

PRO 5971 - Statistical Process Monitoring

Shewhart control chart: monitoring the variance by R chart

Linda Lee Ho

March 29, 2023

Department of Production Engineering
University of São Paulo

- Before monitoring the stability of a mean, it is desirable to have firstly stable the variance.
- For this aim, three most used control charts are: R, S and S^2 .
- Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample of size n of X
- The range $R = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
- Let $W = \frac{R}{\sigma}$ the standardized range
- Table of cumulative distribution function (CDF) of W is available for $n=2$ to 20. See Pearson & Hartley (1942)
- The upper and lower probability control limits of R chart are respectively:
 - $UCL_R = W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0$
 - $LCL_R = W_{\alpha/2} \times \sigma_0$,
 - W_a represents the quantil of W at a -th level .

The CDF of W is expressed as

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+w) - F(x)]^{n-1} f(x) dx$$

Next slides, Table of CDF of W built by Pearson & Hartley (1942) are presented for some sample sizes.

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 1

$\frac{n}{W}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\frac{n}{W}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0-00	0-0000	0-0000																		
0-05	-0282	-0007	0-0000																	
0-10	-0564	-0028	-0001																	
0-15	-0845	-0062	-0004	0-0000																
0-20	-1125	-0110	-0010	-0001																
0-25	0-1403	0-0171	0-0020	0-0002																
0-30	-1680	-0245	-0034	-0004	0-0000															
0-35	-1955	-0332	-0053	-0008	-0001															
0-40	-2227	-0431	-0079	-0014	-0002	0-0000														
0-45	-2497	-0543	-0111	-0022	-0004	-0001														
0-50	0-2763	0-0666	0-0152	0-0033	0-0007	0-0002	0-0000													
0-55	-3027	-0800	-0200	-0048	-0011	-0003	-0001													
0-60	-3286	-0944	-0257	-0068	-0017	-0004	-0001	0-0000												
0-65	-3542	-1099	-0323	-0092	-0025	-0007	-0002	-0001												
0-70	-3794	-1263	-0398	-0121	-0036	-0011	-0003	-0001	0-0000											
0-75	0-4041	0-1436	0-0483	0-0157	0-0050	0-0016	0-0005	0-0002	0-0001											
0-80	-4284	-1616	-0578	-0200	-0068	-0023	-0008	-0002	-0001											
0-85	-4522	-1805	-0682	-0250	-0090	-0032	-0011	-0004	-0001											
0-90	-4755	-2000	-0797	-0309	-0117	-0044	-0016	-0006	-0002	0-0000										
0-95	-4983	-2201	-0922	-0375	-0150	-0059	-0023	-0009	-0003	0-0000										
1-00	0-5205	0-2407	0-1057	0-0450	0-0188	0-0078	0-0032	0-0013	0-0005											
1-05	-5422	-2618	-1201	-0535	-0234	-0101	-0043	-0018	-0008											
1-10	-5653	-2833	-1355	-0629	-0287	-0129	-0057	-0025	-0011											
1-15	-5893	-3051	-1517	-0732	-0348	-0163	-0075	-0035	-0016	0-0000										
1-20	-6039	-3272	-1688	-0847	-0417	-0203	-0098	-0047	-0022	0-0000										
1-25	0-6232	0-3495	0-1868	0-0970	0-0495	0-0250	0-0125	0-0062	0-0030											
1-30	-6420	-3719	-2054	-1104	-0583	-0304	-0157	-0080	-0041											
1-35	-6602	-3943	-2248	-1247	-0680	-0366	-0195	-0103	-0050											
1-40	-6778	-4168	-2448	-1400	-0787	-0437	-0240	-0131	-0071											
1-45	-6948	-4392	-2654	-1562	-0904	-0517	-0292	-0164	-0092											
1-50	0-7112	0-4614	0-2865	0-1733	0-1031	0-0606	0-0353	0-0204	0-0117											
1-55	-7269	-4835	-3080	-1913	-1168	-0705	-0422	-0250	-0148											
1-60	-7421	-5053	-3299	-2101	-1316	-0814	-0499	-0304	-0184											
1-65	-7567	-5269	-3521	-2296	-1473	-0934	-0587	-0366	-0227											
1-70	-7707	-5481	-3745	-2498	-1639	-1064	-0684	-0437	-0277											
1-75	0-7841	0-5690	0-3971	0-2706	0-1815	0-1204	0-0792	0-0517	0-0336											
