PRO 5971 - Statistical Process Monitoring

Shewhart control chart: monitoring the variance by R chart

Linda Lee Ho

March 29, 2023

Department of Production Engineering
University of São Paulo

Outline

R chart

- Before monitoring the stability of a mean, it is desirable to have firstly stable the variance.
- For this aim, three most used control charts are: R, S and S^2.
- Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of size n of X
- The range $R_{=} max\{X_1, \ldots, X_n\} - min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
- Let $W = \dfrac{R}{\sigma}$ the standardized range
- Table of cumulative distribution function (CDF) of W is available for n=2 to 20. See Pearson & Hartley (1942)
- The upper and lower probability control limits of R chart are respectively:
  - $UCL_R = W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0$
  - $LCL_R = W_{\alpha/2} \times \sigma_0$,
  - W_a represents the quantil of W at a-th level .

Exact distribution of W

The CDF of W is expressed as

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+w) - F)x)]^{n-1} f(x) dx$$

Next slides, Table of CDF of W built by Pearson & Hartley (1942) are presented.

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 1

W \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0·00	0·0000	0·0000							
0·05	·0282	·0007	0·0000						
0·10	·0564	·0028	·0001						
0·15	·0845	·0062	·0004	0·0000					
0·20	·1125	·0110	·0010	·0001					
0·25	0·1403	0·0171	0·0020	0·0002					
0·30	·1680	·0245	·0034	·0004	0·0000				
0·35	·1955	·0332	·0053	·0008	·0001				
0·40	·2227	·0431	·0079	·0014	·0002	0·0000			
0·45	·2497	·0543	·0111	·0022	·0004	·0001			
0·50	0·2763	0·0666	0·0152	0·0033	0·0007	0·0002	0·0000		
0·55	·3027	·0800	·0200	·0048	·0011	·0003	·0001		
0·60	·3286	·0944	·0257	·0068	·0017	·0004	·0001	0·0000	
0·65	·3542	·1099	·0323	·0092	·0025	·0007	·0002	·0001	
0·70	·3794	·1263	·0398	·0121	·0036	·0011	·0003	·0001	0·0000
0·75	0·4041	0·1436	0·0483	0·0157	0·0050	0·0016	0·0005	0·0002	0·0001
0·80	·4284	·1616	·0578	·0200	·0068	·0023	·0008	·0002	·0001
0·85	·4522	·1805	·0682	·0250	·0090	·0032	·0011	·0004	·0001
0·90	·4755	·2000	·0797	·0309	·0117	·0044	·0016	·0006	·0002
0·95	·4983	·2201	·0922	·0375	·0150	·0059	·0023	·0009	·0003
1·00	0·5205	0·2407	0·1057	0·0450	0·0188	0·0078	0·0032	0·0013	0·0005
1·05	·5422	·2618	·1201	·0535	·0234	·0101	·0043	·0018	·0008
1·10	·5633	·2833	·1355	·0629	·0287	·0129	·0057	·0025	·0011
1·15	·5839	·3051	·1517	·0733	·0348	·0163	·0075	·0035	·0016
1·20	·6039	·3272	·1688	·0847	·0417	·0203	·0098	·0047	·0022
1·25	0·6232	0·3495	0·1868	0·0970	0·0495	0·0250	0·0125	0·0062	0·0030
1·30	·6420	·3719	·2054	·1104	·0583	·0304	·0157	·0080	·0041
1·35	·6602	·3943	·2248	·1247	·0680	·0366	·0195	·0103	·0054
1·40	·6778	·4168	·2448	·1400	·0787	·0437	·0240	·0131	·0071
1·45	·6948	·4392	·2654	·1562	·0904	·0517	·0292	·0164	·0092
1·50	0·7112	0·4614	0·2865	0·1733	0·1031	0·0606	0·0353	0·0204	0·0117
1·55	·7269	·4835	·3080	·1913	·1168	·0705	·0422	·0250	·0148
1·60	·7421	·5053	·3299	·2101	·1316	·0814	·0499	·0304	·0184
1·65	·7567	·5269	·3521	·2296	·1473	·0934	·0587	·0366	·0227
1·70	·7707	·5481	·3745	·2498	·1639	·1064	·0684	·0437	·0277
1·75	0·7841	0·5690	0·3971	0·2706	0·1815	0·1204	0·0792	0·0517	0·0336
1·80	·7969	·5894	·4197	·2920	·2000	·1355	·0910	·0607	·0403
1·85	·8092	·6094	·4423	·3138	·2193	·1516	·1039	·0707	·0479
1·90	·8209	·6290	·4649	·3361	·2394	·1686	·1178	·0818	·0565
1·95	·8321	·6480	·4874	·3587	·2602	·1867	·1329	·0940	·0661
2·00	0·8427	0·6665	0·5096	0·3816	0·2816	0·2056	0·1489	0·1072	0·0768
2·05	·8528	·6845	·5317	·4046	·3035	·2254	·1661	·1216	·0886
2·10	·8624	·7019	·5534	·4277	·3260	·2460	·1842	·1371	·1015
2·15	·8716	·7187	·5748	·4508	·3489	·2673	·2033	·1536	·1156
2·20	·8802	·7349	·5957	·4739	·3720	·2893	·2232	·1712	·1307
2·25	0·8884	0·7505	0·6163	0·4969	0·3955	0·3118	0·2440	0·1899	0·1470
2·30	·8961	·7655	·6363	·5196	·4190	·3348	·2656	·2095	·1645
2·35	·9034	·7799	·6558	·5421	·4427	·3582	·2878	·2300	·1830
2·40	·9103	·7937	·6748	·5643	·4663	·3820	·3107	·2514	·2025
2·45	·9168	·8069	·6932	·5861	·4899	·4059	·3341	·2735	·2230
2·50	0·9229	0·8195	0·7110	0·6075	0·5132	0·4300	0·3579	0·2964	0·2443

