Carta de Smith

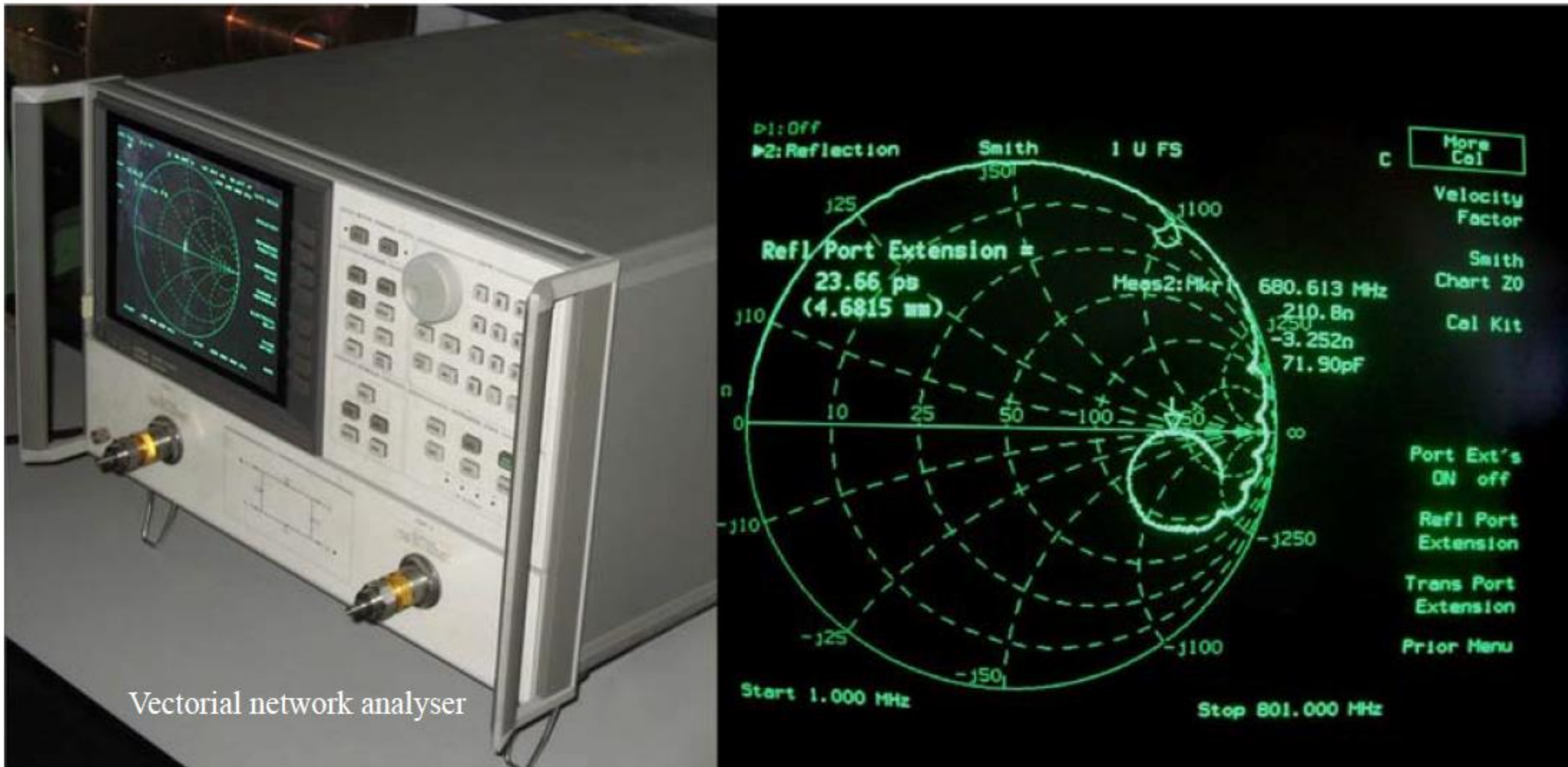
SEL 369 Micro-ondas

Tania Regina Tronco
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Carta de Smith

- Publicada por P. H. Smith em 1939
- Técnica gráfica muito útil
- Ferramenta gráfica para a soluções de problemas envolvendo coeficientes de reflexão e transmissão
- Visualização de variação de impedância em linhas de transmissão
- Como ábaco auxiliar de projetos envolvendo linhas de transmissão é menos útil hoje do foi na época da sua publicação
- Nos dias de hoje projetos em altas freqüências são feitos por meio de programas de computador

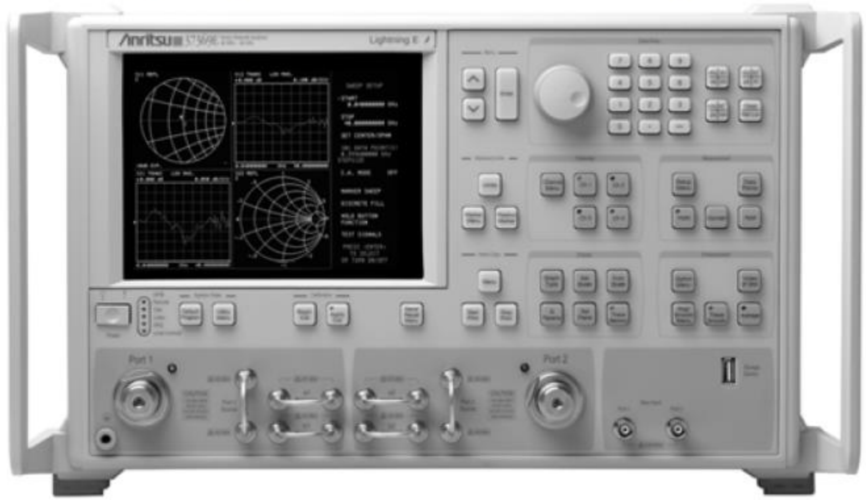
Um network analyser é um equipamento cujo display é uma carta de Smith e, portanto, o conhecimento dessa técnica é de fundamental importância à sua operação.



