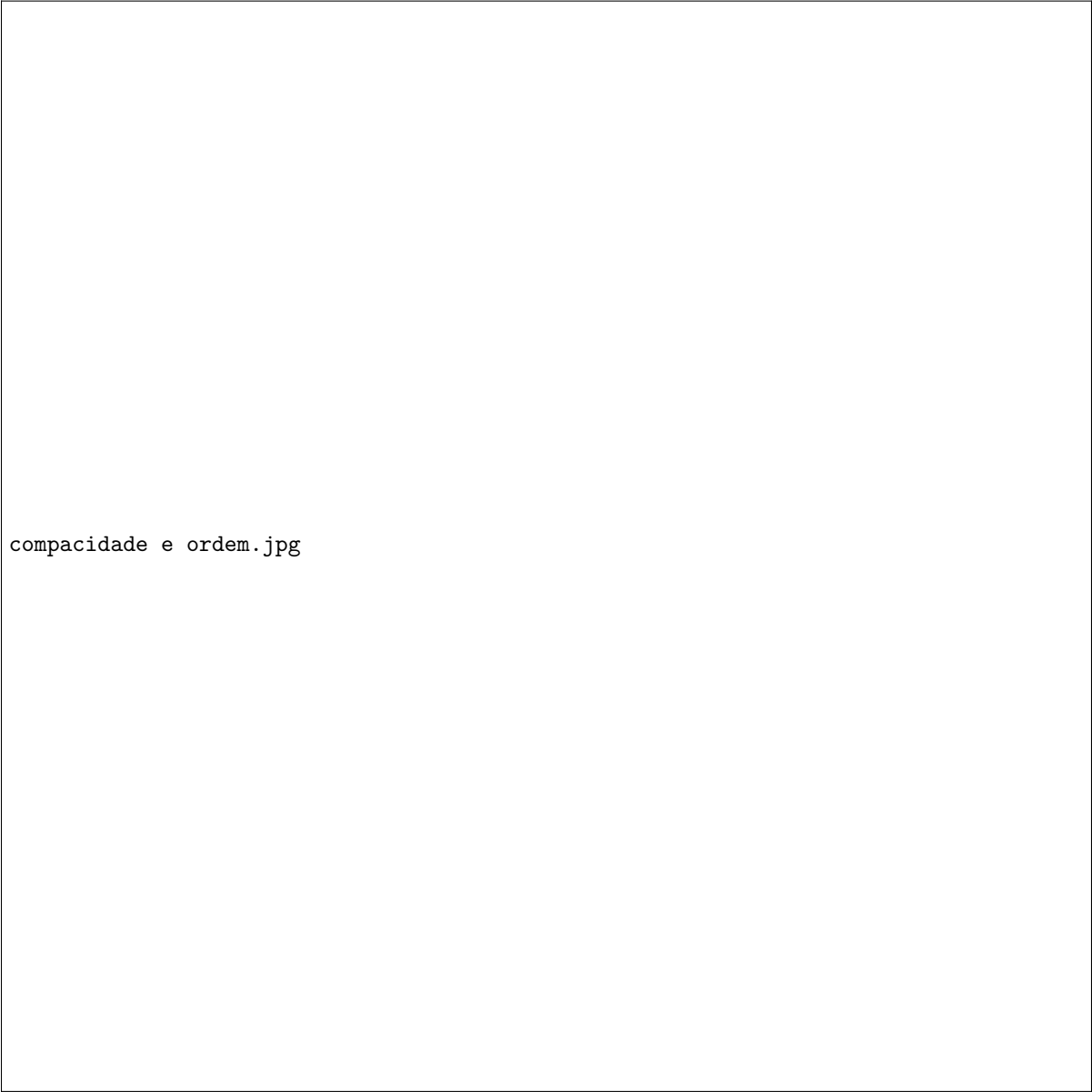
Demonstração. Seja x_0 o mínimo de X e seja x_1 o supremo de X . Como $x_1 \in X$ segue que x_1 é máximo de X . Note que os intervalos abertos que formam a base de abertos da topologia são $[x_0, a[$, $]a, b[$ e $]b, x_1]$.

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de intervalos abertos. Basta verificarmos para este caso, pois os intervalos abertos formam uma base de abertos. Seja $A = \{a \in X : [x_0, a] \text{ possui subcobertura finita}\}$. Como $x_0 \in A$, o conjunto é não vazio. Seja $a_0 = \sup A$.

Primeiro, iremos verificar que $a_0 \in A$. Se este não fosse o caso, então a_0 é supremo de A que não é máximo. Seja $U \in \mathcal{U}$ o intervalo aberto tal que $a_0 \in U$. Como a_0 é supremo mas não é máximo de A existe $x \in U \cap A$ tal que $x < a_0$, e portanto $[x_0, x]$ pode ser coberto por um número finito de intervalos (pois $x \in A$) e $[x, a_0]$ está contido em U . Assim, $[x_0, a_0]$ também pode ser coberto por um número finito e $a_0 \in A$.

Vamos agora provar que $a_0 = x_1$. Se este não for o caso, existe $y_1 \in X$ com $a_0 < y_1 \leq x_1$ tal que y_1 é a extremidade à direita de U . Seja $V \in \mathcal{U}$ tal que $y_1 \in V$. Então $[x_0, y_1] = [x_0, a_0] \cup [a_0, y_1] \cup \{y_1\}$ onde $[x_0, a_0]$ pode ser coberta por uma quantidade finita de intervalos de $\mathcal{U}$, $[a_0, y_1] \subseteq U$ e $\{y_1\} \subseteq V$. Assim $[x_0, y_1]$ pode ser coberta por uma quantidade finita de intervalos, portanto $y_1 \in A$, contradizendo que a_0 é máximo de A . Assim $A \ni a_0 = x_1$ e $X = [x_0, x_1]$ pode ser coberto por uma quantidade finita de intervalos de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ era arbitrário, temos que X é compacto. $\square$

Corolário 14.2. $[0, 1]$ é compacto.



compacidade e ordem.jpg

Figura 14.1: Compactos e conexos linearmente ordenados.

Proposição 14.3. Seja X linearmente ordenado tal que todo subconjunto não-vazio limitado superiormente de X possui supremo em X . Então todo subconjunto não-vazio limitado inferiormente de X possui ínfimo.

Demonstração. Seja A um subconjunto não-vazio limitado inferiormente. Então tome $B = \{x \in X : x \leq a \ \forall a \in A\}$. O limitante inferior de A pertence a B , assim B é não-vazio e podemos tomar b o supremo de B . Fixado $a \in A$, temos que $x \leq a$ para todo $x \in B$. Assim, $b = \sup B \leq a$. Assim, b é um limitante inferior de A . Dado c outro limitante inferior de A , temos que $c \leq a$ para todo $a \in A$. Assim, $c \in B$. Logo, $c \leq b$. Portanto b é ínfimo de A . $\square$

Teorema 14.4. Seja X linearmente ordenado tal que todo subconjunto não-vazio limitado superiormente de X possui supremo em X . Então $A \subseteq X$ é compacto se e somente se A é fechado e limitado.