W \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0·85	0·0000									
0·90	·0001									
0·95	·0001	0·0000								
1·00	0·0002	0·0001	0·0000							
1·05	·0003	·0001	·0001							
1·10	·0005	·0002	·0001	0·0000						
1·15	·0007	·0003	·0001	·0001						
1·20	·0010	·0005	·0002	·0001	0·0000					
1·25	0·0015	0·0007	0·0004	0·0002	0·0001	0·0000				
1·30	·0021	·0010	·0005	·0003	·0001	·0001	0·0000			
1·35	·0028	·0015	·0008	·0004	·0002	·0001	·0001	0·0000		
1·40	·0038	·0021	·0011	·0006	·0003	·0002	·0001	·0001		
1·45	·0051	·0028	·0016	·0009	·0005	·0003	·0001	·0001	0·0000	
1·50	0·0067	0·0038	0·0022	0·0012	0·0007	0·0004	0·0002	0·0001	0·0001	0·0000
1·55	·0087	·0051	·0030	·0017	·0010	·0006	·0003	·0002	·0001	·0001
1·60	·0111	·0067	·0040	·0024	·0014	·0008	·0005	·0003	·0002	·0001
1·65	·0140	·0086	·0053	·0032	·0020	·0012	·0007	·0004	·0003	·0002
1·70	·0175	·0111	·0069	·0043	·0027	·0017	·0011	·0007	·0004	·0003
1·75	0·0217	0·0140	0·0090	0·0058	0·0037	0·0024	0·0015	0·0010	0·0006	0·0004
1·80	·0266	·0175	·0115	·0075	·0049	·0032	·0021	·0013	·0009	·0006
1·85	·0323	·0217	·0145	·0097	·0065	·0043	·0028	·0019	·0012	·0008
1·90	·0388	·0266	·0182	·0124	·0084	·0057	·0039	·0026	·0018	·0012
1·95	·0463	·0323	·0225	·0156	·0108	·0075	·0052	·0035	·0024	·0017
2·00	0·0548	0·0389	0·0276	0·0195	0·0137	0·0097	0·0068	0·0048	0·0033	0·0023
2·05	·0643	·0465	·0335	·0241	·0173	·0124	·0088	·0063	·0045	·0032
2·10	·0749	·0550	·0403	·0295	·0215	·0156	·0114	·0082	·0060	·0043
2·15	·0866	·0646	·0481	·0357	·0264	·0196	·0144	·0106	·0078	·0057
2·20	·0994	·0753	·0569	·0429	·0323	·0242	·0181	·0136	·0102	·0076
2·25	0·1134	0·0872	0·0669	0·0511	0·0390	0·0297	0·0226	0·0172	0·0130	0·0099
2·30	·1286	·1003	·0779	·0605	·0468	·0361	·0279	·0215	·0165	·0127
2·35	·1450	·1145	·0902	·0709	·0556	·0435	·0340	·0265	·0207	·0161
2·40	·1625	·1300	·1037	·0825	·0655	·0519	·0411	·0325	·0256	·0202
2·45	·1811	·1466	·1183	·0953	·0766	·0615	·0493	·0394	·0315	·0251
2·50	0·2007	0·1644	0·1342	0·1094	0·0890	0·0722	0·0586	0·0474	0·0383	0·0309