Vectorial network analyser

No projeto de circuitos de RF, o projetista está interessado em ondas de tensão [V(d)] e corrente [I(d)], impedâncias de onda [Z(d)] e coeficientes de reflexão [Γ(d)].

Através de um tipo de Transformação Conforme, chamada de transformação bilinear, a carta de Smith permite realizar, com simplicidade, a transformação de impedância quando se 'caminha' longo de uma LT, e converter esse valor num coeficiente de reflexão, e vice-versa.



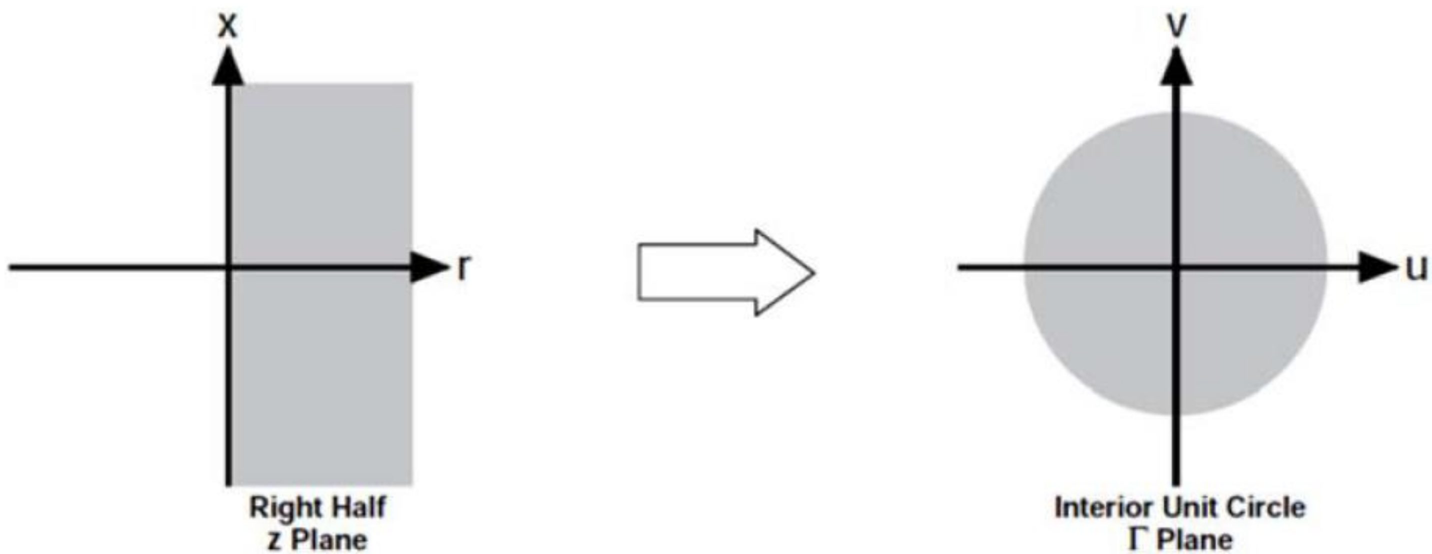
A transformação de impedâncias é necessária, por exemplo, para proporcionar:

- Máxima transferência de potência, ao se casar a carga com a LT (assumindo gerador casado);
- Melhoria da relação sinal-ruído (SNR) de um sistema, como consequência do casamento de impedâncias entre os componentes de um receptor sensível (antena, amplificador de baixo ruído, etc.);
- Redução dos erros de amplitude e de fase devido ao casamento de impedâncias numa rede de distribuição de potência (como um alimentador de *array* de antenas).

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

a bilinear conformal complex function

$$u + jv = \frac{(r-1) + jx}{(r+1) + jx}$$



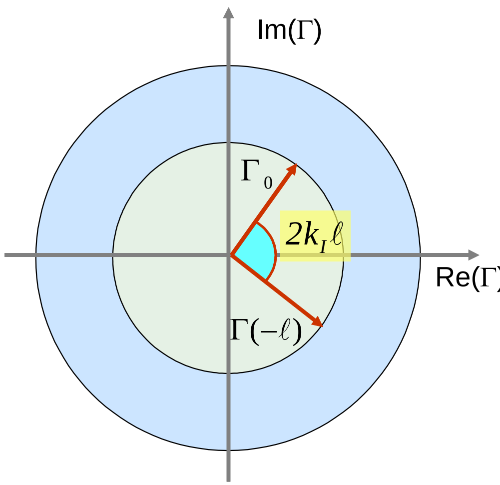
Coeficiente de reflexão e carta de Smith

O coeficiente de reflexão e a impedância são dados por

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0 e^{j2k_I z}}{1 - \Gamma_0 e^{j2k_I z}} \quad \text{e} \quad \Gamma(z) = \Gamma_0 e^{j2k_I z}$$

Combinando as 2 expressões

$$Z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} Z_0$$



Normalizando o valor da impedância

$$z(z) \equiv \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

- A cada valor de Γ corresponde um valor de z e vice-versa

Carta de Smith

$\Rightarrow$ É uma ferramenta de cálculos gráfica bastante prática para uso em microondas inventada pelo Engenheiro Phillip H. Smith (1905-1987).