1-80	-7969	-5894	-4197	-2920	-2000	-1355	-0910	-0607	-0403											
1-85	-8092	-6084	-4429	-3138	-2193	-1516	-1039	-0707	-0479											
1-90	-8209	-6290	-4649	-3361	-2394	-1686	-1178	-0818	-0565											
1-95	-8321	-6480	-4874	-3587	-2602	-1867	-1329	-0940	-0661											
2-00	0-8427	0-6605	0-5096	0-3816	0-2818	0-2036	0-1489	0-1072	0-0765											
2-05	-8528	-6845	-5317	-4046	-3035	-2254	-1661	-1216	-0886											
2-10	-8624	-7019	-5534	-4277	-3260	-2460	-1842	-1371	-1015											
2-15	-8716	-7187	-5748	-4508	-3489	-2673	-2033	-1536	-1156											
2-20	-8802	-7349	-5957	-4739	-3720	-2893	-2232	-1712	-1307											
2-25	0-8884	0-7505	0-6163	0-4969	0-3955	0-3118	0-2440	0-1899	0-1470											
2-30	-8961	-7655	-6363	-5196	-4190	-3348	-2656	-2095	-1645											
2-35	-9034	-7799	-6558	-5421	-4427	-3582	-2878	-2300	-1830											
2-40	-9103	-7937	-6748	-5643	-4663	-3820	-3107	-2514	-2025											
2-45	-9168	-8069	-6932	-5861	-4899	-4059	-3341	-2735	-2230											
2-50	0-9229	0-8195	0-7110	0-6075	0-5132	0-4300	0-3579	0-2964	0-2443											
2-55	0-9297	0-8263	0-7177	0-6132	0-5189	0-4357	0-3636	0-3021	0-2500											
2-60	0-9364	0-8330	0-7244	0-6197	0-5256	0-4404	0-3683	0-3068	0-2547											
2-65	0-9430	0-8396	0-7310	0-6261	0-5321	0-4469	0-3748	0-3133	0-2612											
2-70	0-9496	0-8462	0-7375	0-6326	0-5386	0-4534	0-3808	0-3198	0-2677											
2-75	0-9561	0-8527	0-7440	0-6391	0-5451	0-4599	0-3867	0-3267	0-2746											
2-80	0-9626	0-8592	0-7505	0-6456	0-5516	0-4664	0-3932	0-3336	0-2815											
2-85	0-9691	0-8657	0-7569	0-6521	0-5581	0-4729	0-3997	0-3401	0-2884											
2-90	0-9756	0-8722	0-7634	0-6586	0-5646	0-4794	0-4062	0-3466	0-2949											
2-95	0-9821	0-8787	0-7698	0-6651	0-5711	0-4859	0-4127	0-3531	0-3014											
3-00	0-9886	0-8852	0-7763	0-6716	0-5776	0-4924	0-4192	0-3596	0-3077											
3-05	0-9951	0-8917	0-7827	0-6781	0-5841	0-4989	0-4257	0-3661	0-3142											
3-10	1-0016	0-8982	0-7892	0-6846	0-5906	0-5051	0-4318	0-3726	0-3207											
3-15	1-0081	0-9047	0-7957	0-6911	0-5971	0-5112	0-4379	0-3791	0-3272											
3-20	1-0146	0-9112	0-8022	0-6976	0-6036	0-5177	0-4444	0-3856	0-3347											
3-25	1-0211	0-9177	0-8087	0-7041	0-6101	0-5232	0-4509	0-3921	0-3402											
3-30	1-0276	0-9242	0-8152	0-7106	0-6166	0-5297	0-4574	0-3986	0-3467											
3-35	1-0341	0-9307	0-8217	0-7171	0-6231	0-5362	0-4639	0-4051	0-3532											
3-40	1-0406	0-9372	0-8282	0-7236	0-6296	0-5427	0-4704	0-4116	0-3597											
3-45	1-0471	0-9437	0-8347	0-7301	0-6361	0-5492	0-4769	0-4181	0-3662											
3-50	1-0536	0-9502	0-8412	0-7366	0-6426	0-5557	0-4834	0-4246	0-3727											
3-55	1-0601	0-9567	0-8477	0-7431	0-6491	0-5622	0-4899	0-4311	0-3792											
3-60	1-0666	0-9632	0-8542	0-7496	0-6556	0-5687	0-4964	0-4376	0-3857											
3-65	1-0731	0-9697	0-8607	0-7561	0-6621	0-5752	0-5029	0-4441	0-3922											
3-70	1-0796	0-9762	0-8672	0-7626	0-6686	0-5817	0-5094	0-4506	0-3987											
3-75	1-0861	0-9827	0-8737	0-7691	0-6751	0-5882	0-5159	0-4571	0-4052											
3-80	1-0926	0-9892	0-8802	0-7756	0-6816	0-5947	0-5224	0-4636	0-4117											
3-85	1-0991	0-9957	0-8867	0-7821	0-6881	0-6012	0-5289	0-4701	0-4182											
3-90	1-1056	1-0022	0-8932	0-7886	0-6946	0-6077	0-5354	0-4766	0-4247											
3-95	1-1121	1-0087	0-8997	0-7951	0-7011	0-6142	0-5419	0-4831	0-4312											
4-00	1-1186	1-0152	0-9062	0-8016	0-7076	0-6207	0-5484	0-4896	0-4377											
4-05	1-1251	1-0217	0-9127	0-8081	0-7141	0-6272	0-5549	0-4961	0-4442											
4-10	1-1316	1-0282	0-9192	0-8146	0-7206	0-6337	0-5614	0-5026	0-4507											
4-15	1-1381	1-0347	0-9257	0-8211	0-7271	0-6402	0-5679													