Demonstração. $(\rightarrow)$. Se A é ilimitado superiormente então $\mathcal{U} = \{\{y : y < x\} : x \in A\}$ é uma família de abertos de X tal que $A \subseteq \mathcal{U}$, mas qualquer subfamília finita $\mathcal{U}' = \{\{y : y < x\} : x \in A'\}$ ($A' \subseteq A$ finito) é tal que $A \ni \max A' \notin \bigcup \mathcal{U}'$. Assim conjuntos ilimitados superiormente não são compactos.

Analogamente, podemos verificar que conjuntos ilimitados inferiormente não são compactos.

Portanto se A é um subconjunto compacto então é limitado (limitado superiormente e limitado inferiormente).

O espaço X é Hausdorff. Assim, se A é compacto, então A é fechado.

Com isto temos que subconjuntos compactos de X são fechados e limitados.

($\leftarrow$). Para a recíproca, suponha que A é fechado e limitado. Então tome x_0 um limitante inferior de A e x_1 um limitante superior de A . Temos que $[x_0, x_1]$ é um subconjunto fechado de x , assim contém todos os supremos de seus subconjuntos e a topologia da ordem em $[x_0, x_1]$ coincide com a topologia de subespaço por ser um intervalo. Assim, $[x_0, x_1]$ é um compacto. Como A é fechado em X e $A \subseteq [x_0, x_1]$, temos que A é fechado em $[x_0, x_1]$. Como os subconjuntos fechados de compactos são compactos, segue que A é compacto. $\square$

Vamos dizer que $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ é limitado se existem intervalos fechados J_i com extremidades em X_i tais que $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$.

Teorema 14.5. Seja X_i com uma ordem linear tal que todo subconjunto limitado possui supremo para cada $i \in I$, I finito. Então $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ é compacto se e somente se A é fechado e limitado.

Demonstração. Seja π_k a projeção de $\prod_{i \in I} X_i$ em X_k para cada $k \in I$.

($\rightarrow$). Se A é compacto então temos que $\pi_k[A]$ é compacto. Além disso, $A \subseteq \prod_{i \in I} \pi_i[A]$. O conjunto $\pi_k[A]$ é limitado em X_k , assim existe um intervalo fechados J_k com extremidades em X_k tais que $\pi_k[A] \subseteq J_k$. Portanto $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$ e A é limitado. Como cada X_i é Hausdorff e a propriedade Hausdorff é produtiva, segue que $\prod_{i \in I} X_i$ é Hausdorff. A é um subconjunto compacto de um Hausdorff, portanto A é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$.

($\leftarrow$). Suponha que A é fechado e limitado em $\prod_{i \in I} X_i$. Então $A \subseteq \prod_{i \in I} J_i$, onde J_i é um compacto. Então A é um subespaço fechado do compacto $\prod_{i \in I} J_i$, logo A é compacto. $\square$

Corolário 14.6. Um subespaço A de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se A é fechado e limitado (na distância Euclidiana).

Demonstração. Basta notar que um subconjunto é limitado na distância Euclidiana do $\mathbb{R}^n$ se e somente se é um subconjunto limitado usando a ordem. $\square$

Vamos ver agora que espaços normais possuem funções reais contínuas em abundância para separar fechados (há casos em que o espaço é normal por ter poucos fechados disjuntos). Então se tomarmos um espaço normal e T_1 (ou seja T_4), teremos que as funções reais contínuas servem para imergir um normal T_1 num produto de intervalos. Espaços compactos Hausdorff são T_4 .

Assim, qualquer espaço compacto Hausdorff por mais abstrato que possa parecer, será homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de intervalos.

14.1 Pré aquecimento ao Lema de Urysohn

14.1.1 Uma equivalência de $\mathbb{R}$ como conjunto ordenado.

Já vimos a prova da versão métrica do Lema de Urysohn, que era:

Se X é gerado por uma pseudométrica e F e G são fechados disjuntos então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.

Vamos fazer um exemplo usando os racionais para melhorar a intuição sobre a ideia da construção. Neste exemplo, associamos pontos a pontos para ir construindo uma ordem entre dois conjuntos infinitos enumeráveis. Depois usamos a propriedade dos supremos para completar a função.

Lema 14.7. Seja X um conjunto linearmente ordenado, denso em si mesmo, enumerável e sem ponto de máximo ou de mínimo. Então a ordem de X é isomorfa a ordem de $\mathbb{Q}$ (isto é, existe uma bijeção de X em $\mathbb{Q}$ que preserva ordem.)

Demonstração. Por ser denso em si mesmo, temos que X é infinito e enumerável. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração bijetora com os naturais. Também para os racionais, tome uma enumeração $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ que é uma bijeção com os naturais. O argumento é olhar os dois lados da enumeração para criar um isomorfismo parcial de ordem.

(*) Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos definir $f_n : A_n \rightarrow B_n$ um isomorfismo de ordem tal que A_n é um subconjunto finito X , B_n é um subconjunto finito de $\mathbb{Q}$ e $\{x_i : i \leq n\} \subseteq A_n$ e $\{q_i : i \leq n\} \subseteq B_n$ e tal que f_m é uma extensão de f_n para todo $m > n$.

Vamos primeiro supor que (*) foi construído e provar que existe o isomorfismo. Seja $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ (aqui estamos considerando que f é um conjunto de pares ordenados, onde a primeira coordenada é o elemento do domínio e a segunda coordenada é o valor de f no ponto). Dado $x, x' \in X$, com $x < x'$, existe n tal que $x, x' \in A_n$, assim $f(x) = f_n(x) < f_n(x') = f(x')$. Com isto, f tem domínio X , é injetora e preserva ordem. Para ver que f é sobre, dado $q \in \mathbb{Q}$, existe n tal que $q \in B_n$, assim existe $x \in A_n$ tal que $f(x) = f_n(x) = q$. Assim, f é sobre.

Para $n = 0$, seja $A_0 = \{x_0\}$, $B_0 = \{q_0\}$ e $f(x_0) = q_0$.

Suponha que f_i está definida para todo $i \leq n$ satisfazendo (*) e vamos construir f_{n+1} .

Vamos adicionar no máximo dois pontos ao domínio e ao contradomínio para definir f_{n+1} . Faremos isso em duas etapas:

1) Se $x_{n+1} \in A_n$ então seja $A'_n = A_n$, $B'_n = B_n$ e $f'_n = f_n$.

Se $x_{n+1} \notin A_n$ então seja $A'_n = A_n \cup \{x_{n+1}\}$. Vamos considerar os três casos:

- x_{n+1} é máximo de A'_n , tome $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$ maior que todos os elementos de B_n .

- x_{n+1} é mínimo de A'_n , tome $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$ menor que todos os elementos de B_n .

- x_{n+1} não é nem máximo nem mínimo de A'_n , tome a_1 o máximo de $\{x \in A_n : x < x_{n+1}\}$ e a_2 o mínimo de $\{x \in A_n : x > x_{n+1}\}$. Tome r_1 o máximo de $\{f_n(x) : x \in A_n \text{ e } x < x_{n+1}\}$ e r_2 o mínimo de $\{f_n(x) : x \in A_n \text{ e } x > x_{n+1}\}$. Como f_n é um isomorfismo de ordem, temos que $r_1 < r_2$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em si mesmo, existe $s \in \mathbb{Q} \setminus B_n$ tal que $r_1 < s < r_2$.