Primeiramente normalizamos a impedância medida em um ponto Z pela impedância característica da linha Z_0:

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

Agora expressando os números complexos na forma cartesiana $\frac{Z}{Z_0} = r + ix$ e $\Gamma = u + iv$ temos

$$r + ix = \frac{1+u+iv}{1-u-iv}$$

Igualando as partes real e imaginária temos:

$$r = \frac{1-u^2-v^2}{1-u^2+v^2}$$
$$x = \frac{2v}{1-u^2+v^2}$$

Resolve-se esta equação no plano $u - v$, dados os valores de r e x, temos:

$\Rightarrow$ Circunferências de resistência r constante:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 . \tag{26}$$

Dado r as circunferências de resistência constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{r}{1+r}\ ,\ 0\right)$$

e raio $1/(1+r)$.

$\Rightarrow$ Circunferências de reatância x constante:

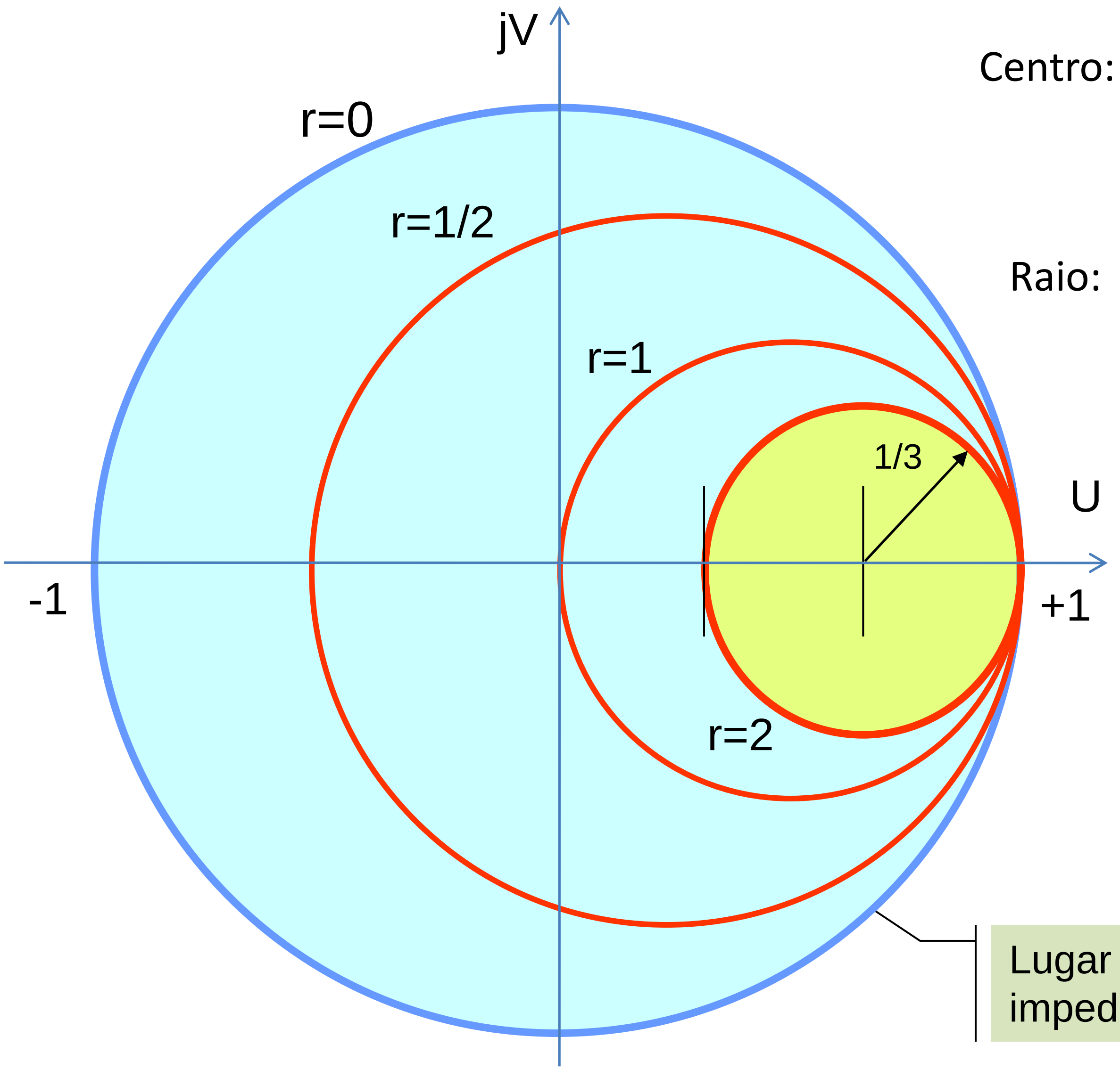
$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} . \tag{27}$$

Dado x as circunferências de reatância constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(1\ ,\ \frac{1}{x}\right)$$

e raio $1/|x|$.