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 2

$\frac{n}{\text{If}}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2-50	0-9229	0-8195	0-7110	0-6073	0-5132	0-4300	0-3579	0-2964	0-2443
2-55	0-9286	0-8315	0-7282	0-6285	0-5364	0-4541	0-3820	0-3198	0-2665
2-60	0-9340	0-8429	0-7448	0-6487	0-5592	0-4782	0-4064	0-3437	0-2894
2-65	0-9390	0-8537	0-7607	0-6685	0-5816	0-5022	0-4309	0-3680	0-3130
2-70	0-9438	0-8640	0-7759	0-6877	0-6036	0-5259	0-4555	0-3927	0-3372
2-75	0-9482	0-8737	0-7905	0-7063	0-6252	0-5494	0-4801	0-4175	0-3617
2-80	0-9523	0-8828	0-8045	0-7242	0-6461	0-5725	0-5044	0-4425	0-3867
2-85	0-9561	0-8915	0-8177	0-7415	0-6665	0-5952	0-5286	0-4675	0-4119
2-90	0-9597	0-9066	0-8304	0-7580	0-6863	0-6174	0-5525	0-4923	0-4372
2-95	0-9630	0-9073	0-8424	0-7739	0-7055	0-6390	0-5760	0-5171	0-4625
3-00	0-9661	0-9145	0-8537	0-7891	0-7239	0-6601	0-5991	0-5415	0-4878
3-05	0-9690	0-9212	0-8645	0-8026	0-7416	0-6806	0-6216	0-5656	0-5129
3-10	0-9716	0-9275	0-8746	0-8174	0-7587	0-7003	0-6436	0-5892	0-5375
3-15	0-9741	0-9334	0-8842	0-8305	0-7750	0-7194	0-6649	0-6124	0-5623
3-20	0-9763	0-9388	0-8931	0-8429	0-7905	0-7377	0-6866	0-6350	0-5845
3-25	0-9784	0-9439	0-9016	0-8546	0-8053	0-7553	0-7055	0-6569	0-6099
3-30	0-9804	0-9487	0-9095	0-8667	0-8194	0-7721	0-7248	0-6782	0-6329
3-35	0-9822	0-9531	0-9168	0-8761	0-8327	0-7881	0-7432	0-6988	0-6553
3-40	0-9838	0-9572	0-9237	0-8859	0-8454	0-8034	0-7609	0-7186	0-6769
3-45	0-9853	0-9609	0-9302	0-8951	0-8573	0-8179	0-7778	0-7376	0-6978
3-50	0-9867	0-9644	0-9361	0-9037	0-8685	0-8316	0-7939	0-7558	0-7180
3-55	0-9879	0-9677	0-9417	0-9117	0-8790	0-8446	0-8091	0-7732	0-7373
3-60	0-9891	0-9706	0-9468	0-9192	0-8889	0-8568	0-8236	0-7898	0-7555
3-65	0-9901	0-9737	0-9516	0-9261	0-8983	0-8682	0-8372	0-8055	0-7732
3-70	0-9911	0-9769	0-9559	0-9326	0-9067	0-8790	0-8501	0-8204	0-7902
3-75	0-9920	0-9782	0-9600	0-9386	0-9148	0-8891	0-8622	0-8345	0-8062
3-80	0-9928	0-9803	0-9637	0-9441	0-9222	0-8985	0-8736	0-8477	0-8212
3-85	0-9935	0-9822	0-9672	0-9493	0-9291	0-9073	0-8842	0-8602	0-8355
3-90	0-9942	0-9839	0-9703	0-9540	0-9355	0-9155	0-8941	0-8718	0-8488
3-95	0-9948	0-9856	0-9732	0-9583	0-9415	0-9230	0-9034	0-8827	0-8614
4-00	0-9953	0-9870	0-9758	0-9663	0-9499	0-9300	0-9120	0-8929	0-8731
4-05	0-9958	0-9883	0-9782	0-9702	0-9619	0-9455	0-9199	0-9024	0-8841
4-10	0-9963	0-9895	0-9804	0-9733	0-9656	0-9495	0-9243	0-9112	0-8943
4-15	0-9967	0-9906	0-9824	0-9754	0-9680	0-9520	0-9271	0-9139	0-8938
4-20	0-9970	0-9916	0-9842	0-9782	0-9717	0-9560	0-9319	0-9186	0-8966
4-25	0-9974	0-9925	0-9859	0-9807	0-9756	0-9606	0-9361	0-9228	0-9008
4-30	0-9976	0-9933	0-9874	0-9820	0-9775	0-9627	0-9382	0-9249	0-9029
4-35	0-9979	0-9941	0-9887	0-9831	0-9784	0-9637	0-9392	0-9259	0-9040
4-40	0-9981	0-9947	0-9899	0-9840	0-9791	0-9645	0-9400	0-9267	0-9048
4-45	0-9984	0-9953	0-9910	0-9857	0-9805	0-9654	0-9410	0-9277	0-9059
4-50	0-9985	0-9958	0-9920	0-9873	0-9817	0-9724	0-9684	0-9608	0-9527
4-55	0-9987	0-9963	0-9929	0-9887	0-9837	0-9780	0-9717	0-9649	0-9575
4-60	0-9989	0-9967	0-9937	0-9899	0-9855	0-9804	0-9747	0-9686	0-9620
4-65	0-9990	0-9971	0-9944	0-9911	0-9871	0-9825	0-9775	0-9719	0-9660
4-70	0-9991	0-9974	0-9951	0-9921	0-9885	0-9845	0-9799	0-9750	0-9696
4-75	0-9992	0-9977	0-9956	0-9930	0-9898	0-9862	0-9822	0-9777	0-9729
4-80	0-9993	0-9980	0-9962	0-9938	0-9910	0-9878	0-9842	0-9802	0-9759
4-85	0-9994	0-9983	0-9966	0-9945	0-9920	0-9892	0-9860	0-9824	0-9786
4-90	0-9995	0-9985	0-9970	0-9952	0-9930	0-9904	0-9876	0-9844	0-9811
4-95	0-9995	0-9987	0-9974	0-9958	0-9938	0-9916	0-9890	0-9862	0-9832
5-00	0-9996	0-9988	0-9977	0-9963	0-9946	0-9926	0-9903	0-9878	0-9851

