

Aula 5: Axiomas de enumerabilidade

Funções contínuas

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Estes slides tem interseção com as notas de aulas dos professores

- ▶ Jorge Mujica (foi professor da IMECC-UNICAMP)
- ▶ Leandro Aurichi (professor do ICMC-USP)

Primeiro Axioma de Enumerabilidade

Como já vimos na Aula 3 ...

Definição 1

Seja X um espaço topológico. Diremos que X satisfaz o

primeiro axioma de enumerabilidade se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ que é enumerável.

Exemplo 2

Cada espaço métrico satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

$$\mathcal{B}_x = \{B(x; 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Definição 3

Sejam (X, τ) um espaço topológico e (x_n) uma sequência de pontos de X . Dizemos que (x_n) converge para $x \in X$ se, para toda vizinhança V de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V$. Notação: $x_n \rightarrow x$.

Note que esta definição permanece equivalente se trocarmos vizinhança do ponto por aberto contendo o ponto.

Proposição 4

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $x_n \rightarrow x$, então $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$

Demonstração. Seja V um aberto contendo x . Seja n_0 da definição de convergência. Note que $x_{n_0} \in V \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Corolário 5

Sejam (X, τ) espaço topológico, $Y \subset X$, $x \in X$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de Y . Se $y_n \rightarrow x$, então $x \in \bar{Y}$.

Para espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade, ser ponto aderente pode ser caracterizado por limite de sequências:

Proposição 6

Seja (X, τ) um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Então, $x \in \bar{Y}$ se, e somente se, existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de Y tal que $y_n \rightarrow x$.

Demonstração. $\Leftarrow$ Segue da Proposição 4 (não precisa usar a hipótese sobre as bases).

$\Rightarrow$ Reciprocamente, suponha que $x \in \bar{Y}$ e seja $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base de vizinhanças para x . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $y_n \in \left(\bigcap_{k \leq n} V_k\right) \cap Y$. Mostremos que $y_n \rightarrow x$. Seja V vizinhança de x . Como $\mathcal{V}$ é uma base de vizinhanças de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset V$. Seja $n \geq n_0$. Note que $y_n \in \bigcap_{k \leq n} V_k \subset V_{n_0} \subset V$.

Espaços onde ocorre o resultado anterior, isto é, onde as sequências convergentes caracterizam os pontos aderentes são conhecidos como Frechét-Urysohn.

Primeiro axioma de enumerabilidade

Exemplo 7

Na reta esburacada:

- (a) *Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_n \rightarrow x$ para algum x , então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$.*
- (b) $0 \in \overline{(0, 1)}$

Portanto, **a reta esburacada não cumpre o primeiro axioma de enumerabilidade.**

(a) De fato, temos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é fechado por ser enumerável (veja os Exercícios da Aula 4).

(b) $0 \in \overline{(0, 1)}$ pela densidade e não enumerabilidade dos irracionais.

Consequentemente, não existe sequência em $(0, 1)$ que converge para 0. Com isso, pela Proposição 6, temos que a reta esburacada não cumpre o primeiro axioma de enumerabilidade.

Sequência de Cauchy

Definition 1

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de X é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$,
 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 8

*Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X tal que $x_n \rightarrow x$.
Então, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Seja n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados $n, m \geq n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

Definição 9

*Seja (X, d) um espaço métrico. (X, d) é dito **espaço métrico completo** se toda sequência (x_n) de Cauchy é convergente.*

Segundo axioma de enumerabilidade

Já vimos na Aula 3 ...

Definição 10

Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que (X, τ) satisfaz o

segundo axioma de enumerabilidade se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável.

Exemplo 11

$\mathbb{R}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade pois os intervalos (a, b) , com $a < b$ racionais, formam uma base para os abertos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 12

A reta de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Proposição 13

Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ) . Então, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base de vizinhanças para x .

Terceiro Axioma de Enumerabilidade

Definition 2

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $D \subset X$ é denso em X se $\bar{D} = X$.

Definition 3

Dizemos que (X, τ) satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade se admite um subconjunto denso enumerável. Neste caso, dizemos também que (X, τ) é um espaço separável.

Exemplo 14

Temos que a reta real e a reta de Sorgenfrey são separáveis pois em ambos os casos $\mathbb{Q}$ é denso.

