# Funções

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1$^o$ **Semestre de 2023**

# Funções Inversas

### Definição

*Uma função* $f : A \to B$ *será dita* **invertível**, *se existir* $g : B \to A$ *(denotada por* $f^{-1}$*) tal que* $g \circ f = I_A$ *e* $f \circ g = I_B$.

## Proposição

*Uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, é bijetora.*

**De fato:** Mostremos que se $f$ é invertível então $f$ é bijetora.

(1) $f(x)=f(y) \Rightarrow x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$ ($f$ é injetora)

(2) Se $b \in B$ então $b = f \circ f^{-1}(b) \Rightarrow$ ($f$ é sobre).

Agora mostremos que se $f : A \to B$ é bijetora então $f$ é invertível.

Dado $b \in B$, como $f$ é bijetora, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Defina $f^{-1}(b) := a$. Assim, $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$, para todo $b \in B$, e $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$, para todo $a \in A$. $\square$

Neste caso, a **função inversa** está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.}$$

$$D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$$

## Exemplo

*A função $f(x) = x^3$ é injetora e a inversa de $f$ sobre sua imagem é a função que denotamos por $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.*

**De fato:** Mostremos a injetividade de $f(x) = x^3$. Note que:

$$0 \leq (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \text{ implica que } |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Logo

- $x^2 + xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq \dfrac{x^2+y^2}{2}$ e
- $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Logo $f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$ implica que $x = y$ e $f$ é injetora. Segue que $f$ é bijetora sobre sua imagem.

Mostre que, se $f(x) = x^3$, $\mathrm{Im}(f)$ não é limitada superiormente nem inferiormente. Mostraremos mais tarde que isto implica que $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

**Alerta:** Não confunda $f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$.

**Para achar a função inversa:**

(1) Escreva $y = f(x)$.

(2) Resolva essa equação para $x$ em termos de $y$.

(3) Troque $x$ por $y$ para expressar $f^{-1}$ como função de $x$.

## Exemplo

*Calcule $f^{-1}$ para a função $f(x) = 1 + 3x$ $(A = B = \mathbb{R})$.*

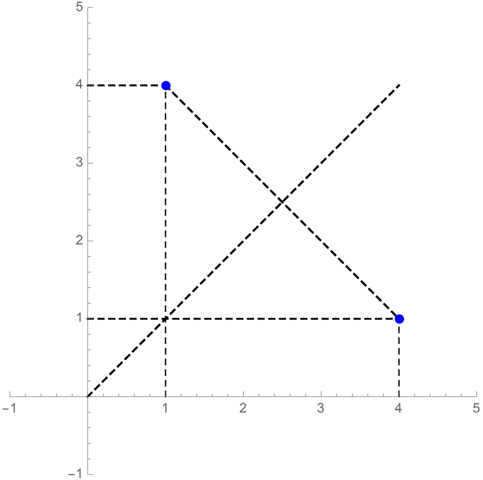
**Solução:** Escrevemos $y = 1 + 3x$. Resolvemos para encontrar $x$ como função de $y$, ou seja, $x = \dfrac{y-1}{3}$. E substituindo $y$ por $x$, obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

**Exercício:** Determine, quando possível, a função inversa de:

$$(a)\ f(x) = x^2; \qquad (b)\ f(x) = x^3 + 2.$$

**Observação:** Note que o ponto $(b, a)$ é a reflexão do ponto $(a, b)$ em torno da reta $y = x$.



**Observação:** Note que

$$G(f^{-1}) = \left\{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\right\} = \{(f(x), x) : x \in A\} \ .$$

Segue da observação anterior que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

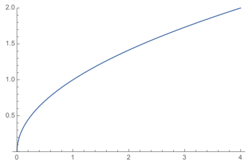
**Exemplo:** Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

**Solução 1:** Se $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \sqrt{-x}$, então $f(x) = h(x+1)$.

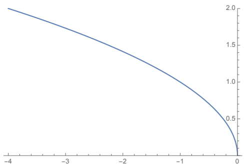
Logo, $G_h$ é a reflexão de $G_g$ em torno do eixo $y$.

