2ª Lista de Exercícios, Álgebra I, período Noturno
1º semestre, Prof Eduardo Marcos

<u>1ª Questão</u> Sejam a, b, c inteiros, prove:

a) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$

b) $a < b \iff a^5 < b^5$

c) $a + \cdots + a = 0 \iff a = 0$

d) $a^2 + 1 \neq 0$

<u>2ª Questão</u> I) Seja $N^* = \{a \in \mathbb{Z} . \ a > 0\}$, Prove:

a) $(a \in P \text{ e } b \in P) \Rightarrow a + b \in P$

b) $(a \in P \text{ e } b \in P) \Rightarrow ab \in P$

c) Para todo $x \neq 0$ vale: $x \in P$ ou $-x \in P$.

<u>Questão II)</u> Assuma de temos um conjunto não vazio X com uma operação (+) que satisfaz:

a) é associativa

b) Tem elemento neutro

c) Todo elemento x tem um oposto (-x)

d) é comutativa.

A operação é tal que X tem um subconjunto ~~não vazio~~) satisfazendo a, b, c da primeira parte. Definimos em X uma relação assim

$a \leq b$ significa que $a = b$ ou $b - a \in P$.

Prove que $\leq$ é uma relação de ordem compatível com a operação (+). (Isto é $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$)

3) Em $N^*$ definimos a relação $a|b \iff$ existe c em $N^*$ tal que $b = ac$. Prove que essa é uma relação de ordem. Exiba um exemplo mostrando que não é total

4) Prove que as seguintes formulas são verdadeiras para todo inteiro $n$ maior que zero.

1) $1^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n (n+1)\right]^2$

2) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

3) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n+1} = 2^n - 1$

4) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

5) Determine o erro da seguinte "demonstração".

Afirmação Todo subconjunto finito tem um único elemento.

"Prova" : $P(1)$ é verdadeiro.

Suponha que $n \geq 1$ e $P(n)$ é verdadeira.

Considere $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

Por indução o conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$

tem 1 elemento, logo $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

O conjunto $\{a_2, \dots, a_{n+1}\}$ tem ~~[illegible]~~

1 só elemento. Logo $a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$

Portanto $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$ e o

resultado segue por indução

6) Prove que o nº de subconjuntos de um conjunto com $n$ elementos é $2^n$.

7) Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que satisfaz as seguintes duas propriedades

1) $f(1) = 1$
2) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todo par de inteiros $(a, b)$.

Prove que $f$ é a identidade

8) Em cada uma das proposições diga o que é hipotese e o que é tese:

a) 4 é par somente se 3 é primo.

b) Se 4 é par então 3 é primo

c) Se 3 é primo então 4 é par

d) Para 3 ser primo é suficiente que 4 seja par.

9) Prove que o nº de diagonais de um polígono convexo de $n$ lados é

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

10) Sejam $a, b$ inteiros prove que. $m, n$ naturais

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

iii) $n! > n^2$ se $n \geq 4$

iv) $n! > n^3$ se $n \geq 6$