Lista 4 - MAT-330 - 2023

(I) Considere $A = \{a, b, c\}$, sendo a, b, c elementos distintos dois a dois, e as relações R e S dadas respectivamente por

$$\begin{cases} R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(a,c),(b,b),(c,c)\} \\ \\ S = \{(c,a),(c,b)\} \end{cases}$$

(1) Verifique se R é reflexiva, transitiva, simétrica ou anti-simétrica.

(2) Determine $S \circ R$ e $R \circ S$.

(II) Verifique se as seguintes relações são (ou não) reflexivas, transitivas, simétricas ou anti-simétricas.

(1) Em $\mathbb{Z}$, xRy se $x > y$.

(2) Em $\mathbb{N}$, xRy se $x = y$.

(3) Em $\mathcal{P}(A)$, xRy se $x \subseteq y$.

(4) Em $\mathbb{N}$, xRy se x/y.

(III) Seja R uma relação de equivalência num conjunto A, isto é, R é reflexiva, simétrica e transitiva.
Para todo $a \in A$, considere $a/_R = \{x \in A : xRa\}$.

(i) Prove que existe o conjunto $A/_R = \{a/_R : a \in A\}$ chamado conjunto quociente de A pela relação de equivalência R.

(ii) Prove que $A/_R$ é uma partição de A (Uma coleção S de conjuntos não vazios chama-se uma partição do conjunto A se $\bigcup S = A$ e se os elementos de S são dois a dois disjuntos.).

(IV) Seja A um conjunto e S uma partição de A. Considere a seguinte relação R_S entre os elementos de A:

$aR_Sb \longrightarrow \ \exists\ C \in S : a, b \in C$

Prove que R_S é uma relação de equivalência e que $A/_{R_S} = S$.