Parte Real da Impedância na Carta de Smith-2



Centro: $U = \dfrac{r}{r+1}\,; V = 0$

Raio: $R = \dfrac{1}{r+1}$

$$\Gamma = U + jV$$

$$z = r + jx$$

Lugar geométrico de todas as impedâncias com parte real nula

Parte Imaginária da Impedância na Carta de Smith-1

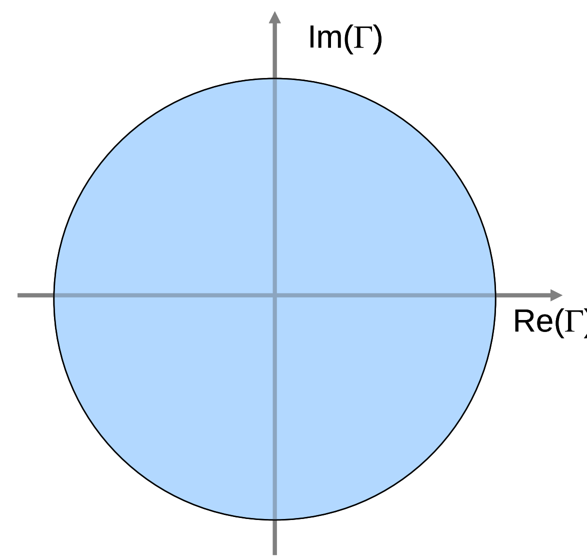
Eliminando a variável ***r***

$$U - 1^{\;2} + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

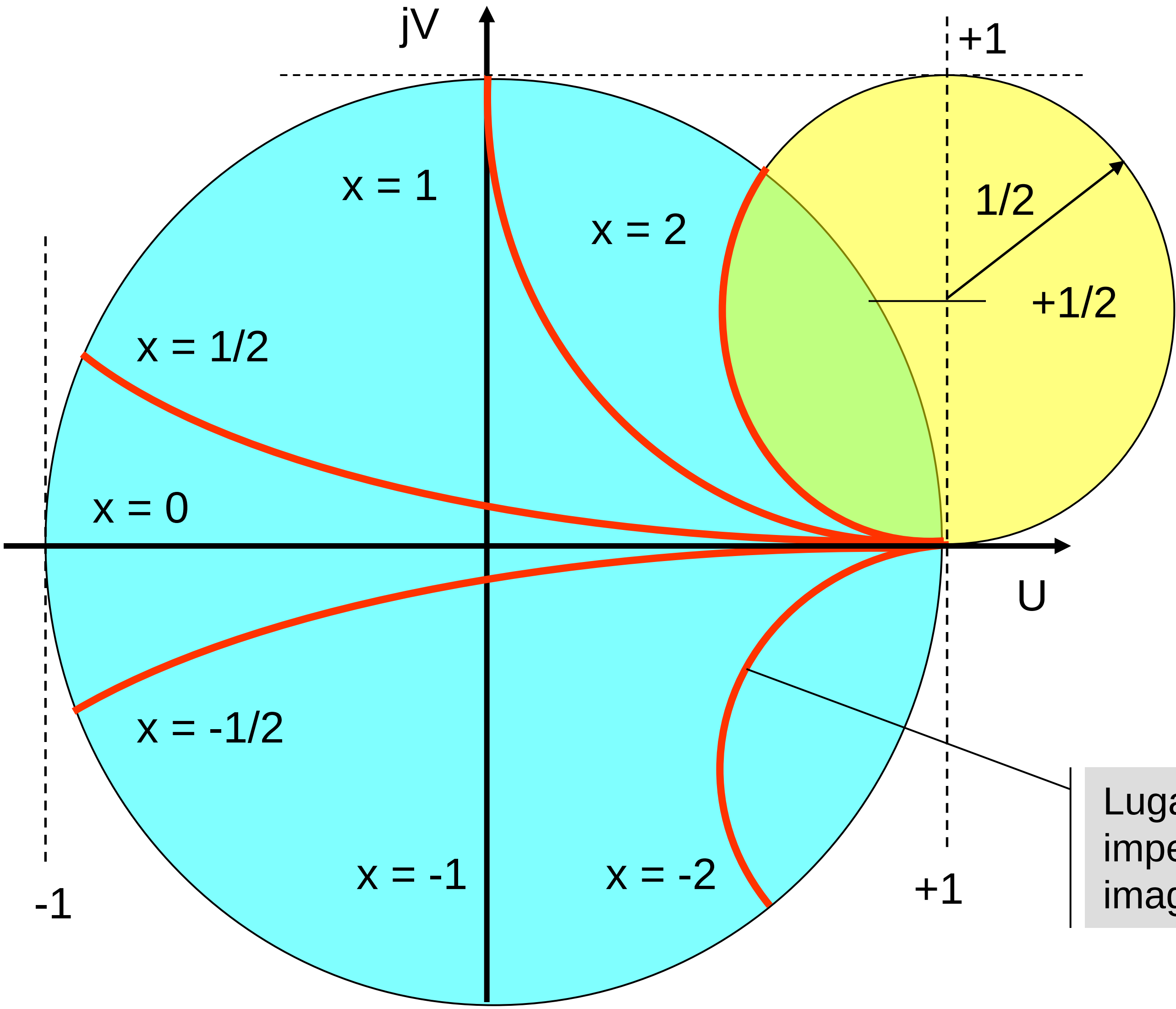
Esta equação representa uma família de círculos