$\frac{n}{\text{If}}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2-50	0-2007	0-1644	0-1342	0-1094	0-0890	0-0722	0-0586	0-0474	0-0383	0-0309
2-55	0-2213	0-1833	0-1514	0-1247	0-1026	0-0842	0-0690	0-0565	0-0462	0-0377
2-60	0-2429	0-2033	0-1697	0-1413	0-1174	0-0970	0-0807	0-0668	0-0552	0-0455
2-65	0-2663	0-2243	0-1891	0-1591	0-1336	0-1120	0-0937	0-0783	0-0654	0-0545
2-70	0-2885	0-2462	0-2096	0-1780	0-1509	0-1278	0-1080	0-0911	0-0768	0-0647
2-75	0-3124	0-2690	0-2311	0-1981	0-1696	0-1449	0-1236	0-1053	0-0896	0-0761
2-80	0-3368	0-2926	0-2536	0-2194	0-1894	0-1632	0-1405	0-1208	0-1037	0-0889
2-85	0-3617	0-3169	0-2770	0-2416	0-2103	0-1829	0-1587	0-1376	0-1192	0-1031
2-90	0-3870	0-3417	0-3011	0-2647	0-2324	0-2036	0-1782	0-1558	0-1360	0-1186
2-95	0-4126	0-3670	0-3258	0-2887	0-2554	0-2255	0-1989	0-1752	0-1542	0-1355
3-00	0-4382	0-3927	0-3512	0-3134	0-2792	0-2484	0-2207	0-1959	0-1737	0-1538
3-05	0-4639	0-4186	0-3769	0-3387	0-3039	0-2723	0-2436	0-2178	0-1944	0-1734
3-10	0-4895	0-4446	0-4029	0-3645	0-3292	0-2970	0-2676	0-2407	0-2164	0-1943
3-15	0-5150	0-4706	0-4292	0-3907	0-3551	0-3224	0-2923	0-2647	0-2394	0-2164
3-20	0-5401	0-4966	0-4555	0-4171	0-3814	0-3483	0-3177	0-2895	0-2635	0-2396
3-25	0-5649	0-5222	0-4817	0-4437	0-4081	0-3748	0-3438	0-3151	0-2885	0-2638
3-30	0-5893	0-5475	0-5078	0-4703	0-4348	0-4015	0-3704	0-3413	0-3142	0-2890
3-35	0-6131	0-5725	0-5337	0-4967	0-4617	0-4286	0-3974	0-3681	0-3407	0-3150
3-40	0-6363	0-5970	0-5592	0-5230	0-4885	0-4562	0-4246	0-3953	0-3677	0-3417
3-45	0-6589	0-6209	0-5842	0-5489	0-5151	0-4827	0-4519	0-4227	0-3950	0-3689
3-50	0-6807	0-6442	0-6087	0-5744	0-5413	0-5096	0-4792	0-4502	0-4226	0-3964
3-55	0-7017	0-6668	0-6326	0-5994	0-5672	0-5362	0-5063	0-4777	0-4504	0-4242
3-60	0-7220	0-6886	0-6556	0-6237	0-5926	0-5624	0-5332	0-5051	0-4781	0-4522
3-65	0-7414	0-7096	0-6782	0-6474	0-6171	0-5871	0-5586	0-5321	0-5056	0-4800
3-70	0-7600	0-7298	0-6998	0-6704	0-6412	0-6132	0-5856	0-5588	0-5329	0-5078
