Física III 2023 – Aula 8

Objetivos de aprendizagem

- Utilizar o princípio de superposição para determinar o campo elétrico resultante de uma distribuição de cargas.
- Determinar o campo elétrico produzido por uma distribuição discreta de cargas
- Determinar o campo elétrico produzido por uma distribuição contínua linear de cargas

Superposição

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

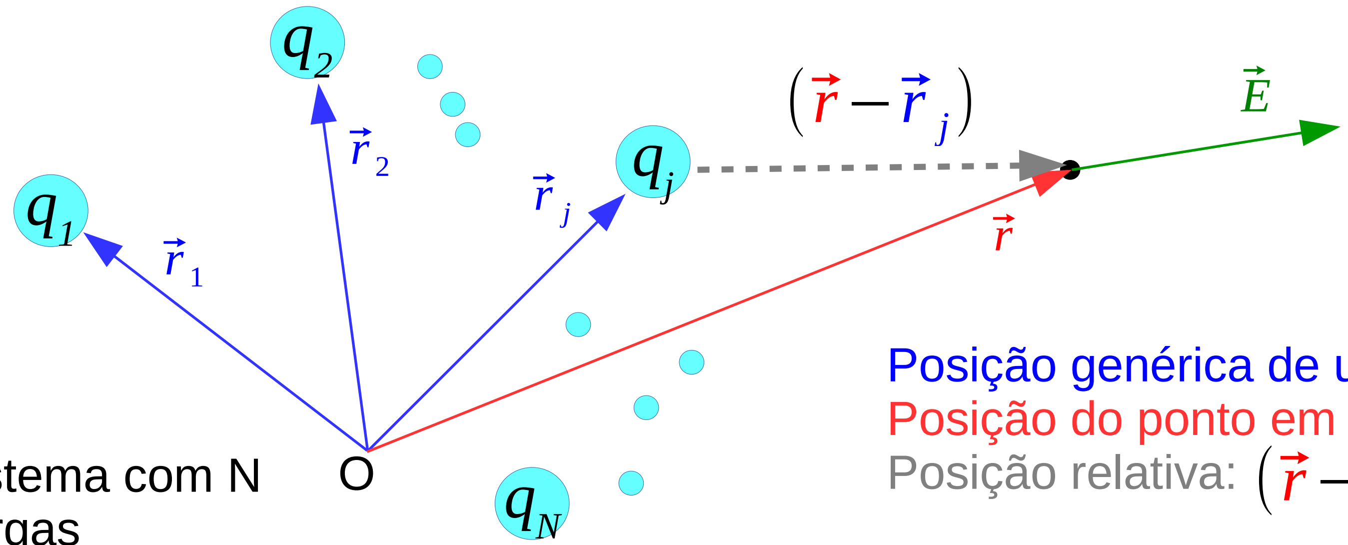
Somatória sobre o campo elétrico produzido por cada uma das N cargas do sistema

Qual é:

- A posição genérica de uma carga?
- A posição do ponto em que se calcula o campo?
- A posição relativa (do ponto com relação à carga)?
- Por quê o módulo está elevado ao cubo no denominador?

Identificação das variáveis

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} + \ldots = \sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$$



Sistema com N cargas

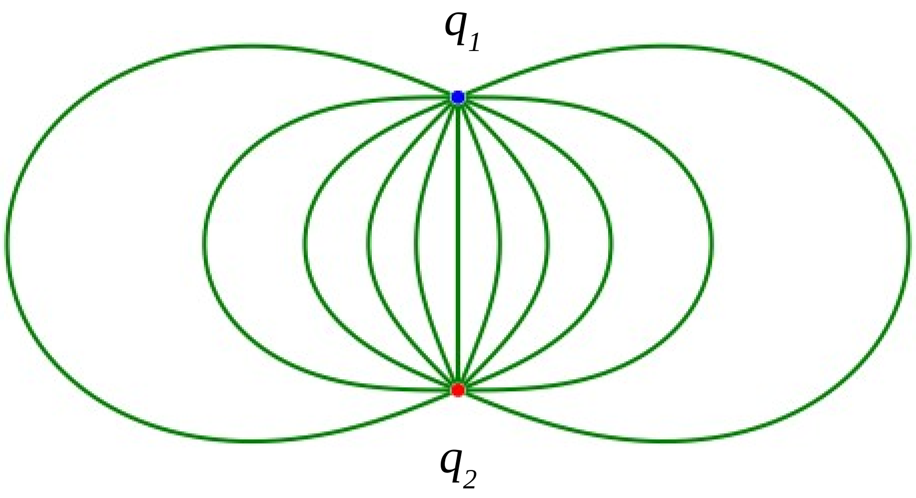
Posição genérica de uma carga: $\vec{r}_j$