Centro: $U = 1; \quad V = \dfrac{1}{x}$

Raio: $R = \dfrac{1}{x}$



Parte Imaginária da Impedância na Carta de Smith-2



Centro: $U = 1; \quad V = \frac{1}{x}$

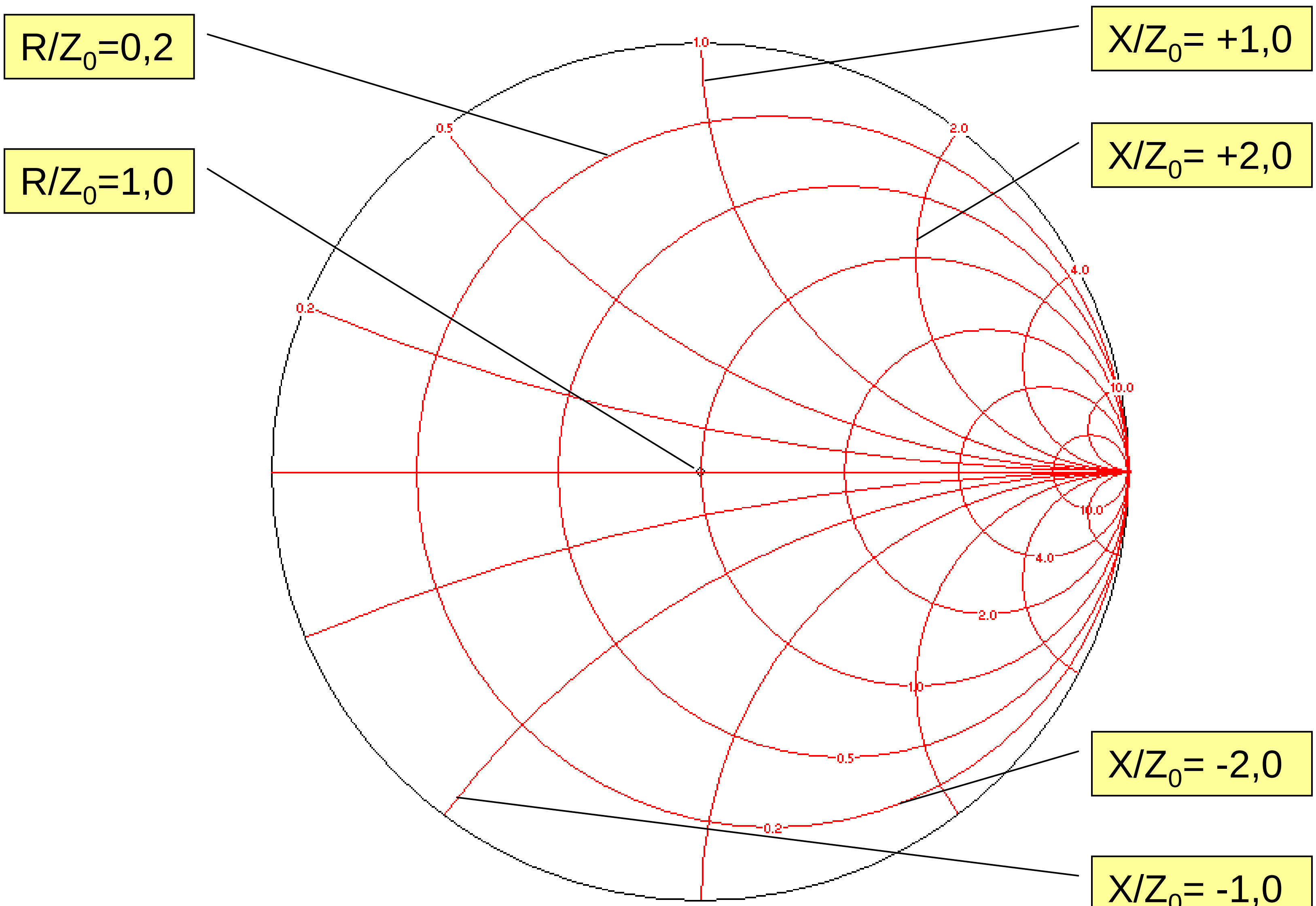
Raio: $R = \frac{1}{x}$

$$\Gamma = U + jV$$

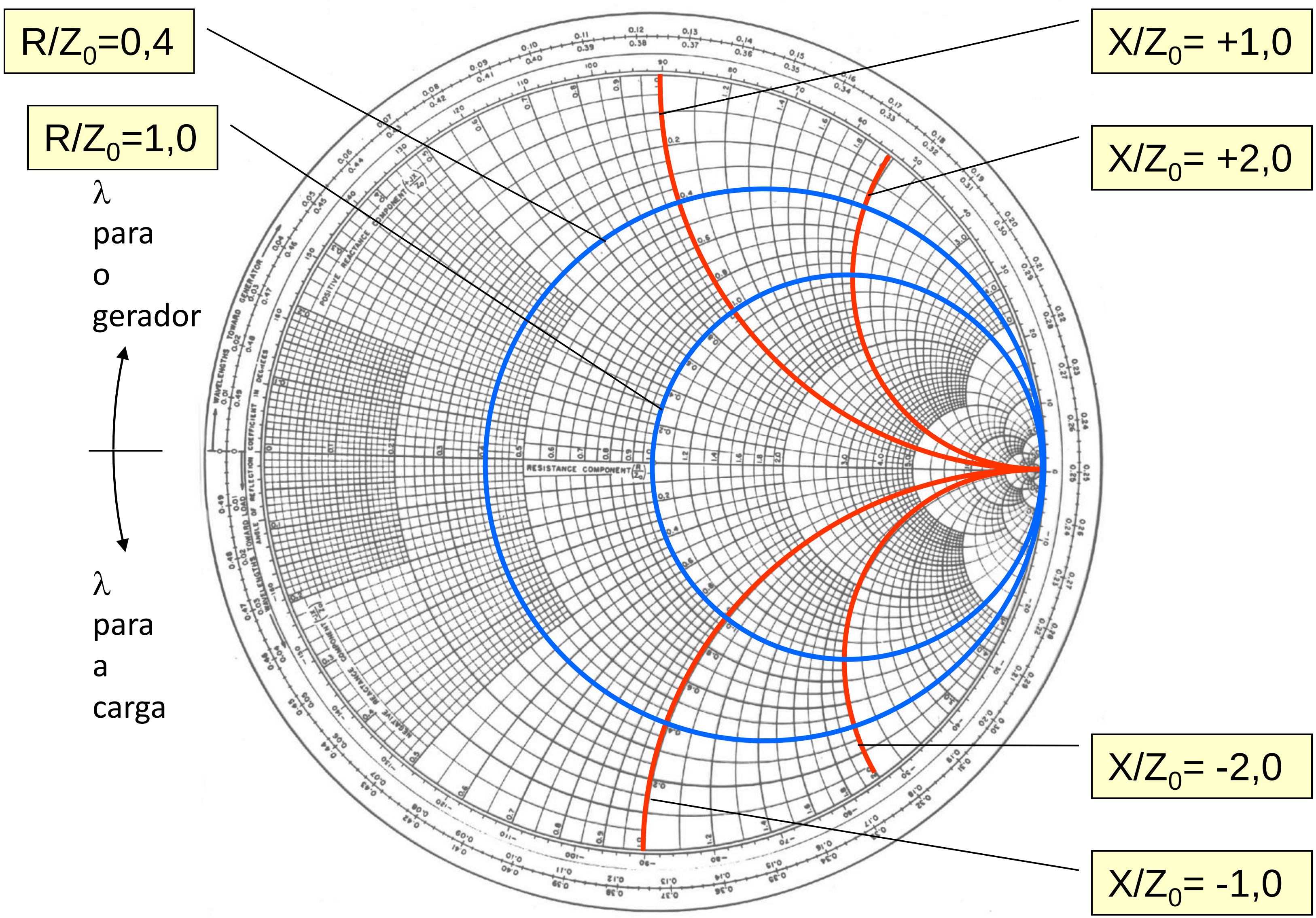