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 2

W \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2·50	0·9229	0·8195	0·7110	0·6075	0·5132	0·4300	0·3579	0·2964	0·2443
2·55	·9286	·8315	·7282	·6283	·5364	·4541	·3820	·3198	·2665
2·60	·9340	·8429	·7448	·6487	·5592	·4782	·4064	·3437	·2894
2·65	·9390	·8537	·7607	·6685	·5816	·5022	·4309	·3680	·3130
2·70	·9438	·8640	·7759	·6877	·6036	·5259	·4555	·3927	·3372
2·75	0·9482	0·8737	0·7905	0·7063	0·6252	0·5494	0·4801	0·4175	0·3617
2·80	·9523	·8828	·8045	·7242	·6461	·5725	·5044	·4425	·3867
2·85	·9561	·8915	·8177	·7415	·6665	·5952	·5286	·4675	·4119
2·90	·9597	·8996	·8304	·7580	·6863	·6174	·5525	·4923	·4372
2·95	·9630	·9073	·8424	·7739	·7055	·6390	·5760	·5171	·4625
3·00	0·9661	0·9145	0·8537	0·7891	0·7239	0·6601	0·5991	0·5415	0·4878
3·05	·9690	·9212	·8645	·8036	·7416	·6806	·6216	·5656	·5129
3·10	·9716	·9275	·8746	·8174	·7587	·7003	·6436	·5892	·5378
3·15	·9741	·9334	·8842	·8305	·7750	·7194	·6649	·6124	·5623
3·20	·9763	·9388	·8931	·8429	·7905	·7377	·6856	·6350	·5864
3·25	0·9784	0·9439	0·9016	0·8546	0·8053	0·7553	0·7055	0·6569	0·6099
3·30	·9804	·9487	·9095	·8657	·8194	·7721	·7248	·6782	·6329
3·35	·9822	·9531	·9168	·8761	·8327	·7881	·7432	·6988	·6553
3·40	·9838	·9572	·9237	·8859	·8454	·8034	·7609	·7186	·6769
3·45	·9853	·9609	·9302	·8951	·8573	·8179	·7778	·7376	·6978
3·50	0·9867	0·9644	0·9361	0·9037	0·8685	0·8316	0·7939	0·7558	0·7180
3·55	·9879	·9677	·9417	·9117	·8790	·8446	·8091	·7732	·7373
3·60	·9891	·9706	·9468	·9192	·8889	·8568	·8236	·7898	·7558
3·65	·9901	·9734	·9516	·9261	·8981	·8683	·8372	·8055	·7735
3·70	·9911	·9759	·9559	·9326	·9067	·8790	·8501	·8204	·7902
3·75	0·9920	0·9782	0·9600	0·9386	0·9148	0·8891	0·8622	0·8345	0·8062
3·80	·9928	·9803	·9637	·9441	·9222	·8985	·8736	·8477	·8212
3·85	·9935	·9822	·9672	·9493	·9291	·9073	·8842	·8602	·8355
3·90	·9942	·9839	·9703	·9540	·9355	·9155	·8941	·8718	·8488
3·95	·9948	·9856	·9732	·9583	·9415	·9230	·9034	·8827	·8614
4·00	0·9953	0·9870	0·9758	0·9623	0·9469	0·9300	0·9120	0·8929	0·8731
4·05	·9958	·9883	·9782	·9660	·9519	·9365	·9199	·9024	·8841
4·10	·9963	·9895	·9804	·9693	·9566	·9425	·9273	·9112	·8943
4·15	·9967	·9906	·9824	·9724	·9608	·9480	·9341	·9193	·9038
4·20	·9970	·9916	·9842	·9752	·9647	·9530	·9404	·9269	·9126
4·25	0·9974	0·9925	0·9859	0·9777	0·9682	0·9576	0·9461	0·9338	0·9208
4·30	·9976	·9933	·9874	·9800	·9715	·9619	·9514	·9402	·9283
4·35	·9979	·9941	·9887	·9821	·9744	·9657	·9562	·9460	·9352
4·40	·9981	·9947	·9899	·9840	·9771	·9692	·9607	·9514	·9416
4·45	·9984	·9953	·9910	·9857	·9795	·9724	·9647	·9563	·9474
4·50	0·9985	0·9958	0·9920	0·9873	0·9817	0·9754	0·9684	0·9608	0·9527
4·55	·9987	·9963	·9929	·9887	·9837	·9780	·9717	·9649	·9575
4·60	·9989	·9967	·9937	·9899	·9855	·9804	·9747	·9686	·9620
4·65	·9990	·9971	·9944	·9911	·9871	·9825	·9775	·9719	·9660
4·70	·9991	·9974	·9951	·9921	·9885	·9845	·9799	·9750	·9696
4·75	0·9992	0·9977	0·9956	0·9930	0·9898	0·9862	0·9822	0·9777	0·9729
4·80	·9993	·9980	·9962	·9938	·9910	·9878	·9842	·9802	·9759
4·85	·9994	·9983	·9966	·9945	·9920	·9892	·9860	·9824	·9786
4·90	·9995	·9985	·9970	·9952	·9930	·9904	·9876	·9844	·9810
4·95	·9995	·9987	·9974	·9958	·9938	·9916	·9890	·9862	·9832
5·00	0·9996	0·9988	0·9977	0·9963	0·9946	0·9926	0·9903	0·9878	0·9851