O segundo axioma de enumerabilidade implica no terceiro (e também o primeiro, como vimos):

Proposição 15

Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então ele é separável.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base para (X, τ) . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_n$ (podemos supor sem perda de generalidade que $B_n \neq \emptyset$). Vamos mostrar que $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso. Sejam $x \in X$ e V vizinhança de x . Como $\mathcal{B}$ é base, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Note que $x_n \in B_n$. Portanto, $x_n \in V \cap D$.

No caso de métricos, vale a volta:

Proposição 16

Se (X, d) é um espaço métrico e separável, então (X, d) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Note que a reta de Sorgenfrey nos dá que a hipótese de metrizabilidade é necessária.

Terceiro Axioma de Enumerabilidade

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X . Considere

$$\mathcal{B} = \{B(x_n; 1/m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é base. Sejam A aberto e $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset A$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X , existe $x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$. Vamos mostrar que $x \in B(x_n; 1/m) \subset B(x; \varepsilon)$. Primeiramente, note que $x \in B(x_n; 1/m)$, pois $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$. Temos também que $B(x_n; 1/m) \subset B(x; \varepsilon)$, pois, dado $a \in B(x_n; 1/m)$, temos

$$d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Definição 17

Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um espaço metrizável se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ .

Com o que temos até o momento, já conseguimos dizer em alguns casos quando um espaço não é metrizável:

Exemplo 18

A reta de Sorgenfrey não é um espaço metrizável.

De fato, temos que este é um espaço separável mas que não admite uma base enumerável. Assim, pela Proposição 16, ele não é metrizável.

Exercícios - Axiomas de enumerabilidade

1. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Mostre que são equivalentes:
 - (i) x admite uma base de vizinhanças enumerável;
 - (ii) x admite uma base de vizinhanças enumerável, formada por conjuntos abertos.
2. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X . Mostre que são equivalentes:
 - (i) $x_n \rightarrow x$.
 - (ii) Para todo V aberto tal que $x \in V$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.
 - (iii) Seja $\mathcal{V}_x$ base de vizinhanças para x . Dado $V \in \mathcal{V}_x$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.
3. Sejam (X, τ) espaço topológico e $D \subset X$. Mostre que D é denso em X se, e somente se, para todo aberto não vazio A , $A \cap D \neq \emptyset$.
4. Mostre que todo subespaço de um espaço que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.
5. Mostre que todo subespaço de um espaço com base enumerável tem base enumerável.
6. Mostre que se (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então todo $x \in X$ admite uma base de vizinhanças enumerável (V_n) , formado por conjuntos abertos e decrescente ($V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).
7. Mostre que a reta esburaca não é metrizável.

Exercícios - Axiomas de enumerabilidade

8. Mostre que na reta esburacada as únicas sequências convergentes são as quase constantes. Uma sequência (x_n) é quase constante se existem x e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$.

9. Considere X o espaço $\mathbb{N} \cup \{a\}$, onde $a \notin \mathbb{N}$. Considere

$$\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{N} \cup \{a\}\}$$

- (a) Mostre que τ é uma topologia sobre X .
- (b) Mostre que qualquer sequência em X é convergente.

10. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $D \subset X$ denso. Considerando D como subespaço, mostre que se $E \subset D$ é denso em D , então E é denso em X .
11. Mostre que todo subespaço de um espaço que tenha base enumerável é separável.
12. Dizemos que um espaço é hereditariamente separável se todo subespaço seu é separável. Mostre que todo espaço métrico separável é hereditariamente separável.

Exercícios - Axiomas de enumerabilidade

13. O exemplo deste exercício é chamado de plano de Niemytski.

Considere $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ com a topologia de forma que:

- (i) Se (x, y) é tal que $y > 0$, então uma vizinhança básica de (x, y) é da forma de uma bola aberta centrada em (x, y) que não intercepta o eixo x , isto é $B_\varepsilon((x, y))$ com $0 < \varepsilon < y$;
 - (ii) Para os pontos da forma $(x, 0)$, uma vizinhança de tal ponto é da forma de uma bola aberta contida em $\{(a, b) : b > 0\}$ e que tangencie o eixo x no ponto $(x, 0)$ (inclua o ponto em tal vizinhança). Ou seja, $B_y((x, y)) \cup \{(x, 0)\}$ onde $B_r((x, y))$ é a bola com a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.
- (a) Mostre que isso define uma topologia.
 - (b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.
 - (c) Mostre que tal espaço é regular.
 - (d) Mostre que tal espaço é separável.
 - (e) Mostre que o eixo x (i.e. $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$) com a topologia de subespaço tem a topologia discreta.
 - (f) Mostre que tal espaço não tem base enumerável.
 - (g) Mostre que tal espaço não é metrizável.
 - (h) Mostre que não é verdade que todo subespaço de um espaço separável é separável (compare com o exercício anterior).