$$z = r + jx$$

Lugar geométrico das impedâncias cuja parte imaginária é x = -2

A Carta de Smith-1



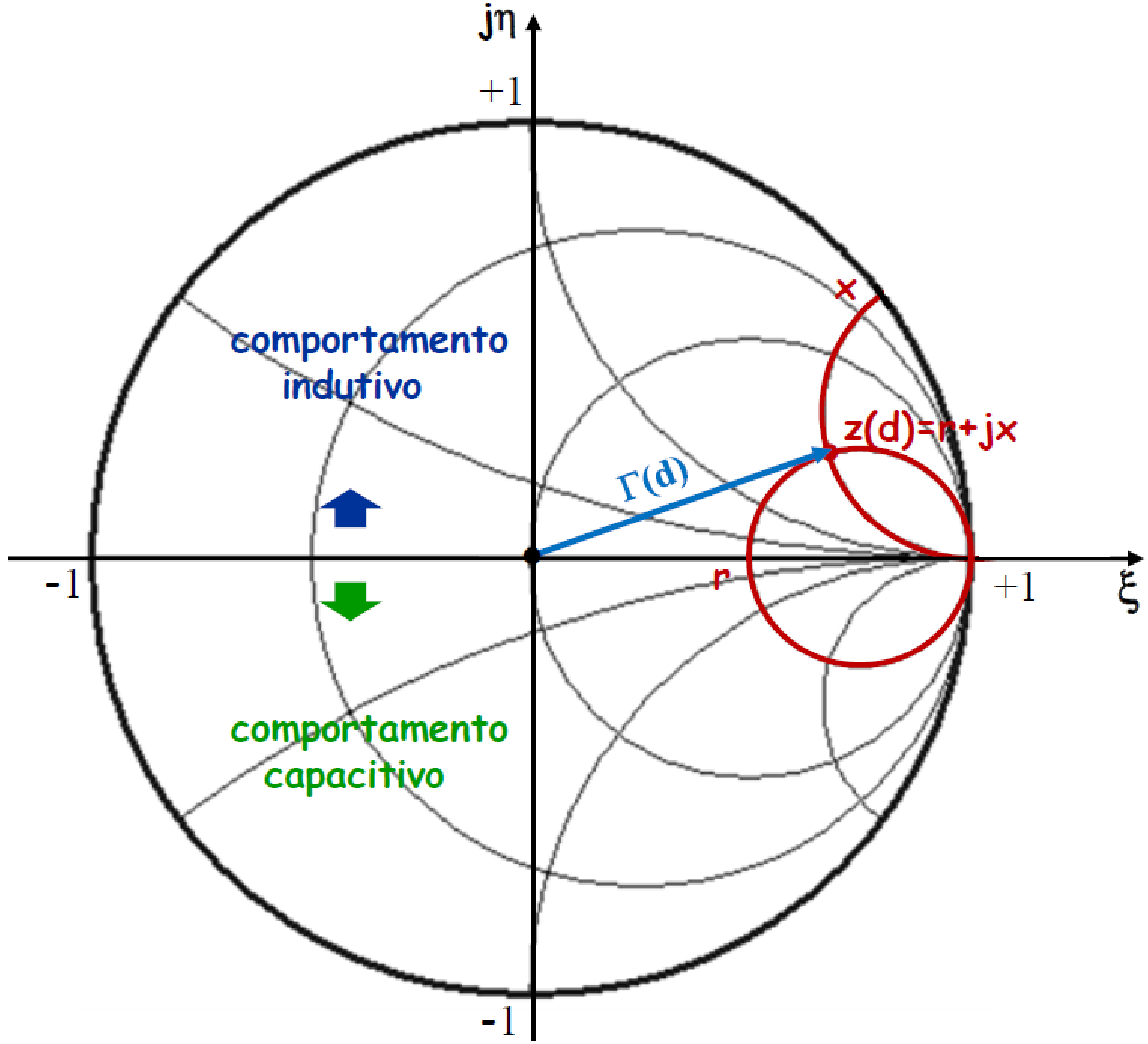
A Carta de Smith-2



- **Característica da carta de Smith de impedâncias**

i) A parte superior da carta ($r>0$, $x>0$) está associada à cargas indutivas.