Posição do ponto em que se calcula o campo: $\vec{r}$

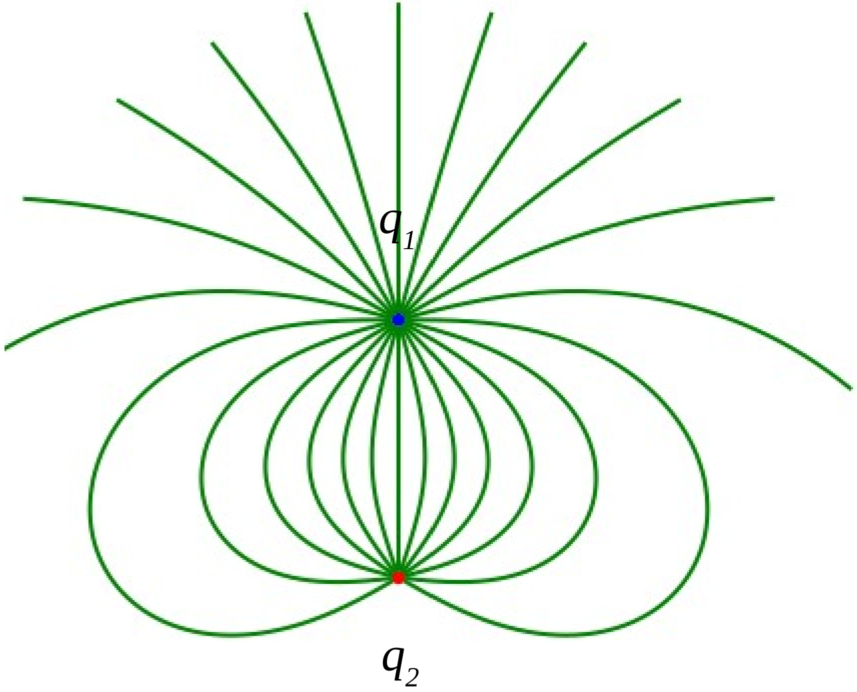
Posição relativa: $(\vec{r}-\vec{r}_j)$

Linhas de campo – 2 cargas

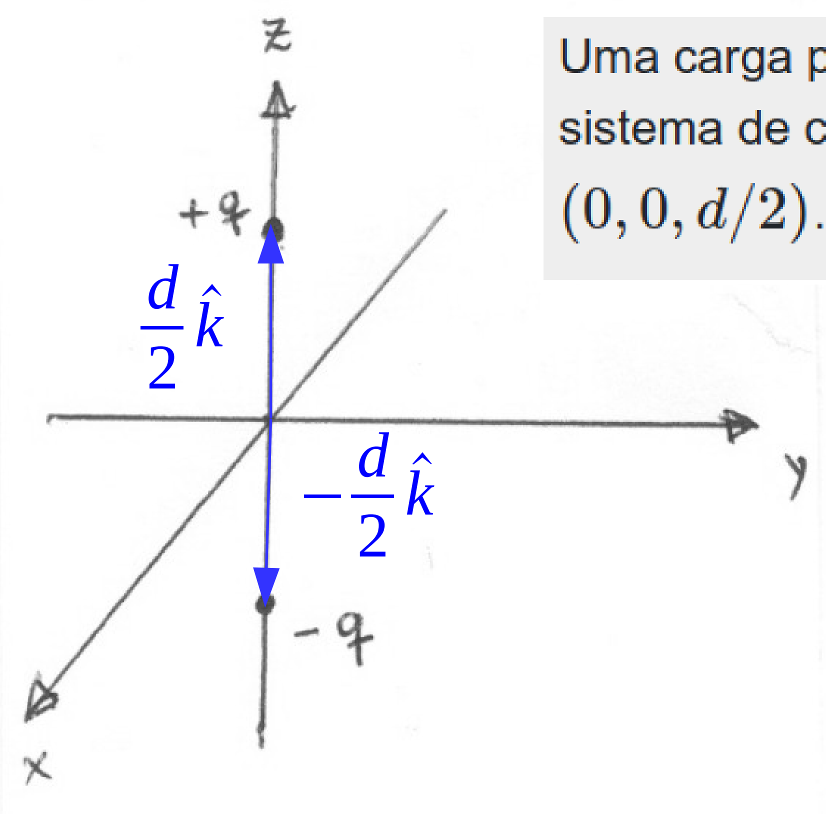
- $q_1 = -q_2$



- $q_1 = -1.5 q_2$



Exemplo 1 – campo *E* de 1 dipolo

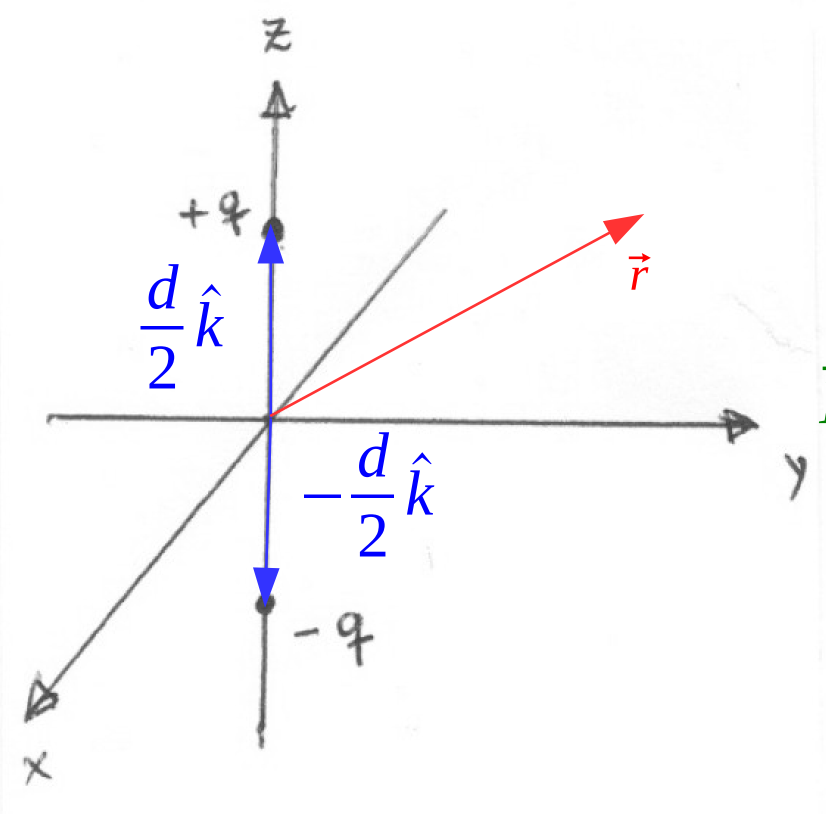


Uma carga puntiforme $-q$ está no ponto $(0, 0, -d/2)$ de um sistema de coordenadas cartesianas, e outra $+q$ está no ponto $(0, 0, d/2)$. Qual é o campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto (x, y, z)?

2 cargas puntiformes (*N*=2)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$$

Exemplo 1 – campo *E* de 1 dipolo



$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{k}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{k}\right|^3}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\frac{-d}{2}\hat{k}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{k}\right|^3}$$

Formalmente resolvido... mas enunciado pediu em termos de x,y,z

Posições relativas

- Carga "de cima": $$\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{k}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+\left(z-\frac{d}{2}\right)\hat{k}=\left(x\,,y\,,z-\frac{d}{2}\right)$$

- Carga "de baixo": $$\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{k}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+\left(z+\frac{d}{2}\right)\hat{k}=\left(x\,,y\,,z+\frac{d}{2}\right)$$