W \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2·50	0·2007	0·1644	0·1342	0·1094	0·0890	0·0722	0·0586	0·0474	0·0383	0·0309
2·55	·2213	·1833	·1514	·1247	·1026	·0842	·0690	·0565	·0462	·0377
2·60	·2429	·2033	·1697	·1413	·1174	·0974	·0807	·0668	·0552	·0455
2·65	·2653	·2243	·1891	·1591	·1336	·1120	·0937	·0783	·0654	·0545
2·70	·2885	·2462	·2096	·1780	·1509	·1278	·1080	·0911	·0768	·0647
2·75	0·3124	0·2690	0·2311	0·1981	0·1696	0·1449	0·1236	0·1053	0·0896	0·0761
2·80	·3368	·2926	·2536	·2194	·1894	·1632	·1405	·1208	·1037	·0889
2·85	·3617	·3169	·2770	·2416	·2103	·1829	·1587	·1376	·1192	·1031
2·90	·3870	·3417	·3011	·2647	·2324	·2036	·1782	·1558	·1360	·1186
2·95	·4126	·3670	·3258	·2887	·2554	·2255	·1989	·1752	·1542	·1355
3·00	0·4382	0·3927	0·3512	0·3134	0·2792	0·2484	0·2207	0·1959	0·1737	0·1538
3·05	·4639	·4186	·3769	·3387	·3039	·2723	·2436	·2178	·1944	·1734
3·10	·4895	·4446	·4029	·3645	·3292	·2970	·2675	·2407	·2164	·1943
3·15	·5150	·4706	·4292	·3907	·3551	·3224	·2923	·2647	·2394	·2164
3·20	·5401	·4965	·4555	·4171	·3814	·3483	·3177	·2895	·2635	·2396
3·25	0·5649	0·5222	0·4817	0·4437	0·4081	0·3748	0·3438	0·3151	0·2885	0·2638
3·30	·5893	·5475	·5078	·4703	·4348	·4016	·3704	·3413	·3142	·2890
3·35	·6131	·5725	·5337	·4967	·4617	·4286	·3974	·3681	·3407	·3150
3·40	·6363	·5970	·5592	·5230	·4885	·4557	·4246	·3953	·3677	·3417
3·45	·6589	·6209	·5842	·5489	·5151	·4827	·4519	·4227	·3950	·3689
3·50	0·6807	0·6442	0·6087	0·5744	0·5413	0·5096	0·4792	0·4502	0·4226	0·3964
3·55	·7017	·6668	·6326	·5994	·5672	·5362	·5063	·4777	·4504	·4242
3·60	·7220	·6886	·6558	·6237	·5926	·5624	·5332	·5051	·4781	·4522
3·65	·7414	·7096	·6782	·6474	·6173	·5881	·5596	·5321	·5056	·4801
3·70	·7600	·7298	·6998	·6704	·6414	·6132	·5856	·5588	·5329	·5078
3·75	0·7776	0·7491	0·7206	0·6925	0·6648	0·6376	0·6110	0·5850	0·5598	0·5352
3·80	·7944	·7675	·7406	·7138	·6873	·6613	·6357	·6106	·5861	·5622
3·85	·8103	·7850	·7596	·7342	·7090	·6841	·6596	·6355	·6118	·5887
3·90	·8254	·8016	·7777	·7537	·7298	·7061	·6827	·6596	·6369	·6145
3·95	·8395	·8173	·7948	·7723	·7497	·7273	·7050	·6829	·6611	·6397
4·00	0·8528	0·8321	0·8111	0·7899	0·7686	0·7474	0·7263	0·7053	0·6845	0·6640
4·05	·8653	·8460	·8264	·8065	·7866	·7666	·7466	·7268	·7070	·6874
4·10	·8769	·8590	·8408	·8223	·8036	·7848	·7660	·7472	·7285	·7099
4·15	·8878	·8712	·8543	·8371	·8196	·8021	·7844	·7667	·7491	·7315
4·20	·8978	·8826	·8669	·8509	·8347	·8183	·8018	·7852	·7686	·7520
4·25	0·9072	0·8931	0·8787	0·8639	0·8488	0·8336	0·8182	0·8027	0·7871	0·7715
4·30	·9159	·9029	·8896	·8760	·8620	·8479	·8336	·8191	·8046	·7899
4·35	·9238	·9120	·8998	·8872	·8744	·8613	·8480	·8345	·8210	·8073
4·40	·9312	·9204	·9092	·8976	·8858	·8737	·8614	·8490	·8364	·8237
4·45	·9379	·9281	·9178	·9073	·8964	·8853	·8740	·8625	·8508	·8391
4·50	0·9441	0·9352	0·9258	0·9162	0·9062	0·8960	0·8856	0·8750	0·8643	0·8534
4·55	·9498	·9417	·9332	·9244	·9153	·9060	·8964	·8867	·8768	·8667
4·60	·9550	·9476	·9399	·9319	·9236	·9151	·9064	·8975	·8884	·8791
4·65	·9597	·9530	·9460	·9388	·9313	·9235	·9155	·9074	·8991	·8906
4·70	·9640	·9579	·9516	·9451	·9383	·9312	·9240	·9165	·9090	·9012
4·75	0·9678	0·9624	0·9567	0·9508	0·9446	0·9383	0·9317	0·9249	0·9180	0·9110
4·80	·9713	·9665	·9614	·9560	·9505	·9447	·9387	·9326	·9264	·9199
4·85	·9745	·9702	·9656	·9608	·9558	·9505	·9452	·9396	·9340	·9281
4·90	·9774	·9735	·9694	·9650	·9605	·9559	·9510	·9460	·9409	·9356
4·95	·9799	·9765	·9728	·9689	·9649	·9607	·9563	·9518	·9472	·9424
5·00	0·9822	0·9791	0·9759	0·9724	0·9688	0·9650	0·9611	0·9571	0·9529	0·9486