Em qualquer um dos três casos, seja $B'_n = B_n \cup \{s\}$ e seja $f'_n|_{A_n} = f_n$ e $f'_n(x_{n+1}) = s$.

2) Vamos agora começar com f'_n . A prova é uma repetição do que foi feito acima usando a função inversa de f'_n , mas iremos fazer os detalhes.

Se $q_{n+1} \in B'_n$ então seja $A_{n+1} = A'_n$, $B_{n+1} = B'_n$ e $f_{n+1} = f'_n$.

Se $q_{n+1} \notin B'_n$ então seja $B_{n+1} = B'_n \cup \{q_{n+1}\}$. Temos três casos:

q_{n+1} é máximo de B_{n+1} , tome $a \in X \setminus A'_n$ maior que todos os elementos de A'_n .

q_{n+1} é mínimo de B_{n+1} , tome $a \in X \setminus A'_n$ menor que todos os elementos de A'_n .

- q_{n+1} não é nem máximo nem mínimo de B_{n+1} , tome r_1 o máximo de $\{q \in B_{n+1} : q < q_{n+1}\}$ e r_2 o mínimo de $\{q \in B_{n+1} : q > q_{n+1}\}$. Tome a_1 o máximo de $\{(f'_n)^{-1}(q) : q \in B'_n \text{ e } q < q_{n+1}\}$ e a_2 o mínimo de $\{(f'_n)^{-1}(q) : q \in B'_n \text{ e } q > q_{n+1}\}$. Como f'_n é um isomorfismo de ordem, temos que $a_1 < a_2$. Como X é denso em si mesmo, existe $a \in X \setminus A'_n$ tal que $a_1 < a < a_2$.

Seja $A_{n+1} = A'_n \cup \{a\}$, $f_{n+1}|_{A'_n} = f'_n$ e $f_{n+1}(a) = q_{n+1}$. Então f_{n+1} é um isomorfismo entre A_{n+1} e B_{n+1} com $x_{n+1} \in A_{n+1}$ e $q_{n+1} \in B_{n+1}$. $\square$

Teorema 14.8. Seja Y um conjunto linearmente ordenado denso em si, sem ponto de máximo e mínimo em que todo todo conjunto limitado não vazio possui supremo. Se Y tem um conjunto denso enumerável então Y é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja X um conjunto enumerável e denso de Y . Então X é denso em si mesmo, não tem máximo ou mínimo. Então existe um isomorfismo $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$. Defina $g(y) = \sup \{f(x) : x < y, x \in X\}$. Então g é um isomorfismo de Y em $\mathbb{R}$.

Dado $y_1 < y_2$ tome $x_1, x_2 \in X$ tal que $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$. Então $g(y_1) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq g(y_2)$. Assim, g preserva ordem e é injetora. Para provar que g é sobrejetora, fixe $r \in \mathbb{R}$. Então $S = \{s \in \mathbb{Q} : s < r\}$ é tal que $r = \sup S$. Seja $A = f^{-1}[S]$. Temos que A é limitado superiormente, portanto podemos tomar $t = \sup A$.

Afirmamos que $A = \{x \in X : x < t\}$. Como S não tem máximo e f é isomorfismo, segue que A não tem máximo. Assim, $A \subseteq \{x \in X : x < t\}$. Por outro lado, se $x < t$, existe $x' \in A$ tal que $x < x' \leq t$. Como f é isomorfismo, temos que $f(x) < f(x') < r$, pois, $x' \in A$ implica que $f(x') < r$. Logo, $x \in A$ e temos $A \supseteq \{x \in X : x < t\}$.

Assim, $g(t) = \sup f[A] = \sup S = r$ e g é sobre. $\square$



homeomorfos a racionais.jpg

Figura 14.2: Isomorfismos com o conjunto dos racionais.

14.2 ‘Uma ponte entre dois fechados’: Lema de Urysohn.

14.2.1 Fazendo rodela para construir uma função contínua.

No caso de Lema de Urysohn, vamos associar uma rodela a um intervalo, então seria jogar cada ponto da rodela a algum lugar ‘próximo’ do valor que a função irá receber ao final da construção. Aumentando o número de rodela iremos também dar mais precisão sobre onde estão os pontos em função das rodela e rodela mais finas se associam a intervalos cada vez menores, o que garantirá a continuidade da função. As rodela seriam mais ou menos as aproximações de um conjunto de curvas de nível da função que estamos construindo.

Ao invés de $[0, 1]$ a conta funciona igual para um intervalo $[a, b]$. Nesse caso temos dois plateaus, o F em altura a e o G em altura b . O gráfico da extensão seria uma ponte entre eles.

Teorema 14.9. (Lema de Urysohn) Se X é normal e F e G são fechados disjuntos então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.

Demonstração. Vamos começar enumerando todos os racionais entre no intervalo fechado $[0, 1]$ com uma