3-75	0-7776	0-7491	0-7206	0-6925	0-6648	0-6376	0-6110	0-5850	0-5598	0-5352
3-80	0-7944	0-7675	0-7406	0-7138	0-6873	0-6613	0-6357	0-6106	0-5861	0-5622
3-85	0-8103	0-7850	0-7596	0-7342	0-7090	0-6841	0-6596	0-6355	0-6118	0-5887
3-90	0-8254	0-8016	0-7777	0-7537	0-7298	0-7061	0-6827	0-6596	0-6369	0-6145
3-95	0-8395	0-8173	0-7948	0-7723	0-7497	0-7273	0-7050	0-6829	0-6611	0-6397
4-00	0-8528	0-8321	0-8111	0-7899	0-7686	0-7474	0-7263	0-7053	0-6845	0-6640
4-05	0-8653	0-8460	0-8264	0-8065	0-7866	0-7666	0-7466	0-7268	0-7070	0-6874
4-10	0-8769	0-8590	0-8408	0-8223	0-8036	0-7848	0-7660	0-7472	0-7285	0-7099
4-15	0-8878	0-8712	0-8543	0-8371	0-8196	0-8021	0-7844	0-7667	0-7491	0-7315
4-20	0-8978	0-8826	0-8669	0-8509	0-8347	0-8183	0-8018	0-7852	0-7686	0-7520
4-25	0-9072	0-8931	0-8787	0-8639	0-8488	0-8336	0-8182	0-8027	0-7871	0-7715
4-30	0-9159	0-9029	0-8896	0-8760	0-8620	0-8479	0-8336	0-8191	0-8046	0-7899
4-35	0-9238	0-9120	0-8998	0-8872	0-8744	0-8613	0-8480	0-8345	0-8210	0-8073
4-40	0-9312	0-9204	0-9092	0-8976	0-8858	0-8738	0-8614	0-8490	0-8364	0-8237
4-45	0-9379	0-9281	0-9178	0-9073	0-8964	0-8853	0-8740	0-8625	0-8508	0-8391
4-50	0-9441	0-9352	0-9258	0-9162	0-9062	0-8960	0-8856	0-8750	0-8643	0-8534
4-55	0-9498	0-9417	0-9322	0-9244	0-9153	0-9060	0-8964	0-8867	0-8768	0-8667
4-60	0-9550	0-9476	0-9399	0-9319	0-9236	0-9151	0-9064	0-8975	0-8884	0-8791
4-65	0-9597	0-9530	0-9460	0-9388	0-9313	0-9235	0-9155	0-9074	0-8991	0-8906
4-70	0-9640	0-9579	0-9516	0-9451	0-9383	0-9312	0-9240	0-9165	0-9090	0-9012
4-75	0-9678	0-9624	0-9567	0-9508	0-9446	0-9383	0-9317	0-9249	0-9180	0-9110
4-80	0-9713	0-9665	0-9614	0-9550	0-9505	0-9447	0-9387	0-9326	0-9264	0-9199
4-85	0-9745	0-9702	0-9656	0-9608	0-9558	0-9505	0-9452	0-9396	0-9340	0-9281
4-90	0-9774	0-9735	0-9694	0-9650	0-9605	0-9559	0-9510	0-9460	0-9409	0-9356
4-95	0-9799	0-9765	0-9728	0-9689	0-9649	0-9607	0-9563	0-9518	0-9472	0-9424
5-00	0-9822	0-9791	0-9759	0-9724	0-9688	0-9650	0-9611	0-9571	0-9529	0-9488

