Álgebra Linear e Aplicações

- Decomposição LDU e LU com troca de linhas

Decomposição LDU

Até agora temos

Teorema: Suponha que $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ possa ser escalonada sem troca de linhas e a matriz resultante tenha n pivôs. Logo $A = LU$, em que

1) U é a matriz A escalonada (triangular superior)
2) L é a matriz dos multiplicadores no escalonamento com 1 na diagonal (triangular inferior)

Podemos deixar L e U mais "simétricas".

- Multiplicação por matriz diagonal: Seja $A, D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e D diagonal. Logo

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - L_{A_1} - \\ - L_{A_2} - \\ \vdots \\ - L_{A_n} - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - d_1 L_{A_1} - \\ - d_2 L_{A_2} - \\ \vdots \\ - d_n L_{A_n} - \end{bmatrix}$$

L_{A_j} linha j de A

Basta multiplicar as linhas pelo elemento da diagonal correspondente.

Assim, podemos escrever, para $d_j = u_{jj}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, os pivôs de U:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}}_{:= D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_1} & \dots & \frac{u_{1n}}{d_1} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{d_2} \dots & \frac{u_{2n}}{d_2} \\ & & \ddots \; 1 \; \frac{u_{n-1,n-1}}{d_n} \dots & \frac{u_{nn}}{d_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{:= \tilde{U}}$$

Logo $A = LD\tilde{U}$

EXEMPLO: SEJA $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

VIMOS QUE $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{:= L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{:= U}$

NOTE QUE $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CONCLUSÃO:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SÓ COM A OPERAÇÃO ELEMENTAR 3

TEOREMA: SUPONHA QUE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ POSSA SER ESCALONADA SEM TROCA DE LINHAS E A MATRIZ RESULTANTE TENHA n PIVÔS. LOGO $A = LDU$, EM QUE

1) U É UMA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR COM TERMOS DIAGONAIS IGUAIS A 1.
2) L É UMA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR COM TERMOS DIAGONAIS IGUAIS A 1.
3) D É UMA MATRIZ DIAGONAL.

DECOMPOSIÇÃO LU COM TROCA DE LINHAS

MOTIVOS PARA TROCAR LINHAS:

1) PODE APARECER UM ZERO NO LUGAR ONDE DEVERIA ESTAR O PIVÔ.
2) NUMERICAMENTE PODE PRODUZIR RESULTADOS MELHORES, DEVIDO A ERROS DE ARREDONDAMENTO.

ABAIXO, VAMOS ESCALONAR USANDO PIVOTAMENTO PARCIAL (CONDENSAÇÃO PIVOTAL).

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE ESTAMOS ESCALONANDO UMA MATRIZ USANDO PIVOTAMENTO PARCIAL QUANDO A CADA ETAPA DO ESCALONAMENTO TROCAMOS LINHA DE FORMA A USAR O PIVÔ DE MAIOR MÓDULO POSSÍVEL (DENTRO DA COLUNA ONDE ESTÁ O PIVÔ).

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

1º PASSO) $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_1} A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

2º PASSO) $L_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1$

$L_3 = L_3 - \frac{1}{4}L_1$

$L_4 = L_4 - \frac{3}{4}L_1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

3º Passo) $L_2 \leftrightarrow L_4$

Pois $\frac{7}{4} > \frac{3}{4}$ e $\frac{7}{4} > \frac{1}{2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_2} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

4º Passo) $L_3 = L_3 + \frac{3}{7} L_2$

$L_4 = L_4 + \frac{2}{7} L_2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

5º Passo) $L_4 \leftrightarrow L_3$

Pois $\frac{6}{7} > \frac{2}{7}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_3} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

6º Passo) $L_4 = L_4 - \frac{1}{3} L_3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{=U}$$