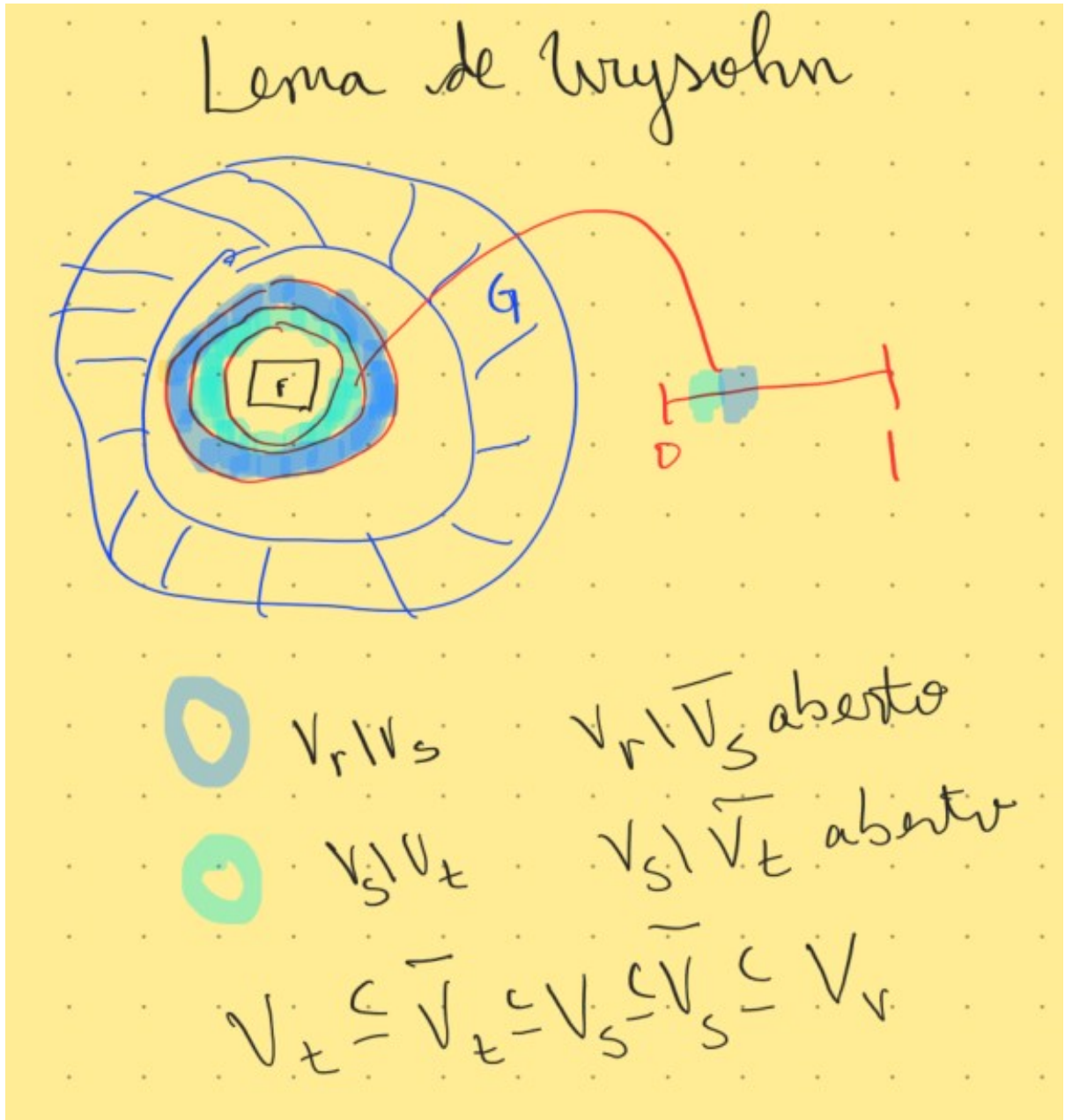


Figura 14.3: O Lema de Urysohn.

bijeção $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma que $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$. Usando normalidade, podemos encontrar U_0 e U_1 abertos de X tais que $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq X \setminus G$. Suponhamos que já definimos U_{r_k} para todo $k \leq n$ de modo que se $r_k < r_j$ então $\overline{U_{r_k}} \subseteq U_{r_j}$. Tome r_{n+1} . Como $0 = r_0 < r_{n+1} < 1 = r_1$, podemos fixar r_i e r_m com $i, m \leq n$ tais que $r_i < r_{n+1} < r_m$ e $r_m - r_i$ é o menor valor possível (ou seja r_i é o mais próximo à esquerda de r_{n+1} e r_m o mais próximo à direita de r_{n+1}). Temos por indução que $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_m}$. Assim, pela normalidade de X existe um aberto $U_{r_{n+1}}$ tal que $\overline{U_{r_i}} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{r_m}$. Como r_i e r_m são os mais próximos a r_{n+1} , segue que se $r_k < r_j$ então $\overline{U_{r_k}} \subseteq U_{r_j}$ para todo $j, k \leq n+1$.

Agora vamos definir $f : X \rightarrow [0, 1]$. Seja $f(x) = \inf(\{r_k : x \in U_{r_k}\} \cup \{1\})$. De fato, $f(x) \in [0, 1]$.

Para mostrar que f é uma função contínua, basta mostrar que $f^{-1}[[0, r]]$ e $f^{-1}]]r, 1]]$ são conjuntos abertos, pois os abertos da forma $[0, r[$ e $]r, 1]$ formam uma subbase de $[0, 1]$. Seja $x \in f^{-1}[[0, r]]$. Então $f(x) < r$. logo seja q racional tal que $f(x) < q < r$. Pela definição de $f(x)$, segue que $x \in U_q$. Pela definição de f temos que $f(y) \leq q$ para todo $y \in U_q$. Assim, $x \in U_q \subseteq f^{-1}[[0, r]]$. Como x é um ponto arbitrário do conjunto, segue que $f^{-1}[[0, r]]$ é aberto.

Seja $x \in f^{-1}[[r, 1]]$. Então $r < f(x)$. Tome q, q' racionais tais que $r < q < q' < f(x)$. Como $q' < f(x)$ segue que $x \notin U_{q'}$. Assim, $x \notin \overline{U_q}$. Para cada $y \notin \overline{U_q}$, temos que $y \notin U_q$, assim $r < q \leq f(y)$. Portanto $x \in X \setminus \overline{U_q}$ e $X \setminus \overline{U_q} \subseteq f^{-1}[[r, 1]]$. Como x era um ponto arbitrário do conjunto, segue que $f^{-1}[[r, 1]]$ é um conjunto aberto. Como a imagem inversa de abertos da subbase são abertos, temos que f é contínua.

Falta apenas checar que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$. Se $x \in F$ então $x \in U_0$, logo $f(x) = 0$. Se $x \in G$ então $x \notin X \setminus G$. Como $U_q \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G$, segue que $x \notin U_q$, para todo q racional entre 0 e 1. Assim, $f(x) = 1$. $\square$

Capítulo 15

Separando ponto e fechado por funções.

15.1 Espaços completamente regulares.

15.1.1 Definição de Espaços completamente regulares.

Definição 15.1. Um espaço X é completamente regular se para todo $x \in X$ e todo fechado F tal que $x \notin F$ existe uma função $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = 1$. Note que podem existir pontos y em $X \setminus (\{x\} \cup F)$ tais que $f(y)$ vale 0 ou 1.

Exemplo 15.2. Todo espaço gerado por pseudométricas é completamente regular.

Já vimos que dado $x \in X$ e F fechado com $x \notin F$ existe $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ e $g[F] \subseteq \{0\}$. Tome $f(x) = 1 - g(x)$.

Proposição 15.3. Espaços completamente regulares são regulares.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e F um fechado tal que $x \notin F$. Como X é completamente regular, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = \{1\}$. Tome $U = f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$ e $V = f^{-1}[[\frac{1}{2}, 1]]$. Então $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. Assim, X é regular. $\square$

Exemplo 15.4. Normal não implica completamente regular.

Demonstração. Vimos que existe um espaço X normal T_0 que não é regular. Logo, X é um espaço normal que não é completamente regular. $\square$

Proposição 15.5. Um espaço regular e normal é completamente regular.

Demonstração. Dado um ponto x e F fechado com $x \notin F$, pela regularidade, existe U aberto contendo x tal que $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Usando o Lema de Urysohn, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[\overline{U}] = \{0\}$ e $f[F] = \{1\}$. Como $x \in \overline{U}$, segue que f testemunha a regularidade completa para x e F . $\square$

15.1.2 Algumas condições equivalentes a ser completamente regular.

Lema 15.6. Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{C}$ uma subbase de fechados, $\mathcal{B}$ uma subbase de abertos e $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ um sistema fundamental de vizinhanças de X . São equivalentes:

- 1) X é completamente regular
- 2) para todo $x \in X$ e todo W aberto tal que $x \in W$ então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[X \setminus W] = 1$.
- 3) se $\mathcal{C}$ é uma subbase de fechados e $x \notin F$ com $F \in \mathcal{C}$ então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = 1$.
- 4) se $\mathcal{B}$ é uma subbase de abertos, e $x \in U$ com $U \in \mathcal{B}$ então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[X \setminus U] = 1$.

Demonstração. 1) $\leftrightarrow$ 2). É apenas a relação de que complementar de aberto é fechado e vice versa. 1) $\rightarrow$ 3) e 2) $\rightarrow$ 4) seguem do fato que os elementos da subbase são abertos.