Exercícios - Axiomas de enumerabilidade

14. Mostre que a reta esburacada não é separável.
15. Mostre que, se (X, τ) é um espaço regular que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então (X, τ) é um espaço normal.
16. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base enumerável para (X, τ) e seja $\mathcal{C}$ uma base qualquer para (X, τ) . Então, existe uma família enumerável $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ que é base para (X, τ) .

Definição 19 (Continuidade pontual e global)

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $x \in X$. Dizemos que f é contínua no ponto x se, para toda vizinhança A de $f(x)$ existe uma vizinhança B de x tal que $f(B) \subset A$.

Dizemos que f é contínua em X , ou simplesmente contínua, se f é contínua em todos os pontos $x \in X$.

Proposição 20

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo aberto A de Y , $f^{-1}(A)$ é aberto em X (i.e., $\forall A \in \rho, f^{-1}(A) \in \tau$).

Demonstração. $\implies$ Suponha que para todo $x \in X$, f é contínua em x . Seja A aberto em Y . Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in A$, seja B_x vizinhança de x tal que $f(B_x) \subset A$. Como B_x é vizinhança de x , existe B'_x aberto tal que $x \in B'_x \subset B_x$. Assim, $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B'_x$ é aberto.

⇐ Agora, suponha que $\forall A \in \rho, f^{-1}(A) \in \tau$ e seja $x \in X$. Seja A vizinhança de $f(x)$ e A' aberto tal que $f(x) \in A' \subset A$. Assim, $f^{-1}(A')$ é aberto, com $x \in f^{-1}(A')$ (portanto, vizinhança de x) e $f(f^{-1}(A')) \subset A' \subset A$.

Exemplo 21

Considere (X, τ) um espaço topológico. Então a função $I : X \rightarrow X$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in X$ (função identidade) é contínua (a verificação é imediata).

Exemplo 22

Qualquer função constante é contínua.

De fato, sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e considere uma função constante $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = k$. Seja A um aberto de (Y, σ) . Então,

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & k \notin A \\ X, & k \in A \end{cases}$$

Ou seja, em ambos os casos $f^{-1}(A)$ é um aberto de (X, τ) .

Proposição 23

Sejam (X_1, τ_1) , (X_2, τ_2) e (X_3, τ_3) espaços topológicos e sejam $g : X_1 \rightarrow X_2$ e $f : X_2 \rightarrow X_3$ funções contínuas. Então, $f \circ g : X_1 \rightarrow X_3$ é contínua.

Demonstração. Seja A um aberto em X_3 . Como f é contínua, temos que $f^{-1}(A)$ é aberto em X_2 . Agora, como g é contínua, $g^{-1}(f^{-1}(A))$ é aberto em X_1 . Mas, como $g^{-1}(f^{-1}(A)) = (f \circ g)^{-1}[A]$, a proposição está provada.

Observação 24

Argumento semelhante pode ser usado para continuidade pontual da composta.

Densos são “empurrados” por funções contínuas.

Proposição 25

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua sobrejetora. Se $D \subset X$ é denso em X , então $f(D)$ é denso em Y .

Demonstração. Seja $A \subset Y$ aberto não vazio. Note que $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Como f é sobrejetora, $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Logo, existe $d \in D$ tal que $d \in f^{-1}(A)$, ou seja, $f(d) \in A$.

Portanto, $f(D) \cap A \neq \emptyset$.

Corolário 26

Imagem contínua de um espaço separável é separável.

O seguinte exemplo será útil no estudo de sequências convergentes.

Exemplo 27

Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos

- (a) $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$
- (b) $\{\infty\} \cup A$, em que $A \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

Note que, desta forma, um conjunto contendo ∞ é aberto se, e somente se, apenas uma quantidade finita de elementos de $\mathbb{N}$ não pertence a ele. Chamamos este espaço de **espaço da sequência convergente**.