Por sua vez, $G_f$ é $G_h$ transladado de uma unidade para a esquerda.

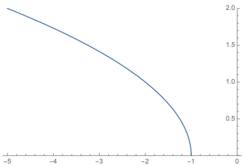
$g(x) = \sqrt{x}$



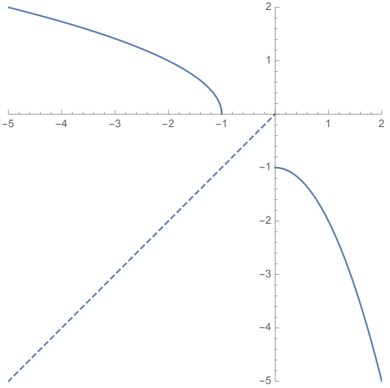

$h(x) = \sqrt{-x}$




$f(x) = \sqrt{-x-1}$



A ilustração a seguir mostra o gráfico de $f$ e de sua inversa $f^{-1}$. Note que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.




**Critério de Invertibilidade:** A reflexão do gráfico em torno da diagonal é um gráfico.

**Exemplo:** Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

**Solução 2:** Vamos primeiro encontrar a fórmula explícita para $f^{-1}$. Veremos que esta é uma função que conhecemos muito bem o seu gráfico e, portanto, poderemos construir também o gráfico de $f$.

Primeiramente, observe que

$$D(f) = \mathrm{Im}(f^{-1}) = (-\infty, -1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) = [0, \infty).$$

Para calcular $f^{-1}$: Escrevemos $y = \sqrt{-x-1}$. Resolvemos para encontrar $x$ como função de $y$: elevando ao quadrado $x = -y^2 - 1$. Substituindo $y$ por $x$, obtemos

$$f^{-1}(x) = -x^2 - 1, \quad x \in [0, \infty).$$

Desta forma, fica fácil obter os gráficos da página anterior.

### Definição

*Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$, *então* $f$ *será* **crescente**.

*Se valer a implicação* $x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$, *então* $f$ *será* **não-decrescente**.

*Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, *então* $f$ *será* **decrescente**.

*Se valer a implicação* $x \geq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$, *então* $f$ *será* **não-crescente**.

## Definição

*Se $f : A \to B$ satisfizer uma das condições da Definição anterior, diremos que $f$ é uma função* **monótona** *ou* **monotônica**.

## Exemplo

$f(x) = x^2$ *é crescente para* $x > 0$ *e decrescente para* $x < 0$.

**De fato:** *Note que* $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. *Assim,*

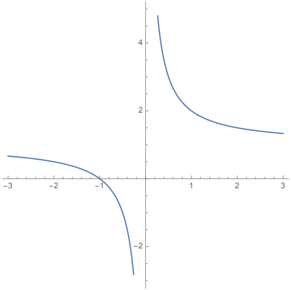
- *Se* $x, y$ *são ambos positivos temos que* $x > y$ *implica* $x^2 > y^2$ *(crescente) e*
- *Se* $x, y$ *são ambos negativos* $x > y$ *implica* $x^2 < y^2$ *(decrescente).*

## Exemplo

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *é decrescente em* $(-\infty, 0)$ *ou em* $(0, \infty)$ *mas não é monótona em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Observe que se $x$ e $y$ tiverem o mesmo sinal e $x > y$, então

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} = f(y).$$



# Funções Limitadas

## Definição

*Diremos que $f$ é* **limitada** *se, e somente se,* $\mathrm{Im}(f) = f(D_f) \subset \mathbb{R}$ *for limitado. Caso contrário, a função $f$ será dita* **ilimitada**. *Se $A_1 \subset D_f$, então $f$ será* **limitada em $A_1$** *se, e somente se, a restrição $f|_{A_1}$ for limitada, isto é, $f(A_1) \subset \mathbb{R}$ for limitada.*

**Observação:** Da definição acima, $f$ será limitada, se e somente se, existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L, \quad \forall\, x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tal que

$$-L \leq f(x) \leq L, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Exemplo

(a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é limitada; (só assume os valores $1$ e $-1$)

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ é limitada; $(0 \leq f(x) \leq 1)$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é ilimitada; (Dado $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

(d) $f(x) = x^3$ é ilimitada (Dado $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).