3) $\rightarrow$ 1). Seja $x \in X$ e F um fechado tal que $x \notin F$. Como $\mathcal{C}$ é uma base de fechados, existem $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C_1 \cup \dots \cup C_k$ e $C_1 \cup \dots \cup C_k \supseteq F$. Para cada C_i , existe $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f_i[C_i] = \{1\}$ e $f_i(x) = 0$. Tome f tal que $f(y) = \max\{f_1(y), \dots, f_k(y)\}$. Então f é contínua (verifique que o máximo de duas funções contínua é contínua) e $f(x) = 0$ e $f[F] = 1$.

4) $\rightarrow$ 1). Tome os complementares de $\mathcal{B}$ para termos um subbase de fechados $\mathcal{C}^*$. Como $\mathcal{B}$ satisfaz a condição em 4), segue que $\mathcal{C}^*$ satisfaz a propriedade em 3). Aplicando 3) para $\mathcal{C}^*$ temos que vale 1). $\square$

15.1.3 Completamente regular, pseudométricas e topologias iniciais de completamente regulares.

Uma forma um pouco tosca para pensar sobre isso é que cada pseudométrica dá uma medição imprecisa entre um ponto e um fechado, mas o espaço pode ser tão torto que é preciso de uma quantidade grande de medições para identificar corretamente os pontos e fechados.

Teorema 15.7. São equivalentes: Um espaço é completamente regular se e somente se sua topologia é gerada por uma família de pseudométricas.

Demonstração. Já vimos que a família de pseudométricas gera uma topologia completamente regular.

Suponhamos que X é completamente regular e tome $\mathcal{F}$ a família de todas as funções contínuas de X em $[0, 1]$. Para cada $f \in \mathcal{F}$, seja ρ_f a pseudométrica gerada por f . Como vimos anteriormente, as ρ_f são pseudométricas contínuas em X e portanto as ρ_f -bolas abertas são abertas em X . Assim a topologia gerada pelas pseudométricas contínuas é menos fina que a topologia de X . Seja $x \in X$ e V uma vizinhança aberta de x . Como X é completamente regular, existe $h : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(x) = 0$ e $h[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Temos que $\rho_h(x, y) = |h(x) - h(y)| = 1$ para cada $y \in X \setminus V$. Assim $B_{\rho_h}(x, \frac{1}{2}) \cap X \setminus V = \emptyset$. Portanto temos que $x \in B_{\rho_h}(x, \frac{1}{2}) \subseteq V$ e portanto as ρ -bolas abertas geradas pelas pseudométricas contínuas formam uma base da topologia de X . $\square$

Teorema 15.8. São equivalentes:

- 1) Um espaço X é completamente regular.
- 2) X possui a topologia inicial de uma família de funções limitadas de X em $[0, 1]$.
- 3) X possui a topologia inicial de uma família de funções limitadas de X em $\mathbb{R}$.
- 4) X possui a topologia inicial de uma família de funções de X em $\mathbb{R}$.

Demonstração. (1) $\rightarrow$ 2)) Se X é completamente regular com a topologia τ então seja $\mathcal{F}$ a família de funções contínuas de X em $[0, 1]$. Tome a topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ gerada por $\mathcal{F}$. Como $\tau_{\mathcal{F}}$ é a topologia menos fina que torna todas as $\mathcal{F}$ contínuas, segue que $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau$. Para ver a recíproca, seja $x \in X$ e V um conjunto τ aberto, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Como $f \in \mathcal{F}$ segue que f é $\tau_{\mathcal{F}}$ -contínua. Portanto, $f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]] \in \tau_{\mathcal{F}}$. Mas, $x \in f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]] \subseteq V$. Assim, $\tau_{\mathcal{F}}$ é uma base para τ e $\tau = \tau_{\mathcal{F}}$.

(2) $\rightarrow$ 3)) é imediata.

(3) $\rightarrow$ 4)) é imediata.

(4) $\rightarrow$ 1)) Suponha que $\mathcal{F}$ é uma família de funções de X em $\mathbb{R}$ e seja $\tau_{\mathcal{F}}$ a topologia inicial gerada por $\mathcal{F}$.

Seja $x \in X$ e F um fechado que não contém x . Então existe U_i um aberto de $\mathbb{R}$ e $f_i \in \mathcal{F}$ para $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq X \setminus F$.

Para cada i seja $\delta_i > 0$ tal que $]f_i(x) - \delta_i, f_i(x) + \delta_i[\subseteq U_i$. Seja g_i tal que $g_i(t) = \min\{1, \frac{1}{\delta_i}|f_i(t) - f_i(x)|\}$. Para $1 \leq i \leq n$, a função $g_i : X \rightarrow [0, 1]$ é contínua e $g_i(x) = 0$. Se $t \in g_i^{-1}[[0, 1]]$ então $g_i(t) = \frac{1}{\delta_i}|f_i(t) - f_i(x)| < 1$. Logo, $|f_i(t) - f_i(x)| < \delta_i$. Portanto $f_i(t) \in]f_i(x) - \delta_i, f_i(x) + \delta_i[\subseteq U_i$. Logo $g_i^{-1}[[0, 1]] \subseteq f_i^{-1}[U_i]$.

Tome g tal que $g(t) = \max\{g_i(t) : 1 \leq i \leq n\}$. Então g é contínua, $g(x) = 0$ e $g^{-1}[[0, 1]] \subseteq g_i^{-1}[[0, 1]]$. Portanto $g^{-1}[[0, 1]] \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}[U_i] \subseteq X \setminus F$. Assim $g[F] \subseteq \{1\}$. $\square$

Corolário 15.9. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções $f_i : X \rightarrow Y_i$, onde cada Y_i é completamente regular para cada $i \in I$. Então topologia inicial gerada por $\mathcal{F}$ é completamente regular.

Demonstração. Para cada $i \in I$, seja $\mathcal{G}_i$ as funções contínuas de Y_i em $\mathbb{R}$. A topologia inicial gerada por $\mathcal{F}$ coincide com a topologia inicial gerada por $\bigcup_{i \in I} \{g \circ f_i : g \in \mathcal{G}_i\}$. Portanto a topologia é completamente regular. $\square$

Corolário 15.10. Regularidade completa é uma propriedade hereditária e produtiva.

Demonstração. Subespaço e produto de Tychonoff são topologias iniciais. $\square$

15.1.4 Produto enumerável de espaços metrizáveis é metrizável.

Teorema 15.11. Se X_i é um espaço gerado por uma topologia pseudométrica, para cada $i \in \mathbb{N}$, então $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ com a topologia produto é um espaço pseudometrizável

Demonstração. Dada a pseudométrica $\rho_i \in X_i$, considere a pseudométrica $\tilde{\rho}_i = \rho_i \circ \pi_i$. A topologia gerada por $\{\tilde{\rho}_i : i \in \mathbb{N}\}$ coincide com a topologia produto e a topologia gerada por uma família enumerável de pseudométricas é gerada por uma pseudométrica. $\square$

Corolário 15.12. O espaço $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é um espaço metrizável.

Demonstração. A pseudométrica que gera a topologia é uma métrica. $\square$

15.2 O Axioma de Separação $T_{3\frac{1}{2}}$.

15.2.1 Definindo $T_{3\frac{1}{2}}$

Dado um espaço topológico arbitrário, queremos enxergá-lo como o subespaço de um outro espaço. No caso, o espaço mais simples seria o produto de Tychonoff de J cópias do intervalo $[0, 1]$ que será denotado por $[0, 1]^J$. Como $[0, 1]^J$ satisfaz T_2 e é completamente regular, podemos apenas trabalhar com a imersões de espaços T_2 que são completamente regulares.