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 3

	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
W										W										
5-00	0-9996	0-9988	0-9977	0-9963	0-9946	0-9926	0-9903	0-9878	0-9851	5-00	0-9822	0-9791	0-9759	0-9724	0-9688	0-9650	0-9611	0-9571	0-9529	0-9486
5-05	-9995	-9990	-9980	-9967	-9952	-9935	-9915	-9893	-9869	5-05	-9843	-9815	-9786	-9756	-9723	-9690	-9655	-9618	-9581	-9543
5-10	-9997	-9991	-9982	-9971	-9958	-9942	-9925	-9906	-9884	5-10	-9861	-9837	-9811	-9784	-9755	-9725	-9694	-9661	-9628	-9593
5-15	-9997	-9992	-9985	-9975	-9963	-9950	-9934	-9917	-9898	5-15	-9878	-9856	-9833	-9809	-9783	-9757	-9729	-9700	-9670	-9639
5-20	-9998	-9993	-9986	-9978	-9968	-9956	-9942	-9927	-9911	5-20	-9893	-9874	-9853	-9832	-9809	-9785	-9760	-9733	-9708	-9681
5-25	0-9998	0-9994	0-9988	0-9981	0-9972	0-9961	0-9949	0-9936	0-9922	5-25	0-9906	0-9889	0-9871	0-9852	0-9832	0-9811	0-9789	0-9766	0-9742	0-9718
5-30	-9998	-9995	-9990	-9983	-9975	-9966	-9956	-9944	-9931	5-30	-9917	-9903	-9887	-9870	-9852	-9833	-9814	-9794	-9773	-9751
5-35	-9998	-9995	-9991	-9985	-9979	-9971	-9961	-9951	-9940	5-35	-9928	-9915	-9901	-9886	-9870	-9854	-9836	-9819	-9800	-9781
5-40	-9999	-9996	-9992	-9987	-9981	-9974	-9966	-9957	-9948	5-40	-9937	-9925	-9913	-9900	-9886	-9872	-9856	-9841	-9824	-9807
5-45	-9999	-9997	-9993	-9989	-9984	-9978	-9971	-9963	-9954	5-45	-9945	-9935	-9924	-9912	-9900	-9888	-9874	-9860	-9846	-9831
5-50	0-9999	0-9997	0-9994	0-9991	0-9986	0-9981	0-9975	0-9968	0-9960	5-50	0-9952	0-9943	0-9934	0-9924	0-9913	0-9902	0-9890	0-9878	0-9865	0-9852
5-55	-9999	-9997	-9995	-9992	-9988	-9983	-9978	-9972	-9965	5-55	-9958	-9951	-9942	-9933	-9924	-9914	-9904	-9893	-9882	-9870
5-60	-9999	-9998	-9996	-9993	-9989	-9985	-9981	-9976	-9970	5-60	-9964	-9957	-9950	-9942	-9934	-9925	-9916	-9907	-9897	-9887
5-65	-9999	-9998	-9996	-9994	-9991	-9987	-9983	-9979	-9974	5-65	-9969	-9963	-9956	-9950	-9943	-9935	-9927	-9919	-9910	-9901
5-70	0-9999	0-9998	0-9997	0-9995	0-9992	0-9989	0-9986	0-9982	0-9977	5-70	0-9973	0-9968	0-9962	0-9956	0-9950	0-9944	0-9937	0-9929	0-9922	0-9914
5-75	1-0000	0-9999	0-9997	0-9995	0-9993	0-9991	0-9988	0-9984	0-9981	5-75	0-9976	0-9972	0-9967	0-9962	0-9957	0-9951	0-9945	0-9939	0-9932	0-9925
5-80	-9999	-9998	-9996	-9994	-9992	-9989	-9986	-9983	5-80	-9980	-9976	-9972	-9967	-9963	-9958	-9952	-9947	-9941	-9935	
5-85	-9999	-9998	-9997	-9995	-9993	-9991	-9988	-9986	5-85	-9982	-9979	-9976	-9972	-9968	-9963	-9959	-9954	-9949	-9944	
5-90	-9999	-9998	-9997	-9996	-9994	-9992	-9990	-9988	5-90	-9985	-9982	-9979	-9976	-9972	-9968	-9964	-9960	-9956	-9952	
5-95	-9999	-9998	-9998	-9998	-9996	-9995	-9993	-9991	-9989	5-95	-9987	-9985	-9982	-9979	-9976	-9973	-9969	-9966	-9962	-9958
6-00	0-9999	0-9999	0-9998	0-9997	0-9996	0-9994	0-9993	0-9991	6-00	0-9989	0-9987	0-9984	0-9982	0-9979	0-9977	0-9974	0-9971	0-9967	0-9964	
6-05	-9999	-9999	-9998	-9997	-9996	-9995	-9994	-9992	6-05	-9990	-9989	-9987	-9984	-9982	-9980	-9977	-9975	-9972	-9969	
6-10	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9997	0-9996	0-9995	0-9993	6-10	0-9992	0-9990	0-9989	0-9987	0-9985	0-9983	0-9981	0-9978	0-9976	0-9973	
6-15	1-0000	0-9999	0-9999	0-9998	0-9997	0-9996	0-9995	0-9994	6-15	0-9993	0-9992	0-9990	0-9989	0-9987	0-9985	0-9983	0-9981	0-9979	0-9977	
6-20	-9999	-9999	-9999	-9998	-9998	-9997	-9996	-9995	6-20	-9994	-9993	-9992	-9990	-9989	-9987	-9986	-9984	-9982	-9980	
6-25	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	6-25	0-9995	0-9994	0-9993	0-9992	0-9991	0-9989	0-9988	0-9988	0-9985	0-9983	
6-30	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9996	6-30	0-9996	0-9995	0-9994	0-9993	0-9992	0-9991	0-9990	0-9988	0-9987	0-9986	
6-35	1-0000	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	6-35	0-9996	0-9996	0-9995	0-9994	0-9993	0-9992	0-9991	0-9990	0-9989	0-9988	
6-40	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	6-40	0-9997	0-9996	0-9996	0-9995	0-9994	0-9993	0-9992	0-9992	0-9991	0-9990	
6-45	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	6-45	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	0-9995	0-9994	0-9994	0-9993	0-9992	0-9991	
6-50	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	6-50	0-9998	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	0-9995	0-9995	0-9994	0-9993	0-9993	
6-55	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	6-55	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9996	0-9995	0-9995	0-9995	0-9994	0-9994	
6-60	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-60	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	0-9995	0-9995	
6-65	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-65	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	
6-70	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-70	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9997	
6-75	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-75	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	
6-80	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-80	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9998	0-9998	
6-85	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-85	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	
6-90	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-90	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	
6-95	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	6-95	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-00	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-00	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-05	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-05	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-10	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-10	1-0000	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-15	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-15	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-20	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-20	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	
7-25	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	7-25	1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	

