MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I – 2023

Lista 2

1. Explique, com suas palavras, o significado da seguinte expressão:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

É possível que para alguma f tal equação seja verdadeira e, ao mesma tempo, $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa a seguinte expressão:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7.$$

Nesta situação é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Calcule os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$.

4. Explique o significado de cada uma das expressões a seguir:

(a) $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$;

(b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$;

(d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

5. Determine os seguintes limites infinitos:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{6}{x-5}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} - \frac{1}{2x}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} - \frac{1}{2x}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} - \frac{1}{2x}$.

6. Para cada item esboce o gráfico de uma de função f que satisfaça as respectivas condições.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$ e f não está definida em 0;

(b) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f é ímpar;

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

7. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{se } x < -1; \\ x, & \text{se } -1 \le x < 1; \\ (x-1)^2, & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

8. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{6t^2+5t}{(1-t)(2t-3)}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{|x-1|}{x-1}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{4}{x-3}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{5}{3-x}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^3}$;

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{x^2-1}$;

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$;

(m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[5+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right]$;

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}$;

(o) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$;

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x+\operatorname{tg}x\operatorname{sen}x}$;

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-3x+2}$;

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{3x-8}-2}$;

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^3\cos\frac{1}{x}$;

(t) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$;

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x^2-\operatorname{sen}x}$;

(v) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$;

(w) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}$;

(x) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

9. A função

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{se } x\le 1;\\ 1, & \text{se } x>1.\end{cases}$$

é contínua em 1? Justifique sua resposta.

10. Sejam $a\in\mathbb{R}$ e $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}-ax-1, & \text{se } x<1;\\ 0, & \text{se } x=1;\\ -x^2+a^2(2-x)x, & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Existe $a\in\mathbb{R}$ tal que f seja contínua? Justifique sua resposta.

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto p dado. Justifique suas respostas.

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x\neq 2;\\ L, & \text{se } x=2\end{cases}$ e $p=2$;

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x\neq 0;\\ L, & \text{se } x=0\end{cases}$ e $p=0$.

12. Para a função f cujo gráfico é dado na figura 1, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}f(x)$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}f(x)$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)$.

(e) $f(3)$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}f(x)$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}f(x)$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)$.

(i) $f(-2)$.

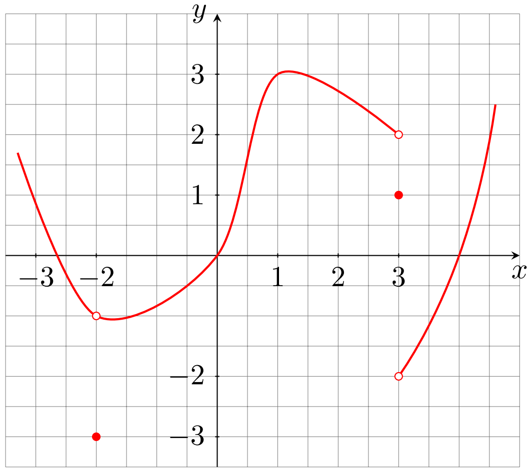

Figure 1

13. Para a função g cujo gráfico é dado na figura 2, determine:

(a) $\lim_{x\to -6} g(x)$;

(b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$;

(c) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$;

(d) $\lim_{x\to 4} g(x)$;

(e) as equações das assíntotas verticais.

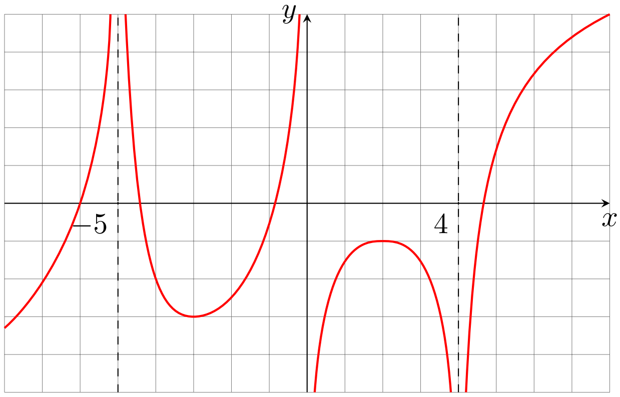

Figure 2

14. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \frac{x^6}{3} + \sqrt{x^2+1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$;

(b) $\lim_{x\to 0} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)$.