Definição 15.13. Um espaço completamente regular e T_1 é chamado de espaço $T_{3\frac{1}{2}}$.

Lema 15.14. Um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ é T_3 .

Demonstração. Já vimos que espaços completamente regulares são regulares. Então espaços completamente regulares + T_1 são regulares + $T_1 = T_3$. $\square$

Ainda não vimos exemplo de regular que não é completamente regular e isso será feito depois.

15.2.2 Por que $T_{3\frac{1}{2}}$? E outras observações sobre a definição.

Há lugares (como receitas de bolo e livros de matemática) em que $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$. A propriedade T_4 é mais forte que $T_{3\frac{1}{2}}$ pelo Lema de Urysohn. Existem autores que usam $T_{7\frac{1}{2}}$ ou $T_{3.5}$.

Não há um consenso sobre a notação. Alguns autores denotam T_3 como espaços regulares e Hausdorff e espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ como espaços completamente regulares e Hausdorff. Alguns outros autores usam regular como equivalente a T_3 e alguns colocam que T_3 não implica T_1 . E o mesmo ocorre com completamente regular e $T_{3\frac{1}{2}}$, assim, é preciso verificar qual a definição que o autor utilizada em seu texto.

Decidimos usar a notação de completamente regular sem T_1 por que isto facilita a notação para falar de topologias geradas por pseudométricas (num texto antigo, eu usei T_3 e regulares como a mesma coisa, então até a mesma pessoa pode mudar sua notação).

15.3 Resumindo as relações T_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$.

Teorema 15.15. $T_4 \rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \rightarrow T_3 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0$ e nenhuma delas é uma equivalência.

Demonstração. Vimos que T_4 implica regular e que regular + normal implica completamente regular. Assim, T_4 implica $T_{3\frac{1}{2}}$ (ou diretamente usar o Lema de Urysohn e que unitários são fechados num T_1 .)

Já vimos que completamente regular implica regular, que $T_3 = \text{regular} + T_1$ implica T_2 que implica T_1 que implica T_0 .

Também já vimos exemplos de T_0 que não é T_1 , T_1 que não é T_2 , T_2 que não é T_3 . Veremos abaixo os exemplos de T_3 que não é $T_{3\frac{1}{2}}$ e $T_{3\frac{1}{2}}$ que não é T_4 . $\square$

15.3.1 Um T_3 que não é $T_{3\frac{1}{2}}$.

Vamos ver outros exemplos quando vermos quocientes.

Exemplo 15.16. T_3 não implica completamente regular.

Demonstração. Seja X_0 o semiplano superior fechado de $\mathbb{R}^2$ e $X = X_0 \cup \{(0, -1)\}$.

Para cada $(x, y) \in X$ com $y > 0$ seja $\mathcal{V}_{(x,y)} = \{(x, y)\}$.

Para cada $(x, 0)$, $S_{x,0} = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 2\} \cup \{(x, 0) + (t, t) : 0 \leq t \leq 2\}$. Note que $S_{(x,0)}$ são dois segmentos de reta saindo de $(x, 0)$, um com ângulo de 45 graus com o eixo das abscissas e o outro com ângulo de 90. O sistema de vizinhanças $\mathcal{V}_{x,0}$ é dado por $\{(x, 0) \cup (S_{(x,0)} \setminus F) : F \subseteq X_0 \text{ é finito}\}$.

Para $(0, -1)$, defina $\mathcal{V}_{(0,-1)} = \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\} : i \in \mathbb{N}\}$.

Fica a cargo do leitor se convencer que $\{\mathcal{V}_{(x,y)} : (x, y) \in X\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas para uma topologia de X e que esta topologia é T_1 .

Note que os abertos em $\mathcal{V}_{(x,y)}$ com $(x, y) \in X_0$ são clopen. Portanto temos a regularidade para todo $(x, y) \in X_0$. Falta verificar apenas a regularidade de X para o ponto $(0, -1)$. Note que se $i \in \mathbb{N}$ então $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i+3\} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$. De fato tome $(x', y') \in X$ com $x' < i+1$. Se $y' > 0$ então $\{(x', y')\}$ é aberto e não intersecta $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i+3\}$. Se $y' = 0$ então $(x'', y'') \in S_{(x',0)}$ é tal que $x'' \leq x' + 2 < i+1+2 \leq i+3$. Portanto $S_{(x',0)} \cap \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i+3\} = \emptyset$. Assim, $\{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i+3\} \subseteq \{(0, -1)\} \cup \{(x, y) \in X_0 : x \geq i\}$. Assim, X é regular em $(x, 0)$.

Vamos agora verificar que X não é completamente regular. Primeiro note que $F = \{(x, 0) : x \leq 0\}$ é um fechado.

Afirmção. Se $f(x, 0) = 1$ e f é contínua então existe E_x enumerável tal que $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$.

Demonstração da Afirmção. Para cada $n > 0$ natural, existe F_n finito tal que $f[\{(x, 0)\} \cup (S_{(x,0)} \setminus F_n)] \subseteq [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Tomando $E_x = \bigcup_{n>0} F_n$, temos que $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$.

Suponha que existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[F] = \{1\}$ e $f((0, -1)) = 0$.

Tome A_0 infinito enumerável em $[-1, 0]$. Por hipótese, $f((x, 0)) = 1$ para cada $x \in A_0$. Para cada $x \in A_0$ fixe E_x tal que $f[S_{(x,0)} \setminus E_x] = \{1\}$. Temos que $\bigcup_{x \in A_0} E_x$ é enumerável. Temos que $[0, 1] \setminus \{t : (t, s) \in \bigcup_{x \in A_0} E_x\}$ é não enumerável, logo podemos fixar $A_1 \subseteq [0, 1] \setminus \{t : (t, s) \in \bigcup_{x \in A_0} E_x\}$ infinito. Se $a \in A_1$ então $(S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap S_{(a,0)} \neq \emptyset$, para cada $x \in A_0$. Assim para todo $F \subseteq X$ finito, temos que existe $x \in A_0$ tal que $(S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap (S_{(a,0)} \setminus F) \neq \emptyset$ (pois os segmentos de inclinação 45 graus são dois a dois disjuntos). Se $(u, v) \in (S_{(x,0)} \setminus E_x) \cap (S_{(a,0)} \setminus F)$ então $f((u, v)) = 1$ assim, $f((a, 0)) = 1$ para todo $a \in A_1$. Podemos agora prosseguir por indução e encontrar $A_n \subseteq [n-1, n]$ tal que $f[A_n \times \{0\}] = \{1\}$ para cada natural n . Portanto, para toda vizinhança W de $(0, -1)$, existe n tal que $A_n \times \{0\} \subseteq W$. Então $f((0, -1)) = 1$, contradição. $\square$

15.3.2 Um $T_{3\frac{1}{2}}$ e não é T_4 .

Exemplo 15.17. O Plano de Niemytski é $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Já vimos que o exemplo não é normal. A topologia de Niemytski é mais fina do que a topologia do semiplano superior fechado de $\mathbb{R}^2$, logo ela é Hausdorff.

