Obtendo-se a Identidade de Beltrami em Cálculo Variacional

28 de março de 2023

1 Introdução

Seja o problema de se encontrar o mínimo para o funcional:

$$F = \int_{x_i}^{x_f} L\left(y, y', x\right)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

A equação de Euler-Lagrange diz que funções $y(x)$ que extremizam (1) também são soluções de:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2}$$

Em particular, se $\partial L/\partial y = 0$, então existe constante K tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = K \tag{3}$$

Este resultado é bastante útil, pois transforma trivialmente a equação diferencial em (2), potencialmente de 2a ordem, na equação diferencial em (3), de primeira ordem.

Naturalmente, este resultado só é disponível quando se tem $\partial L/\partial y = 0$. Pergunta-se se existe algum resultado equivalente quando $\partial L/\partial x = 0$.

2 Invertendo-se a dependência das variáveis

O funcional em (1) foi calculado na forma de uma integral em x e a curva que o extremiza é descrita como $y = y(x)$, com y como variável dependente e x como variável independente. A propriedade(3) aplica-se quando o funcional não depende da variável dependente.

Por outro lado, não há nada de intrinsecamente necessário nesta descrição. A curva pode do mesmo modo ser escrita como $x = x(y)$, com y como variável independente e x como variável dependente. Neste caso,

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{x'} \tag{4}$$

e

$$\int_{x_i}^{x_f} L\left(y, y', x\right) \, \mathrm{d}x = \int_{y_i}^{y_f} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}, x\right) x' \, \mathrm{d}y \tag{5}$$

Pela Equação de Euler-Lagrange, a função $x(y)$ que extremiza (5) é:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}, x\right) x'\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\left(L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}, x\right) x'\right)\right) = 0 \tag{6}$$

3 Identidade de Beltrami

Quando $L = L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right)$ e $\partial L/\partial x = 0$, existe uma constante K tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) x'\right) = K \tag{7}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) x'\right) = L + x' \frac{\partial}{\partial x'} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) \tag{8}$$

Do mesmo modo,

$$\frac{\partial}{\partial x'} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(1/x'\right)} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) \frac{\partial(1/x')}{\partial x'} = -\frac{1}{x'^2} \frac{\partial}{\partial\left(1/x'\right)} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) \tag{9}$$

Substituindo-se (9) em (8),

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) x'\right) = L - \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial\left(1/x'\right)} L\left(y, {}^{1}\!/_{x'}\right) \tag{10}$$

Finalmente, substituindo-se $1/x' = y'$ em (10), chega-se a

$$L - y' \frac{\partial}{\partial y'} L = K \tag{11}$$

A equação (11) é conhecida como *Identidade de Beltrami*, e aplica-se quando o funcional não depende explicitamente da variável independente, ou seja, $\partial L/\partial x = 0$.