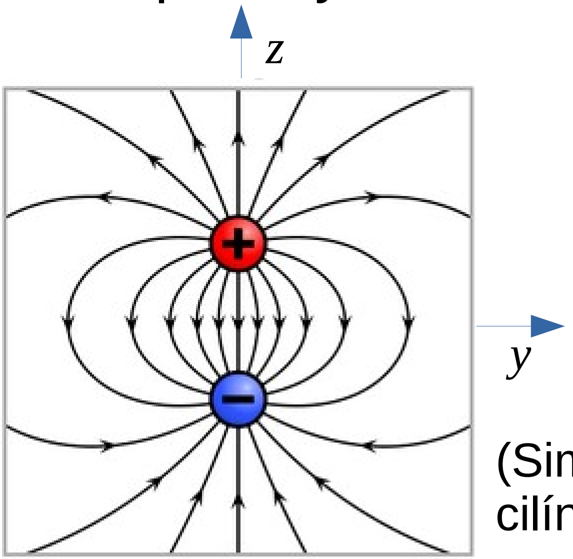
- → explicitar também os módulos dos vetores:

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z-\frac{d}{2}\right)\vec{k}}{\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}-\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z+\frac{d}{2}\right)\vec{k}}{\left[x^2+y^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right]$$

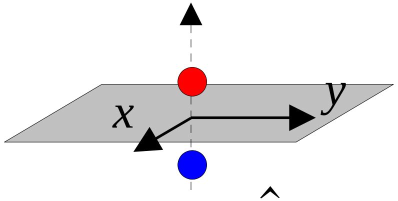
Aspecto do campo

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z-\frac{d}{2}\right)\vec{k}}{\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z+\frac{d}{2}\right)\vec{k}}{\left[x^2+y^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right]$$

- No plano yz



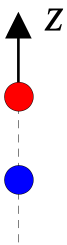
(Simetria cilíndrica)



No plano xy (z=0):

$$\vec{E}(x,y,0) = \frac{-qd}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+(d/2)^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

No eixo z, z>d/2 (x=y=0):



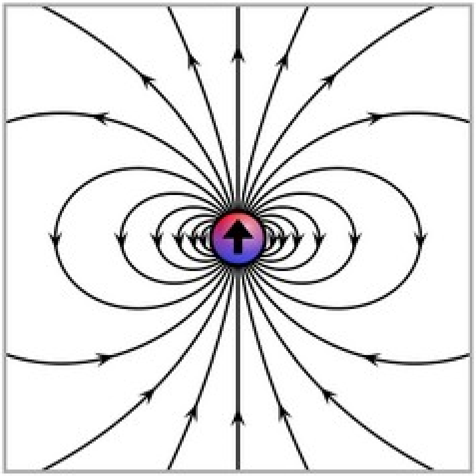
$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{z\,qd}{2\pi\varepsilon_0\left(z^2-(d/2)^2\right)^2}\hat{k}$$

Aspecto do campo

$$\vec{E}(x,y,0)=\frac{-qd}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+(d/2)^2\right)^{3/2}}\hat{k}\qquad \vec{E}(0,0,z)=\frac{|z|qd}{2\pi\varepsilon_0\left(z^2-(d/2)^2\right)^2}\hat{k}$$

- Longe $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}=r\gg d$

$$\left|\vec{E}(r\gg d)\right|\propto\frac{qd}{r^3}$$



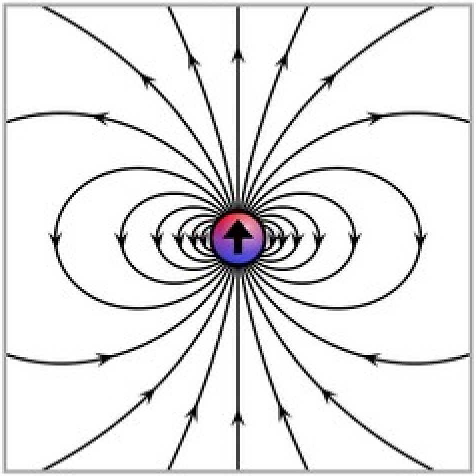
Aspecto do campo

$$\vec{E}(x,y,0)=\frac{-qd}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+(d/2)^2\right)^{3/2}}\hat{k} \qquad \vec{E}(0,0,z)=\frac{|z|qd}{2\pi\varepsilon_0\left(z^2-(d/2)^2\right)^2}\hat{k}$$