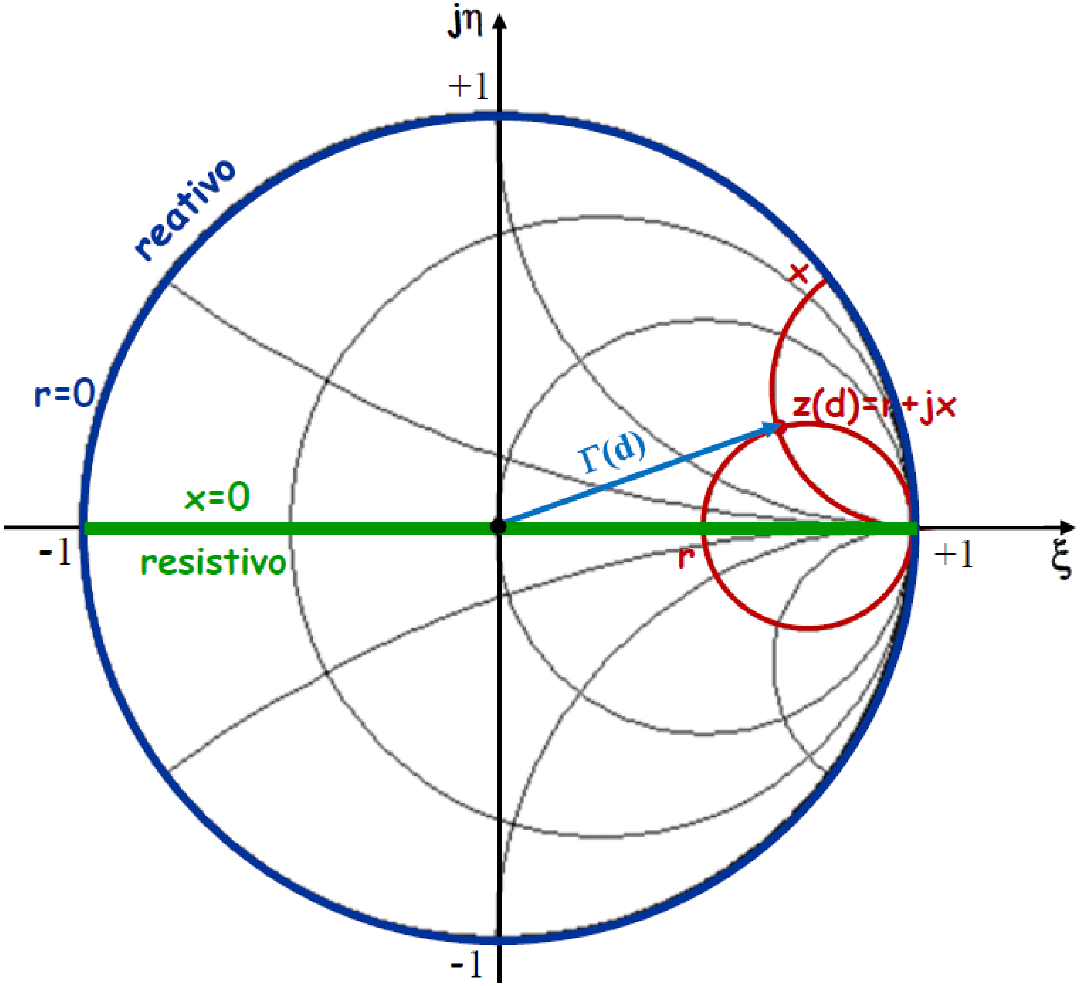
ii) A parte inferior ($r>0$, $x<0$), à cargas capacitivas.



- **Característica da carta de Smith de impedâncias**

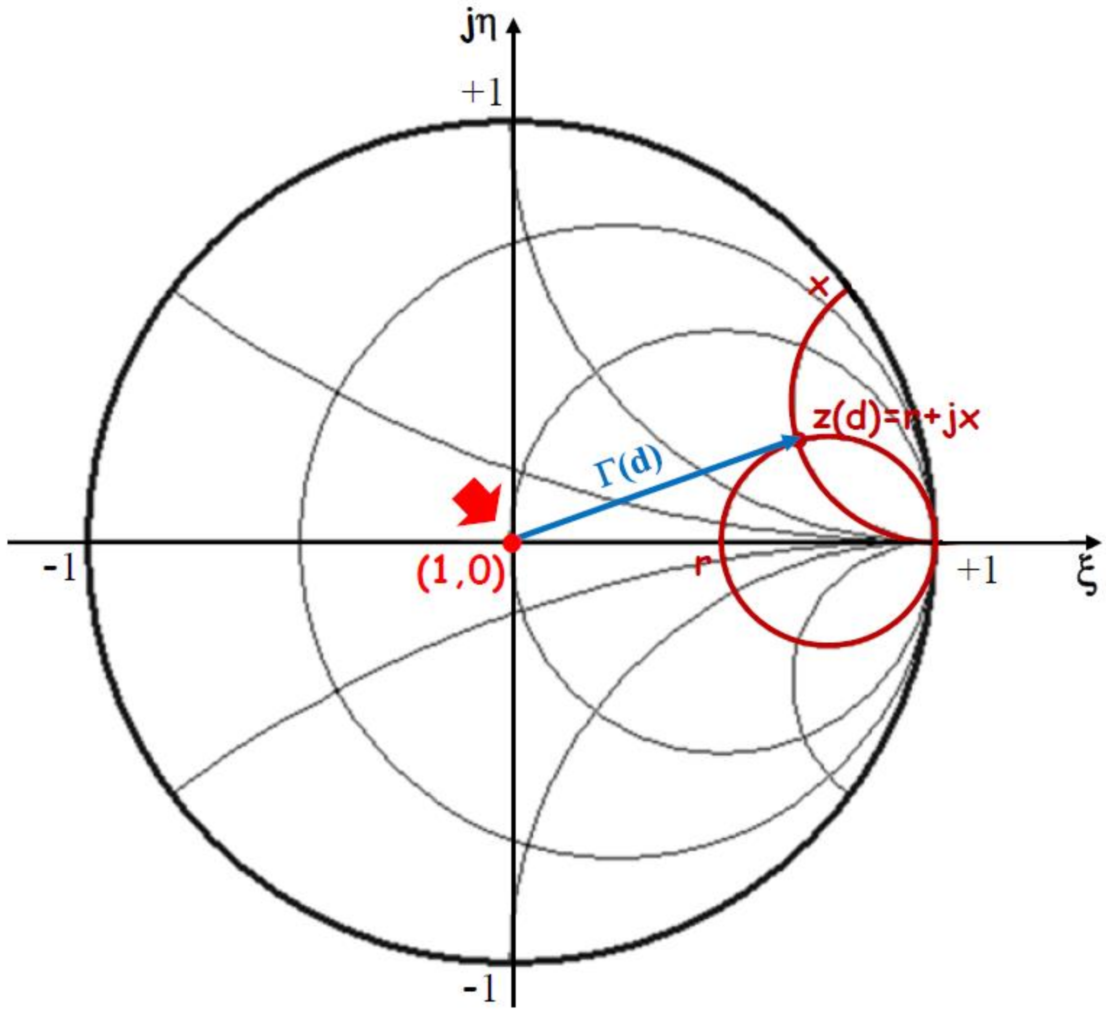
iii) Periferia da carta (r=0): cargas puramente reativas.