O eixo das abscissas na topologia de Niemytski é um fechado e discreto na sua topologia de subespaço. De fato, o eixo das abscissas é fechado em $\mathbb{R}^2$ e a topologia de Niemytski é mais fina do que a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^2$. As vizinhanças do sistema fundamental de vizinhanças de um ponto na abscissa usado na definição da topologia só intersectam um ponto da abscissa, assim, os pontos da abscissa são isolados no subespaço da abscissa.

Para ver que o plano de Niemytski é completamente regular, tomemos um ponto $(x, y) \in X$ e um aberto do sistema de vizinhanças de $\mathcal{V}_{(x,y)}$. Vamos começar com $y > 0$. O aberto é uma bola aberta centrada em (x, y) de raio ϵ onde a bola está toda contida no semiplano superior aberto. Temos que a métrica Euclidiana é contínua por que a topologia de Niemytski é mais fina do que a do semiplano superior com a topologia de subespaço. Assim a distância d de (x, y) a um ponto do semiplano superior aberto é contínua. Para cada $(a, b) \in X$ seja

$$f(a, b) = \begin{cases} d((x, y), (a, b)) & \text{se } (a, b) \in B_d((x, y), \epsilon) \\ 1 & \text{se } (a, b) \notin B_d((x, y), \epsilon) \end{cases}$$

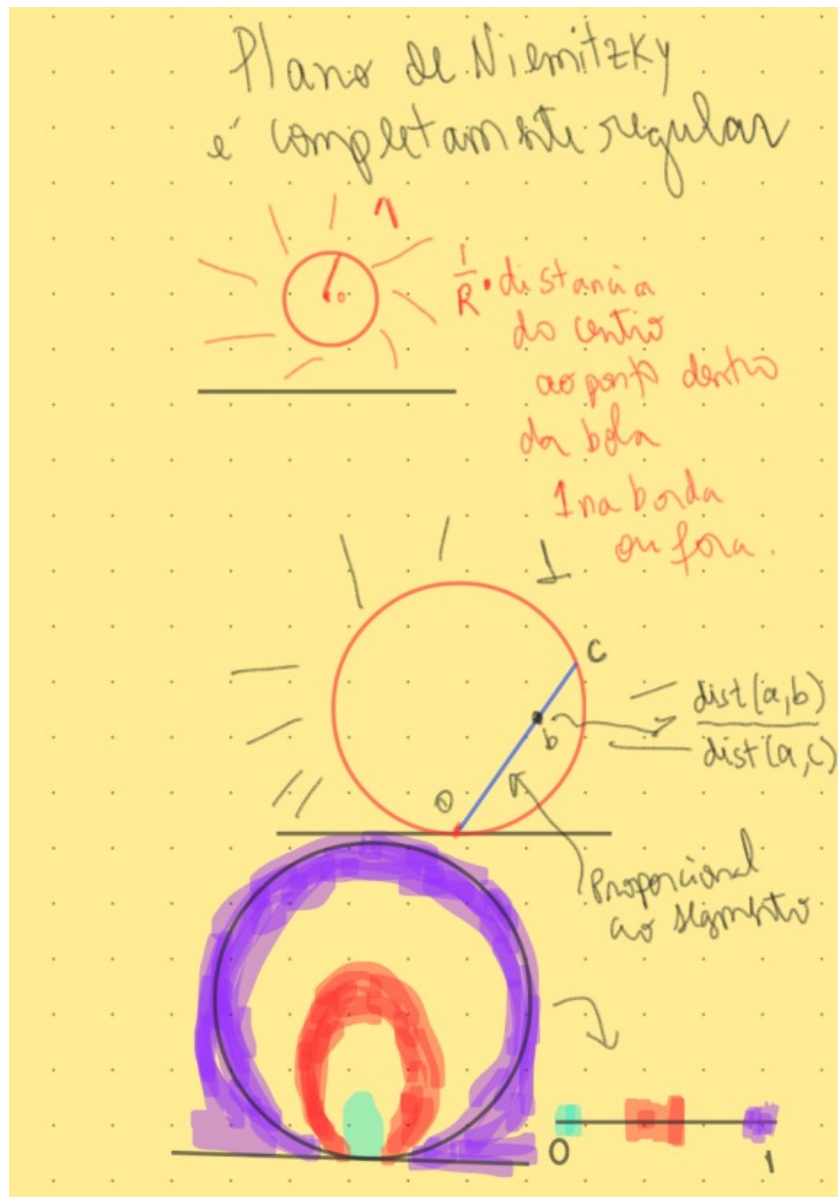


Figura 15.1: O espaço de Niemytzky é completamente regular (e portanto $T_{3\frac{1}{2}}$).

Para os pontos (a, b) cuja distância é menor que 1, podemos usar a continuidade da distância dentro da bola. Para os pontos cuja distância é maior que 1 basta usar a continuidade da função constante no aberto $X \setminus B_d((x, y), \epsilon]$. Para o ponto (a, b) de distância 1 a (x, y) , dada uma vizinhança de V de 1, encontre uma vizinhança U de (a, b) tal que $d((x, y), (a, b)) \in V$ para todo $(a, b) \in U$. Então $f((a, b)) \in V$ para todo $(a, b) \in U$ (pois $1 \in V$).

Para os pontos $(x, 0)$, Fixe $\delta > 0$. A bola $B_d((x, \delta), \delta)$, então $V_\delta = B_d((x, \delta), \delta) \cup \{(x, 0)\}$ é uma vizinhança no sistema fundamental de $(x, 0)$.

Para (a, b) no semiplano superior aberto, podemos traçar a semireta que sai de $(x, 0)$ que passa por (a, b) . Então essa semireta intersecta a circunferência $S_d((x, \delta), \delta)$ de centro (x, δ) e raio δ em exatamente um ponto que denotaremos por (a^*, b^*) . Podemos comparar a distância de (a, b) e (a^*, b^*) usando

$$g(a, b) = \frac{d((x, 0), (a, b))}{d((x, 0), (a^*, b^*))} \quad \text{para todo } (a, b) \text{ no semiplano superior aberto.}$$

Afirmção. Fixe $\gamma > 0$. Então $g(a, b) = \frac{\gamma}{\delta}$ para todo $(a, b) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$ se $(a, b) \neq (x, 0)$.

Dem. da Afirmção: Vamos calcular $g(a, b)$ para $(a, b) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$ com $(a, b) \neq (0, 0)$. Se tomamos o ponto $(x, 2\gamma) \in S_d((x, \gamma), \gamma)$, temos que o ponto $(x^*, (2\gamma)^*)$ é o ponto $(x, 2\delta)$. Assim, $g(x, 2\gamma) = \frac{\gamma}{\delta}$.