- Longe $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}=r\gg d$

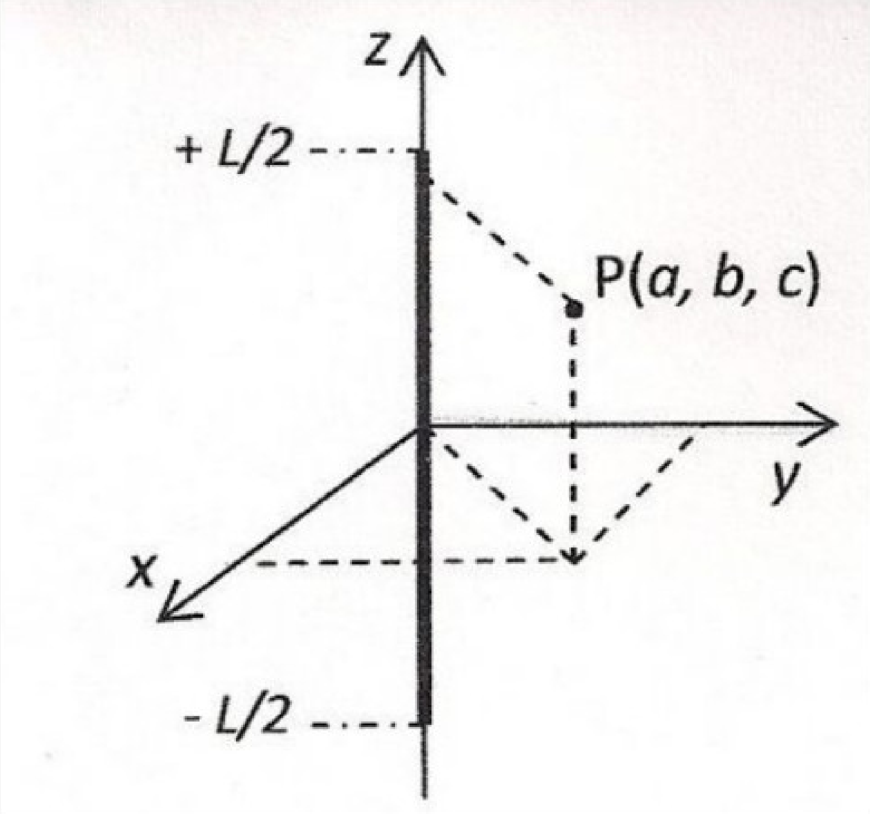
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)$$

$$\vec{p}=q\vec{d}$$



Exemplo 2

Calcule o campo elétrico criado por um fio retilíneo, de comprimento L, carregado com uma densidade linear de carga λ, constante e positiva, disposto ao longo do eixo z, como mostra a figura, num ponto $P = (a, b, c)$, genérico e fora do fio.