Table - Pearson & Hartley (1942) - part 3

W	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5·00	0·9996	0·9988	0·9977	0·9963	0·9946	0·9926	0·9903	0·9878	0·9851
5·05	·9996	·9990	·9980	·9967	·9952	·9935	·9915	·9893	·9869
5·10	·9997	·9991	·9982	·9971	·9958	·9942	·9925	·9906	·9884
5·15	·9997	·9992	·9985	·9975	·9963	·9950	·9934	·9917	·9898
5·20	·9998	·9993	·9986	·9978	·9968	·9956	·9942	·9927	·9911
5·25	0·9998	0·9994	0·9988	0·9981	0·9972	0·9961	0·9949	0·9936	0·9922
5·30	·9998	·9995	·9990	·9983	·9975	·9966	·9956	·9944	·9931
5·35	·9998	·9995	·9991	·9985	·9979	·9971	·9961	·9951	·9940
5·40	·9999	·9996	·9992	·9987	·9981	·9974	·9966	·9957	·9948
5·45	·9999	·9997	·9993	·9989	·9984	·9978	·9971	·9963	·9954
5·50	0·9999	0·9997	0·9994	0·9991	0·9986	0·9981	0·9975	0·9968	0·9960
5·55	·9999	·9997	·9995	·9992	·9988	·9983	·9978	·9972	·9965
5·60	·9999	·9998	·9996	·9993	·9989	·9985	·9981	·9976	·9970
5·65	·9999	·9998	·9996	·9994	·9991	·9987	·9983	·9979	·9974
5·70	0·9999	·9998	·9997	·9995	·9992	·9989	·9986	·9982	·9977
5·75	1·0000	0·9999	0·9997	0·9995	0·9993	0·9991	0·9988	0·9984	0·9981
5·80		·9999	·9998	·9996	·9994	·9992	·9989	·9986	·9983
5·85		·9999	·9998	·9997	·9995	·9993	·9991	·9988	·9986
5·90		·9999	·9998	·9997	·9996	·9994	·9992	·9990	·9988
5·95		·9999	·9998	·9998	·9996	·9995	·9993	·9991	·9989
6·00		0·9999	0·9999	0·9998	0·9997	0·9996	0·9994	0·9993	0·9991
6·05		·9999	·9999	·9998	·9997	·9996	·9995	·9994	·9992
6·10		0·9999	·9999	·9998	·9998	·9997	·9996	·9995	·9993
6·15		1·0000	·9999	·9999	·9998	·9997	·9996	·9995	·9994
6·20			·9999	·9999	·9998	·9998	·9997	·9996	·9995
6·25			0·9999	0·9999	0·9999	0·9998	0·9997	0·9997	0·9996
6·30			0·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9997	·9996
6·35			1·0000	·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9997
6·40				0·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9997
6·45				1·0000	·9999	·9999	·9999	·9998	·9998
6·50					0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9998
6·55					0·9999	·9999	·9999	·9999	·9998
6·60					1·0000	·9999	·9999	·9999	·9999
6·65						0·9999	·9999	·9999	·9999
6·70						1·0000	0·9999	·9999	·9999
6·75							1·0000	0·9999	0·9999
6·80								0·9999	·9999
6·85								1·0000	·9999
6·90									0·9999
6·95									1·0000
7·00									
7·05									
7·10									
7·15									
7·20									
7·25									

W	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5·00	0·9822	0·9791	0·9759	0·9724	0·9688	0·9650	0·9611	0·9571	0·9529	0·9486
5·05	·9843	·9815	·9786	·9756	·9723	·9690	·9655	·9618	·9581	·9543
5·10	·9861	·9837	·9811	·9784	·9755	·9725	·9694	·9661	·9628	·9593
5·15	·9878	·9856	·9833	·9809	·9783	·9757	·9729	·9700	·9670	·9639
5·20	·9893	·9874	·9853	·9832	·9809	·9785	·9760	·9735	·9708	·9681