- σ_0 may shift to $\sigma_1 = \delta\sigma_0$
- The power $1 - \beta$

$$\begin{aligned} &= P(R > W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0 | \sigma_1 = \delta\sigma_0) + P(R < W_{\alpha/2} \times \sigma_0 | \sigma_1 = \delta\sigma_0) \\ &= P\left(\frac{R}{\sigma_1} > \frac{W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0}{\sigma_1} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) + P\left(\frac{R}{\sigma_1} < \frac{W_{\alpha/2} \times \sigma_0}{\sigma_1} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) \\ &= P\left(W > \frac{W_{1-\alpha/2}}{\delta} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) + P\left(W < \frac{W_{\alpha/2}}{\delta} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) \end{aligned}$$

I- Write a procedure indicating how the empirical distribution of W can be reached by Monte Carlo simulation. Using this procedure, write a program in R/Python to get the empirical distribution and how the probability control limits can be approximately obtained.

II - Write a program in R/Python to get CDF (exact, by the integration) of W when X is normally distributed.

III- Use the Pearson & Hartley Table:

1. Find the control limits for R chart for sample sizes $n = 5, 10, 15$ when $\sigma_0 = 1, 10$ and $\alpha = 0.05, 0.01$.
2. Find the power of this chart when the standard deviation shifts for $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, $\delta = 1.25, 1.5, 2, 3$.
3. Discuss the results.

To get asymptotic control limits

- $E(W) = \frac{E(R)}{\sigma} \rightarrow \sigma E(W) = E(R) = \sigma d_2.$
- $Var(W) = \frac{Var(R)}{\sigma^2} \rightarrow \sigma_w = \frac{\sigma_R}{\sigma} = d_3 \rightarrow \sigma_R = d_3 \sigma.$
- Tables of values of d_2 and d_3 in function of n are available in the SPC books.
- Control limits and center line of R chart:
 - center line: $d_2 \sigma_0$
 - $UCL_R = d_2 \sigma_0 + z_{1-\alpha/2} d_3 \sigma_0$
 - $LCL_R = \max(0, d_2 \sigma_0 - z_{1-\alpha/2} d_3 \sigma_0)$