Conclusão: $M_3 P_3 M_2 P_2 M_1 P_1 = U$

Melhorando... $U = M_3 \left(P_3 M_2 P_3^{-1}\right)\left(P_3 P_2 M_1 (P_3 P_2)^{-1}\right) P_3 P_2 P_1 A$

Note que $$P_3 M_2 P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & l_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{42} & 0 & 1 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{42} & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que $\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

$$P_3 P_2 M_1 (P_3 P_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 & 0 \\ l_{13} & 0 & 1 & 0 \\ l_{14} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{14} & 0 & 0 & 1 \\ l_{12} & 1 & 0 & 0 \\ l_{13} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{14} & 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 0 & 1 & 0 \\ l_{13} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>CONCLUSÃO:</u> SEJAM $P := P_3 P_2 P_1$, $M_3' = M_3$, $M_2' = P_3 M_2 P_3^{-1}$, $M_1' = P_3 P_2 M_1 P_2^{-1} P_3^{-1}$

LOGO $PA = M_1'^{-1} M_2'^{-1} M_3'^{-1} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{14} & 0 & 0 & 1 \\ l_{12} & 1 & 0 & 0 \\ l_{13} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{42} & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{bmatrix} U$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{14} & 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{42} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{32} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}}_{:= L} U$$

NO EXEMPLO ACIMA,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

EM GERAL, $M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 A = U$

LOGO, SE $M_j' := P_{n-1} \dots P_{j+1} M_j P_{j+1} \dots P_{n-1}$, ENTÃO $M_{n-1}' \dots M_1' P_{n-1} \dots P_1 A = U$

PORTANTO, $PA = LU$, $P = P_{n-1} \dots P_1 A$, $L = M_1'^{-1} \dots M_{n-1}'^{-1}$.

RETOMANDO: ALGORITMO PARA ACHAR P, L E U. PODEMOS GUARDAR L E U NA MATRIZ A.

VOLTANDO AO EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \overset{p_1 = 3}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{1}{4} L_1 \\ L_4 = L_4 - \frac{3}{4} L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \overset{p_2 = 4}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 = L_3 + \frac{3}{7} L_2 \\ L_4 = L_4 + \frac{2}{7} L_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \overset{p_3 = 4}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 - \frac{1}{3} L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

CONCLUÍMOS QUE $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

PARA DESCOBRIR P

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \xrightarrow{p_1 = 3} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \xrightarrow{p_2 = 4} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \xrightarrow{p_3 = 4} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

ASSIM $P = \begin{bmatrix} \text{LINHA 3 DE } I \\ \text{LINHA 4 DE } I \\ \text{LINHA 2 DE } I \\ \text{LINHA 1 DE } I \end{bmatrix}$

I = IDENTIDADE

PARA QUE SERVE A DECOMPOSIÇÃO LU?

SE SOUBERMOS QUE $A = LU$, ENTÃO É MAIS FÁCIL ACHAR SOLUÇÃO DE $Ax = b$.
COMO FAZER?

1º PASSO) RESOLVEMOS $Ly = b$

SE $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & l_{32} & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, ENTÃO $Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & l_{32} & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_2 &= b_2 - l_{21} y_1 \\ &\vdots \\ y_k &= b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} y_j \\ &\vdots \\ y_n &= b_n - \sum_{j=1}^{n} l_{kj} y_j \end{aligned}}$$

RESOLVEMOS DE CIMA PARA BAIXO

2º PASSO) RESOLVEMOS $Ux = y$. ($\Rightarrow Ax = LUx = Ly = b$)

SE $U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$, ENTÃO $Ux = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{u_{nn}} y_n \\ x_{n-1} &= \frac{1}{u_{n-1\,n-1}} \left(y_{n-1} - u_{n-1\,n} y_n \right) \\ &\vdots \\ x_j &= \frac{1}{u_{jj}} \left(y_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} y_k \right) \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} u_{1k} y_k \right) \end{aligned}}$$

RESOLVEMOS DE BAIXO PARA CIMA