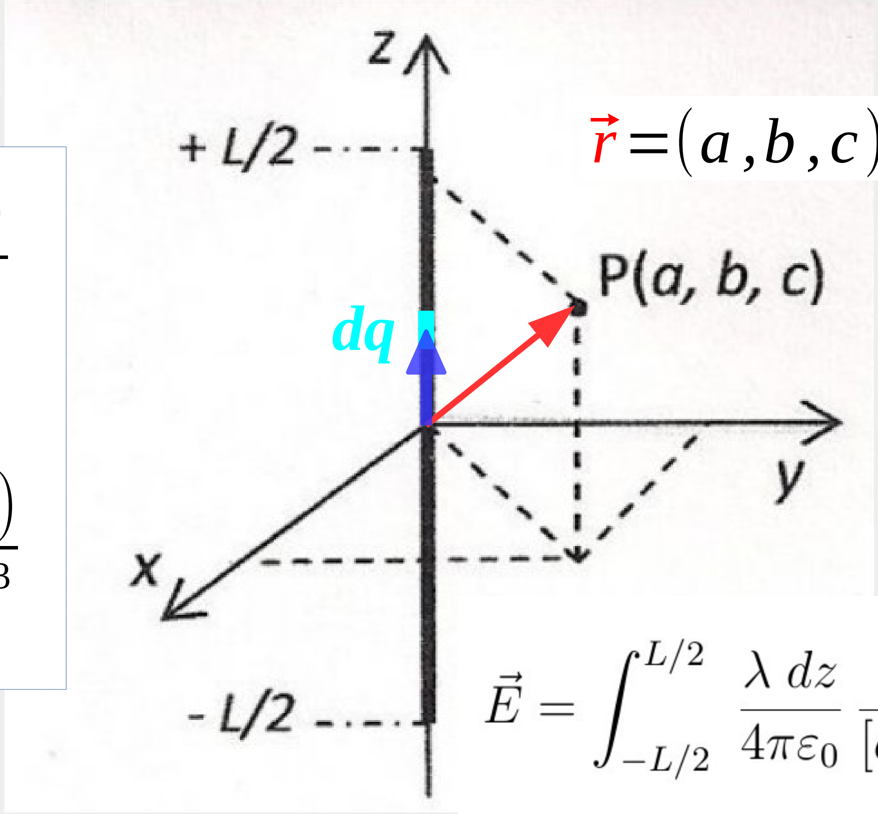
Exemplo 2

Calcule o campo elétrico criado por um fio retilíneo, de comprimento L, carregado com uma densidade linear de carga λ, constante e positiva, disposto ao longo do eixo z, como mostra a figura, num ponto $P = (a, b, c)$, genérico e fora do fio.

$$\vec{r} = (a, b, c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{(L)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - z\hat{k})}{|\vec{r} - z\hat{k}|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - z\hat{k})}{|\vec{r} - z\hat{k}|^3}$$



$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[a\vec{i} + b\vec{j} + (c - z)\vec{k}]}{[a^2 + b^2 + (c - z)^2]^{3/2}}$$

Separando as 3 componentes:

Integrais em z:

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}}\, dz$$

$$E_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}}\, dz$$

Numerador independe de z e denominador depende de z

$$E_z = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(c-z)}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}}\, dz$$

Numerador e denominador dependem de z

→ usar integrais do apêndice B

Integrais do apêndice B

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

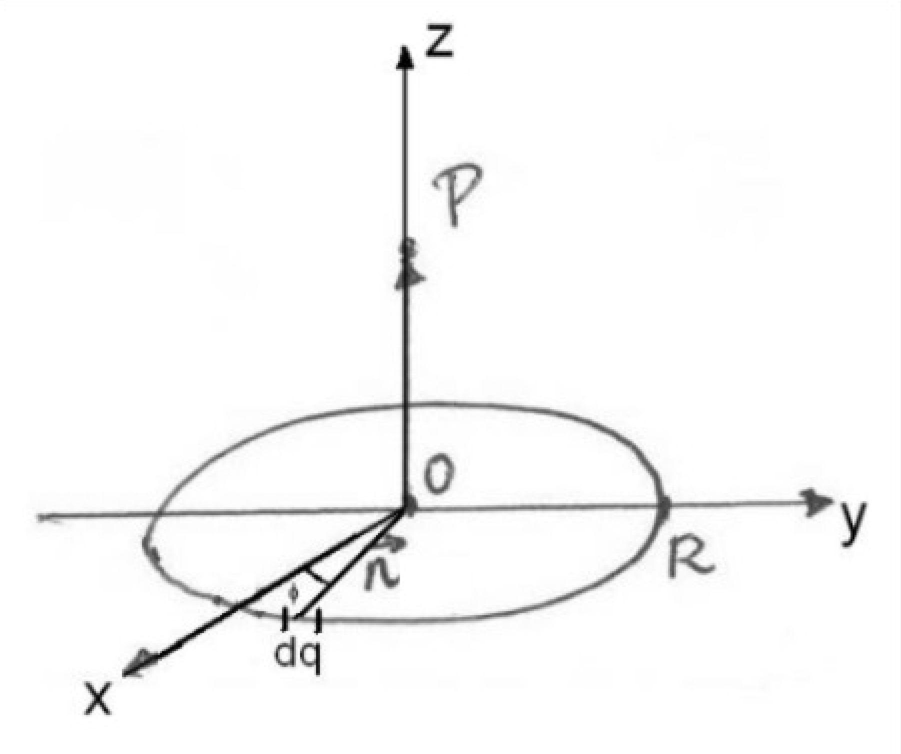
$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