Escolha $(a, b) \neq (x, 0)$ pertencente a $S_d((x, \gamma), \gamma)$ com $a \neq x$. Como ambas as circunferências são tangentes a abscissa no ponto $(0, 0)$, podemos ver que o triângulo $(x, 0)$ $(a, 0)$ e (a, b) é semelhante ao triângulo $(x, 0)$, $(a^*, 0)$ e (a^*, b^*) . Temos então que $g(a, b) = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{\sqrt{(a^*-x)^2 + (b^*)^2}} = \frac{b}{b^*} = l$. Também temos que $(a-x)^2 + (b-\gamma)^2 = \gamma^2$. Logo, $(a-x)^2 + b^2 - 2b\gamma + \gamma^2 = \gamma^2$ e segue que $(a-x)^2 + b^2 = 2b\gamma$. Além disso, Também temos que $(a^*-x)^2 + (b^*-\delta)^2 = \delta^2$. Logo, $(a^*-x)^2 + (b^*)^2 - 2b^*\delta + \delta^2 = \delta^2$ e segue que $(a^*-x)^2 + (b^*)^2 = 2b^*\delta$. Então $l^2 = \frac{(a-x)^2 + b^2}{(a^*-x)^2 + (b^*)^2} = \frac{2b\gamma}{2b^*\delta} = l \cdot \frac{\gamma}{\delta}$. Portanto $g(a, b) = l = \frac{\gamma}{\delta}$. $\square$

Usando a afirmação que acima, note que essa função é contínua no plano superior aberto como subespaço de $\mathbb{R}^2$. Para isto, observe que uma bolinha no semiplano superior se encaixa dentro de um arco de um círculo de raio menor que a distância de $(x, 0)$ à bolinha e um raio maior que a distância de qualquer ponto da bolinha a $(x, 0)$.

A topologia no subespaço coincide com a topologia de subespaço aberto do plano de Niemytski. Denote $V_\delta = B_d((x, \delta), \delta) \cup \{(x, 0)\}$. Assim, g é contínua na topologia de Niemytski dentro do semiplano superior aberto.

Defina

$$h(a, b) = \begin{cases} g(a, b) & \text{se } (a, b) \in V_\delta \\ 1 & \text{se } (a, b) \in X \setminus V_\delta \end{cases}$$

Para checar a continuidade precisamos dividir em 4 tipos de pontos. Primeiro vamos checar sobre o valor de g nos pontos de V_γ :

1) no ponto $(x, 0)$. Dado um $\epsilon > 0$, fixe $\gamma < \epsilon \cdot \delta$.

Assim, para todo (a, b) em V_γ distinto de $(x, 0)$, temos que $h(a, b) = g(a, b) < g(a', b') < \frac{\gamma}{\delta} < \epsilon$ onde (a', b') é o ponto de $S_d((x, \gamma), \gamma)$ correspondente a (a, b) quando tomamos o segmento que passa por $(x, 0)$ e (a, b) . A partir disto, temos que $h[V_\gamma] \subseteq [0, \epsilon]$ e h é contínua em $(x, 0)$.

2) no ponto (a, b) com $(a, b) \notin B_d((x, \delta), \delta]$. Então existe uma vizinhança U de (a, b) que não intersecta $B_d((x, \delta), \delta]$, logo não intersecta V_δ . Então temos $h[U] = \{1\}$. Portanto h é contínua em (a, b) .

3) $(a, b) \in V_\delta \setminus \{(x, 0)\}$. Neste caso, $(a, b) \in B_d((x, \delta), \delta)$ que é um aberto no semiplano superior aberto e g e h coincidem em $B_d((x, \delta), \delta)$. Como g é contínua em $B_d((x, \delta), \delta)$, segue que h é contínua em $(a, b) \in B_d((x, \delta), \delta)$.

4) $(a, b) \in S_d((x, \delta), \delta) \setminus \{(x, 0)\}$. Claramente temos que $h(a, b) = 1$. Dada uma vizinhança aberta de V de 1, como (a, b) está no semiplano superior aberto existe uma vizinhança aberta U de (a, b) tal que $g[U] \subseteq V$. Como $1 \in V$, segue que $h[U] \subseteq V$ e h é contínua em (a, b) . $\square$

15.3.3 Imersão de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ em produtos de intervalos.

Teorema 15.18. Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as funções contínuas de X em $[0, 1]$, onde $[0, 1]$ está com a topologia usual. Então $\Delta\mathcal{F}$ é uma imersão de X em $[0, 1]^\mathcal{F}$.

Demonstração. A função $\Delta\mathcal{F}$ é uma função contínua, pois $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ tem a topologia inicial das projeções $\{\pi_f : f \in \mathcal{F}\}$ e $\pi_f \circ \Delta\mathcal{F} = f$ é contínua para cada $f \in \mathcal{F}$.

Como o espaço é T_1 basta mostrarmos que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados. Dado $x \in X$ e F fechado tal que $x \notin F$, existe pela definição de completamente regular uma função $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] \subseteq \{1\}$. Logo $f(x) \notin f[F] = \{1\}$. Logo, $\Delta\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade desejada pelo teorema da imersão. $\square$

15.3.4 Imersões ‘econômicas’. Um teorema de metrização.

Vamos agora ver que podemos imergir usando menos funções.

Teorema 15.19. Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos infinita de um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ X . Então existe uma família $\mathcal{F}$ de funções contínuas que separa pontos e que separa ponto de fechados com $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{B}|$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subseteq V \text{ e existe } f : X \rightarrow [0, 1] \text{ contínua com } f[\overline{U}] = \{0\} \text{ e } f[X \setminus V] = \{1\}\}$. Para cada $(U, V) \in \mathcal{C}$, fixe $f_{(U, V)}$ tal que $f_{(U, V)}[\overline{U}] = \{0\}$ e $f_{(U, V)}[X \setminus V] = \{1\}$. Defina então $\mathcal{F} = \{f_{(U, V)} : (U, V) \in \mathcal{C}\}$. Como X é T_1 , basta mostrarmos que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados.

Seja $x \in X$ e F um fechado tal que $x \notin F$. Usando que $\mathcal{B}$ é base, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq X \setminus F$. Usando que X é completamente regular, existe $g : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $g[X \setminus V] = 1$. Seja $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq g^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$.

Seja f tal que $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\}$. A função f é contínua, $f(y) \in [0, 1]$ para todo $y \in X$.

Se $y \in \overline{U}$ então $g(y) < \frac{1}{2}$ e portanto $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\} = 2 \cdot 0 = 0$.

Se $y \in X \setminus V$ então $g(y) = 1$. Portanto $f(y) = 2 \cdot \max\{0, g(y) - \frac{1}{2}\} = 2 \cdot \max\{0, \frac{1}{2}\} = 1$.

Portanto, $(U, V) \in \mathcal{C}$ e $f_{(U, V)} \in \mathcal{F}$. Logo, temos que $f_{(U, V)}(x) \in f_{(U, V)}[\overline{U}] = \{0\}$ e $f_{(U, V)}[F] \subseteq f_{(U, V)}[X \setminus V] = \{1\}$.

Assim, $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados. $\square$

Teorema 15.20. Se X é T_3 e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade então X é isomorfo a um subespaço de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Em particular, X é metrizável.

Demonstração. Vimos que um espaço regular e com base enumerável é normal. Espaços normais e T_1 são $T_{3\frac{1}{2}}$. Um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ com base enumerável possui uma família enumerável que separa pontos e separa pontos de fechados. Assim, X pode ser imerso num produto enumerável de $[0, 1]$'s que é metrizável. Assim, X é homeomorfo a um subespaço de um metrizável, portanto X é metrizável. $\square$