5·25	0·9906	0·9889	0·9871	0·9852	0·9832	0·9811	0·9789	0·9766	0·9742	0·9718
5·30	·9917	·9903	·9887	·9870	·9852	·9833	·9814	·9794	·9773	·9751
5·35	·9928	·9915	·9901	·9886	·9870	·9854	·9836	·9819	·9800	·9781
5·40	·9937	·9925	·9913	·9900	·9886	·9872	·9856	·9841	·9824	·9807
5·45	·9945	·9935	·9924	·9912	·9900	·9888	·9874	·9860	·9846	·9831
5·50	0·9952	0·9943	0·9934	0·9924	0·9913	0·9902	0·9890	0·9878	0·9865	0·9852
5·55	·9958	·9951	·9942	·9933	·9924	·9914	·9904	·9893	·9882	·9870
5·60	·9964	·9957	·9950	·9942	·9934	·9925	·9916	·9907	·9897	·9887
5·65	·9969	·9963	·9956	·9950	·9943	·9935	·9927	·9919	·9910	·9901
5·70	·9973	·9968	·9962	·9956	·9950	·9944	·9937	·9929	·9922	·9914
5·75	0·9976	0·9972	0·9967	0·9962	0·9957	0·9951	0·9945	0·9939	0·9932	0·9925
5·80	·9980	·9976	·9972	·9967	·9963	·9958	·9952	·9947	·9941	·9935
5·85	·9982	·9979	·9976	·9972	·9968	·9963	·9959	·9954	·9949	·9944
5·90	·9985	·9982	·9979	·9976	·9972	·9968	·9964	·9960	·9956	·9952
5·95	·9987	·9985	·9982	·9979	·9976	·9973	·9969	·9966	·9962	·9958
6·00	0·9989	0·9987	0·9984	0·9982	0·9979	0·9977	0·9974	0·9971	0·9967	0·9964
6·05	·9990	·9989	·9987	·9984	·9982	·9980	·9977	·9975	·9972	·9969
6·10	·9992	·9990	·9989	·9987	·9985	·9983	·9981	·9978	·9976	·9973
6·15	·9993	·9992	·9990	·9989	·9987	·9985	·9983	·9981	·9979	·9977
6·20	·9994	·9993	·9992	·9990	·9989	·9987	·9986	·9984	·9982	·9980
6·25	0·9995	0·9994	0·9993	0·9992	0·9991	0·9989	0·9988	0·9986	0·9985	0·9983
6·30	·9996	·9995	·9994	·9993	·9992	·9991	·9990	·9988	·9987	·9986
6·35	·9996	·9996	·9995	·9994	·9993	·9992	·9991	·9990	·9989	·9988
6·40	·9997	·9996	·9996	·9995	·9994	·9993	·9992	·9992	·9991	·9990
6·45	·9997	·9997	·9996	·9996	·9995	·9994	·9994	·9993	·9992	·9991
6·50	0·9998	0·9997	0·9997	0·9996	0·9996	0·9995	0·9995	0·9994	0·9993	0·9993
6·55	·9998	·9998	·9997	·9997	·9996	·9996	·9995	·9995	·9994	·9994
6·60	·9998	·9998	·9998	·9997	·9997	·9997	·9996	·9996	·9995	·9995
6·65	·9999	·9998	·9998	·9998	·9997	·9997	·9997	·9996	·9996	·9995
6·70	·9999	·9999	·9998	·9998	·9998	·9998	·9997	·9997	·9997	·9996
6·75	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9998	0·9998	0·9998	0·9997	0·9997	0·9997
6·80	·9999	·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9997
6·85	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9998	·9998
6·90	0·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9998	·9998	·9998
6·95	1·0000	0·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9998
7·00		1·0000	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999	0·9999
7·05			0·9999	0·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999	·9999
7·10			1·0000	1·0000	0·9999	0·9999	·9999	·9999	·9999	·9999
7·15					1·0000	1·0000	0·9999	0·9999	·9999	·9999
7·20							1·0000	1·0000	0·9999	0·9999
7·25									1·0000	1·0000