- Power I- Probability to detect a shift: $1-\beta$

$$P(R > (d_2 + z_{1-\alpha/2}d_3)\sigma_0 | n, \sigma_1 = \delta\sigma_0)$$

$$P\left(\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + z_{1-\alpha/2}d_3)\sigma_0}{\sigma_1} | n\right)$$

$$P\left(W > \frac{(d_2 + z_{1-\alpha/2}d_3)}{\delta} | n\right)$$

- Replace $d_2\sigma_0$ by $\bar{R} = \frac{R_1 + \dots + R_m}{m}$, an estimator of $E(R)$ and σ_0 by $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ and make
- center line: \bar{R}
- $UCL_R = \bar{R} + 3d_3\bar{R}/d_2$
- $LCL_R = \max(0, \bar{R} - 3d_3\bar{R}/d_2)$

Table 1: Volumes of soft drink in cm^3 taken at every 30 min in 15 hours of production

Sample	X1	X2	X3	Sample	X1	X2	X3
1	252.16	250.34	249.7	16	248.29	249.6	249.15
2	248.34	248.61	250.63	17	249.59	249.89	248.51
3	249.19	250.02	250.84	18	248.03	249.11	249.81
4	251.29	249.93	250.24	19	250.99	251.5	249.92
5	248.16	250.41	251.19	20	247.62	250.43	250.39
6	250.37	251.98	248.44	21	250.6	250.54	250.2
7	250.31	248.71	251.13	22	250.44	251.17	250.01
8	250.27	249.64	249.92	23	249.35	249.16	250.2
9	250.72	250.8	249.35	24	248.17	249.94	248.15
10	250.45	249.18	250.04	25	249.98	251.57	249.79
11	251.76	252.01	251.9	26	250.1	249.57	249.11
12	249.33	251.21	250.58	27	248.82	251.01	248.9
13	249.26	247.67	249.99	28	248.39	248.26	250.57
14	249.41	249.01	249.51	29	251.43	250.92	250.12
15	249.9	249.07	250.32	30	248.82	249.28	248.57

Use data of Table 1 determine the control limits for R chart considering $\alpha = 0.0027$

Is stable the variability of the volume of soft drink?

- Fixed α
- Central line: $\bar{\bar{X}}$
- Control limits: $\bar{\bar{X}} \pm z_{\alpha/2} \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$
- If $z_{\alpha/2}=3$, $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$, the control limits are: $\bar{\bar{X}} \pm A_2\bar{R}$
- See Tables for d_2, A_2

- Using the data of Table 1 obtain the control limits to monitor the average volume using as estimator of unknown σ , the average ranges.
- Is the process mean stable?
- If the average volume shift to 250.8 what the probability of the control chart signals this shift?

Table 2: Exercise

# of sample	AVG	Range	# of sample	AVG	Range
1	5.00	4.12	16	7.10	2.00
2	7.05	6.18	17	4.90	0.12
3	3.10	4.00	18	5.00	2.24
4	6.15	7.04	19	4.00	4.12
5	2.90	4.12	20	5.20	6.00
6	5.05	0.08	21	3.85	2.12
7	6.00	4.12	22	3.90	4.12
8	3.25	6.12	23	6.00	1.19
9	4.90	10.20	24	6.15	1.20
10	5.00	2.06	25	4.90	5.24
11	6.10	8.16	26	5.00	4.09
12	3.75	4.12	27	4.90	4.24
13	5.00	7.91	28	6.55	4.15
14	2.95	3.00	29	5.00	4.12
15	5.00	4.24	30	3.45	7.67

Use data of Table 2 and $\alpha = 0.0027$ to solve the following items:

- 1- What the probability to detect a shift of 1.5 standard deviation using R control chart?
- 2- Determine the control limits for \bar{X} and R charts considering unknown μ_0 cm and $\sigma = 5$ and known $\mu_0 = 5$ cm $\sigma = 5$

To answer the next items consider the control limits determined in item 2.

- 3 - If the process mean shifts to $\mu_1 = 7.50$ what is the probability to detect such change immediately at the first sample after the shift using the \bar{X} chart? And to detect such shift before than the fourth sample after the change?
- 4- If the standard deviation shifts to $\sigma_1 = 3.6$, what is the probability to detect such event by R chart at the first sample after the change?
- 5- And what is the probability to detect the event describe in item 4 by \bar{X} chart at the first sample after shift?
- 6 - Beyond the change in the variability of item 4, consider that the process mean also shifts to $\mu_1 = 6$. Recalculate the probability of the item 5.

References

Pearson, E. & Hartley, H. (1942), 'The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population', *Biometrika* **32**(3/4), 301–310.