

ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À SEGUNDA SEMANA

Todos exercícios abaixo são da seção 1.5 do Strang.

Exercício 1. (Problema 4) Aplique escalonamento sem troca de linhas para achar a decomposição LU das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2. (Problema 6) Ache E^2 , E^8 e E^{-1} para

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Observe que E é uma matriz elementar. A qual operação elementar ela corresponde?)

Exercício 3. (Problema 9)

(a) Sob quais condições o produto a seguir resulta numa matriz inversível?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, começando com $Lc = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

Exercício 4. (Problema 11) Resolva o problema abaixo usando dois sistemas triangulares, sem multiplicar LU para achar A .

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5. (Problema 12) Como podemos fatorar A em um produto UL , em que U é triangular superior e L é triangular inferior (note que mudamos a ordem da multiplicação)? Os fatores seriam os mesmos da decomposição LU ?

Exercício 6. (Problema 15) Ache a decomposição $PA = LDU$ (e cheque a resposta) para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 7. (Problema 27) Quais são os fatores L e U para a matriz abaixo? Quem é U em $A = Lu$ e quem é o novo U em $A = LDU$?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Exercício 8. (Problema 28) As matrizes abaixo são simétricas. Ache as fatorações LDU e diga como U está relacionado com L para essas matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9. (Problema 32) Resolva o sistema $Lc = b$ para encontrar c . Então resolva $Ux = c$ para encontrar x , em que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10. (Problema 33) Resolva $Lc = b$ para achar c . Então resolva $Ux = c$ para achar x . Quem era a matriz original A , para a qual foi feita a decomposição LU ?

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Exercício 11. (Problema 38)(Revisão) Para quais números c a decomposição $A = LU$ é impossível, mas a matriz escalonada equivalente a A tenha três pivôs?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 12. (Problema 42) Sejam P_1 e P_2 duas matrizes de permutação (identidade com as linhas permutadas). Dê um exemplo em que $P_1P_2 \neq P_2P_1$ e outro em que $P_1P_2 = P_2P_1$.