The power of R chart

- σ_0 may shift to $\sigma 1 = \delta\sigma_0$
- The power $1 - \beta$

$$
\begin{aligned}
&= P(R > W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0 | \sigma_1 = \delta\sigma_0) + P(R < W_{\alpha/2} \times \sigma_0 | \sigma_1 = \delta\sigma_0) \\
&= P\left(\frac{R}{\sigma_1} > \frac{W_{1-\alpha/2} \times \sigma_0}{\sigma_1} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) + P\left(\frac{R}{\sigma_1} < \frac{W_{\alpha/2} \times \sigma_0}{\sigma_1} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) \\
&= P\left(W > \frac{W_{1-\alpha/2}}{\delta} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right) + P\left(W < \frac{W_{\alpha/2}(W)}{\delta} | \sigma_1 = \delta\sigma_0\right)
\end{aligned}
$$

Exercise

Use the Pearson & Hartley Table:

1. Find the control limits for R chart for sample sizes $n = 5, 10, 15$ when $\sigma_0 = 1, 10$ and $\alpha = 0.05, 0.01$.
2. Find the power of this chart when the standard deviation shifts for $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, $\delta = 1.25, 1.5, 2, 3$.
3. Discuss the results.

Write a program in R/Python to get CDF of W when X is normally distributed

More R chart

To get asymptotic control limits

- $E(W) = \frac{E(R)}{\sigma} \rightarrow \sigma E(W) = E(R) = \sigma d_2$.
- $Var(W) = \frac{Var(R)}{\sigma^2} \rightarrow \sigma_w = \frac{\sigma_R}{\sigma} = d_3 \rightarrow \sigma_R = d_3\sigma$.
- Tables of values of d_2 and d_3 in function of n are available in the SPC books.
- Control limits and center line of R chart:
  - center line: $d_2\sigma_0$
  - $UCL_R = d_2\sigma_0 + z_{1-\alpha/2}d_3\sigma_0$
  - $LCL_R = max(0, d_2\sigma_0 - z_{1-\alpha/2}d_3\sigma_0)$