Proposição 28

Seja (X, τ) espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$ uma função, $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia do exemplo anterior. Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \rightarrow f(\infty)$ (i.e., a sequência (x_n) , em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$).

Demonstração. Suponha f contínua. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como f é contínua, $f^{-1}(A)$ é aberto. Logo, $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)$ é finito, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $n \in f^{-1}(A)$. Logo, para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$

Agora, suponha que $f(n) \rightarrow f(\infty)$. É imediato que f é contínua em todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que f é contínua em ∞ . Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como $f(n) \rightarrow f(\infty)$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$. Logo, $\{n : n \geq n_0\} \subset f^{-1}(A)$ e $\infty \in \{n : n \geq n_0\} \cup \{\infty\} \subset f^{-1}(A)$.

Funções contínuas também “empurram” sequências convergentes.

Proposição 29

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ função contínua e (x_n) uma sequência convergente para $x \in X$. Então, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Considere a função $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$, com $h(n) = x_n$ e $h(\infty) = x$. Note que h é contínua pela proposição anterior. Note também que $f \circ h$ é contínua, pois é composta de contínuas. Note que $(f \circ h)(n) = f(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e que $(f \circ h)(\infty) = f(x)$. Logo, pela proposição anterior, aplicada a $f \circ h$, temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Observação 30

O resultado anterior é ainda válido assumindo apenas a continuidade de f no ponto x .

No caso de espaços “ricos” em sequências convergentes, também temos a volta da proposição anterior.

Proposição 31

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (X, τ) possui bases locais enumeráveis. Dada $f : X \rightarrow Y$ uma função, temos que f é contínua se, e somente se, para toda sequência (x_n) em X tal que $x_n \rightarrow x$, temos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Já está feito supondo f contínua.

Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x . Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}[A]$. Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subset f^{-1}[A]$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \rightarrow x$. De fato, seja $V \ni x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$. Note, também, que $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, que é contradição.

Corolário 32

Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \rightarrow x$, temos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

1. Mostre que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é fechado (em X) para todo $F \subset Y$ fechado.
2. Mostre que na definição de função contínua poderíamos supor os abertos da imagem como sendo básicos (isto é, os abertos em Y serem elementos de uma base $\mathcal{B}$ fixada previamente).
3. Mostre o análogo do alongamento anterior para a definição de continuidade num ponto x , trocando vizinhanças por “elementos de uma base de vizinhanças de x ” fixada.

Exercícios - Funções contínuas

4. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \rightarrow X_2$ uma função. Mostre que, para cada $x \in X_1$, são equivalentes:
- (a) f contínua em x (com as topologia induzidas pelas métricas);
 - (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
5. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $Z \subset X$ subespaço de X . Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Mostre que $(f|_Z) : Z \rightarrow Y$ é contínua
6. Seja (X, τ) espaço topológico. Seja A um aberto fechado em X . Mostre que a função característica de A é contínua. Isto é, que a função $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua (considere em $\{0, 1\}$ a topologia discreta (ou a induzida por $\mathbb{R}$, que dá na mesma)).

7. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Sejam $F_1, \dots, F_n \subset X$ fechados tais que $\bigcup_{i=1}^n F_i = X$. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função.
- (a) Mostre que se $f|_{F_i}$ é contínua para todo $i = 1, \dots, n$, então f é contínua;
 - (b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada F_i não seja fechado).
 - (c) Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de que cada F_i ser fechado é necessária no item (a).
8. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Seja $(A_i)_{i \in I}$ família de abertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Seja $f : X \rightarrow Y$.
- (a) Mostre que se $f|_{A_i}$ é contínua para todo $i \in I$, então f é contínua.
 - (b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada A_i não seja aberto).
9. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, sendo que (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e Y é de Hausdorff.
- (a) Mostre que neste caso podemos melhorar a Proposição 31 para $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em X , temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente (prove que o limite de $(f(x_n))$ não depende da sequência).
 - (b) Mostre que se não tivermos axiomas de separação sobre os espaços, o resultado anterior não vale.

10. Considere (X, τ) como sendo a reta esburacada e seja (Y, ρ) um espaço qualquer. Seja $f : X \rightarrow Y$. Mostre que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X , então $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y . Conclua que a hipótese sobre o primeiro axioma de enumerabilidade é essencial no exercício anterior (e na Proposição 31).