- Fazer as substituições: $x \to c - z\,, a^2 \to a^2 + b^2$

$$dx \to -dz$$

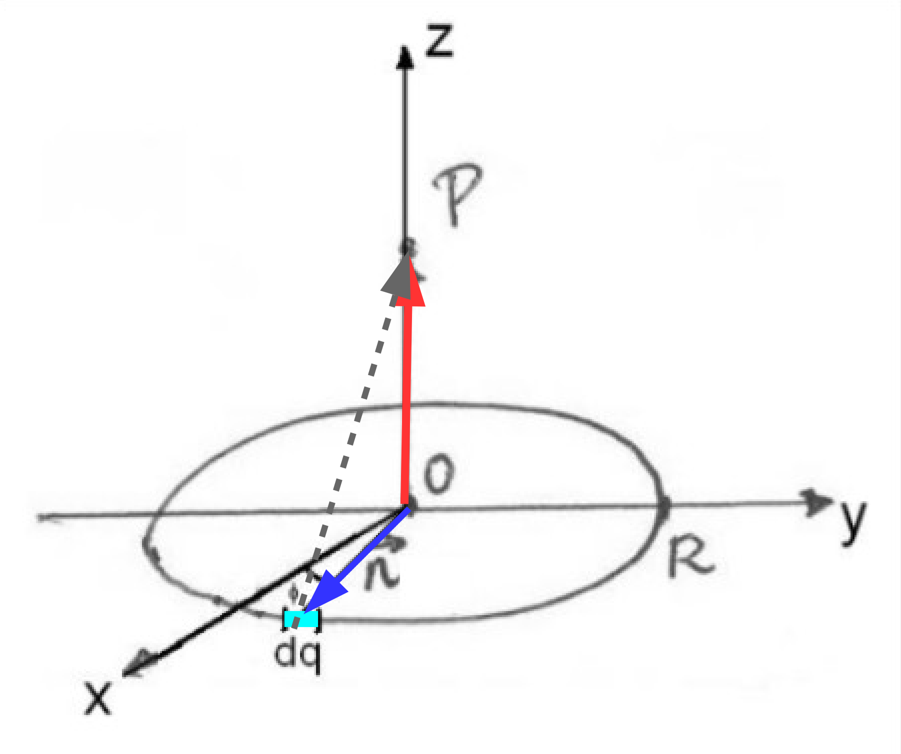
Exemplo 3

Calcule o campo elétrico E criado por um anel de raio R carregado com uma densidade de carga linear λ, constante e positiva, no ponto P = (0, 0, a). O anel está no plano xy com centro na origem do sistema de coordenadas, como ilustra a figura.



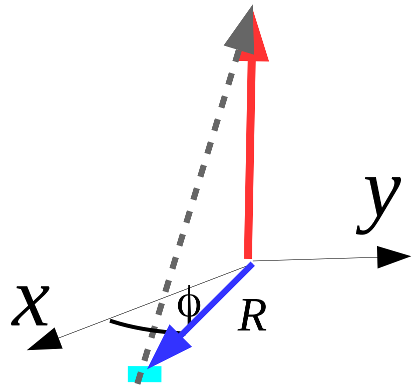
Exemplo 3

Calcule o campo elétrico E criado por um anel de raio R carregado com uma densidade de carga linear λ, constante e positiva, no ponto P = (0, 0, a). O anel está no plano xy com centro na origem do sistema de coordenadas, como ilustra a figura.



Identificação das variáveis

- Posição do elemento de carga ***dq***: $(x, y, 0)$
- Posição do ponto em que se calcula o campo: $(0, 0, a)$
- Posição relativa: $(-x, -y, a)$



- Escrever x,y em termos de R e ϕ e integrar de zero a 2pi
- Verificar as simetrias do problema
- Resultado:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Exemplo 4

Calcule o campo elétrico E criado por um anel de raio R carregado com uma densidade
de carga linear $\lambda \cos \phi$, sendo λ uma constante e positiva, no ponto P = (0, 0, a). O anel está no plano xy com centro na origem do sistema de coordenadas, como ilustra a figura. ϕ é medido com relação ao eixo x.

- Mesmo procedimento, muda apenas a função a ser integrada
- Resultado: $\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^2\pi}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$