## Definição

*Diremos que:*

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\} = \sup(\mathrm{Im}(f))$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\} = \inf(\mathrm{Im}(f))$.
- *Se* $\sup(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **máximo** *de* $f$ *ou o* **valor máximo** *de* $f$. *O ponto* $x_0$ *será chamado* **ponto de máximo** *de* $f$.
- *Se* $\inf(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **mínimo** *de* $f$ *ou o* **valor mínimo** *de* $f$. *O ponto* $x_0$ *será chamado* **ponto de mínimo** *de* $f$.

### Definição

*Seja* $\omega \neq 0$. *Então* $f$ *será dita* **periódica** *com* **período** $\omega$ *ou* $\omega$-**periódica** *se, e somente se, tivermos*

$$f(x) = f(x + \omega), \ \forall\, x \in D_f.$$

*Em particular, se existir um menor* $\omega_0$ *número positivo tal que* $f$ *seja* $\omega_0$*-periódica, diremos que* $\omega_0$ *será o* **período mínimo** *de* $f$.

## Proposição

*Sejam* $c \neq 0 \neq \omega$*. Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *for* $\omega$*-periódica, então serão válidas as afirmações:*

$(a)$ $f$ *é* $n\omega$*-periódica,* $\forall n \in \mathbb{Z}$*, com* $n \neq 0$*.*

$(b)$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = f(cx)$ *é* $\omega/c$*-periódica.*

**Prova:** a) Observe que, se $f$ é $\bar{\omega}$ periódica,

$$f(x-\bar{\omega}) = f(x) = f(x+\bar{\omega}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, basta provar o caso $n \in \mathbb{N}$. Faremos a prova por indução.

Sabemos que $f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+n\omega) = f(x+\omega+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x).$$

b) Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g\left(x+\frac{\omega}{c}\right) = f\left(c\left(x+\frac{\omega}{c}\right)\right) = f(cx+\omega) \underbrace{=}_{f \text{ é } \omega-\text{periódica}} f(cx) = g(x).$$

## Exemplo

*Considere $f(x) = x - [x]$, em que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \; n \leq x\}$ é a função maior inteiro menor ou igual a $x$. Então $f$ é 1-periódica e o período mínimo de $f$ é 1. Faça o gráfico de $f$*

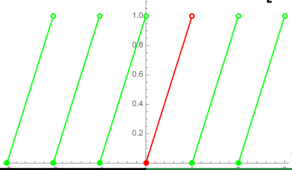
**Solução:** Primeiramente provemos que $[x+1]=[x]+1$. De fato,

$$[x]\leq x \;\text{ e }\; [x]+1>x \Longrightarrow [x]+1\leq x+1 \;\text{ e }\; ([x]+1)+1>x+1.$$

Agora observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x]+1) = x - [x] = f(x).$$

É fácil ver que 1 é o menor período. Basta fazer o gráfico de $f$ em $[0,1)$ e repetir em cada intervalo da forma $[n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$.



## Exemplo

$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *é r-periódica* $\forall\ r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

**Solução:** *Seja* $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. *Uma vez que*

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + r \in \mathbb{Q},$$

*inferimos que* $f(x+r) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Como, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathbb{Q} \ni r_n = \frac{1}{n} < \epsilon$, *f não tem período mínimo.*

O gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$ é o seguinte:

- a linha azul superior representa a imagem dos racionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números irracionais);
- a linha azul inferior representa a imagem dos irracionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números racionais).