Variable Control Chart: R chart - Performance

- Power I- Probability to detect a shift: 1-β

$$P\left(R > (d_2 + z_{1-\alpha/2}d_3)\sigma_0 | n, \sigma_1 = \delta\sigma_0\right)$$

$$P\left(\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + z_{1\alpha/2}d_3)\sigma_0}{\sigma_1} | n\right)$$

$$P\left(W > \frac{(d_2 + z_{1\alpha/2}d_3)}{\delta} | n\right)$$

R chart - If σ_0 is not available

- Replace $d_2\sigma_0$ by $\overline{R} = \dfrac{R_1 + \ldots + R_m}{m}$, an estimator of E(R) and σ_0 by $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$ and make
- center line: $\overline{R}$
- $UCL_R = \overline{R} + 3d_3\overline{R}/d_2$
- $LCL_R = max(0, \overline{R} - 3d_3\overline{R}/d_2)$

Exercise

Table 1: Volumes of soft drink in cm^3 taken at every 30 min in 15 hours of production

Sample	X1	X2	X3	Sample	X1	X2	X3
1	252.16	250.34	249.7	16	248.29	249.6	249.15
2	248.34	248.61	250.63	17	249.59	249.89	248.51
3	249.19	250.02	250.84	18	248.03	249.11	249.81
4	251.29	249.93	250.24	19	250.99	251.5	249.92
5	248.16	250.41	251.19	20	247.62	250.43	250.39
6	250.37	251.98	248.44	21	250.6	250.54	250.2
7	250.31	248.71	251.13	22	250.44	251.17	250.01
8	250.27	249.64	249.92	23	249.35	249.16	250.2
9	250.72	250.8	249.35	24	248.17	249.94	248.15
10	250.45	249.18	250.04	25	249.98	251.57	249.79
11	251.76	252.01	251.9	26	250.1	249.57	249.11
12	249.33	251.21	250.58	27	248.82	251.01	248.9
13	249.26	247.67	249.99	28	248.39	248.26	250.57
14	249.41	249.01	249.51	29	251.43	250.92	250.12
15	249.9	249.07	250.32	30	248.82	249.28	248.57

Use data of Table 1 determine the control limits for R chart considering $\alpha = 0.0027$

Is stable the variability of the volume of soft drink?

Building $\overline{X}$ chart with $\overline{\overline{X}}$ and $\overline{R}$

- Fixed α
- Central line: $\overline{\overline{X}}$
- Control limits: $\overline{\overline{X}} \pm z_{\alpha/2} \frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$
- If $z_{\alpha/2}$=3, $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$, the control limits are: $\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$
- See Tables for d_2, A_2

Exercise

- Using the data of Table 1 obtain the control limits to monitor the average volume using as estimator of unknown σ, the average ranges.
- Is the process mean stable?
- If the average volume shift to 250.8 what the probability of the control chart signals this shift?

Data

Table 2: Exercise

# of sample	AVG	Range	# of sample	AVG	Range
1	5.00	4.12	16	7.10	2.00
2	7.05	6.18	17	4.90	0.12
3	3.10	4.00	18	5.00	2.24
4	6.15	7.04	19	4.00	4.12
5	2.90	4.12	20	5.20	6.00
6	5.05	0.08	21	3.85	2.12
7	6.00	4.12	22	3.90	4.12
8	3.25	6.12	23	6.00	1.19
9	4.90	10.20	24	6.15	1.20
10	5.00	2.06	25	4.90	5.24
11	6.10	8.16	26	5.00	4.09
12	3.75	4.12	27	4.90	4.24
13	5.00	7.91	28	6.55	4.15
14	2.95	3.00	29	5.00	4.12
15	5.00	4.24	30	3.45	7.67

Exercise

Use data of Table 2 and $\alpha = 0.0027$ to solve the following items:

1- What the probability to detect a shift of 1.5 standard deviation using R control chart?

2- Determine the control limits for $\overline{X}$ and R charts considering unknown μ_0 cm and $\sigma = 5$ and known $\mu_0 = 5$ cm $\sigma = 5$

To answer the next items consider the control limits determined in item 2.

3 - If the process mean shifts to $\mu_1 = 7.50$ what is the probability to detect such change immediately at the first sample after the shift using the $\overline{X}$ chart? And to detect such shift before than the fourth sample after the change?

4- If the standard deviation shifts to $\sigma_1 = 3.6$, what is the probability to detect such event by R chart at the first sample after the change?

5- And what is the probability to detect the event describe in item 4 by $\overline{X}$ chart at the first sample after shift?

6 - Beyond the change in the variability of item 4, consider that the process mean also shifts to $\mu_1 = 6$. Recalculate the probability of the item 5.

References

Pearson, E. & Hartley, H. (1942), 'The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population', *Biometrika* **32**(3/4), 301–310.