iv) Eixo horizontal (x=0): cargas puramente resistivas.



- **Característica da carta de Smith de impedâncias**

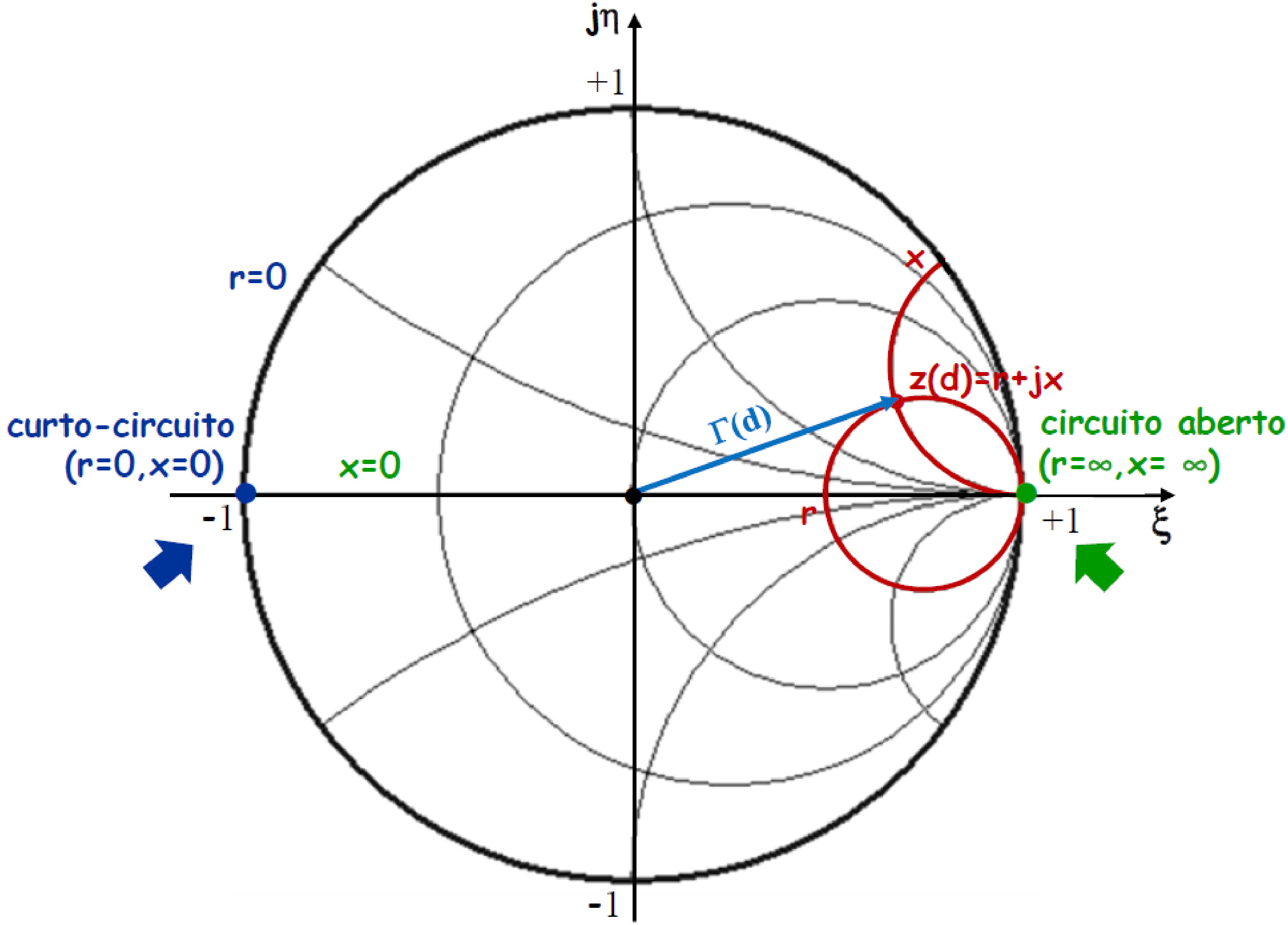
v) Centro da carta ($r=1, x=0$) $\rightarrow$ $z=1$: carga casada, $\Gamma(d)=0$ (não há reflexão).



- **Característica da carta de Smith de impedâncias**

vi) Ponto ($\xi=-1, \eta=0$) → r=0 e x=0, ou z=0: curto-circuito.

vii) Ponto ($\xi=+1, \eta=0$) → r=∞ e x=∞, ou z=∞: circuito aberto.

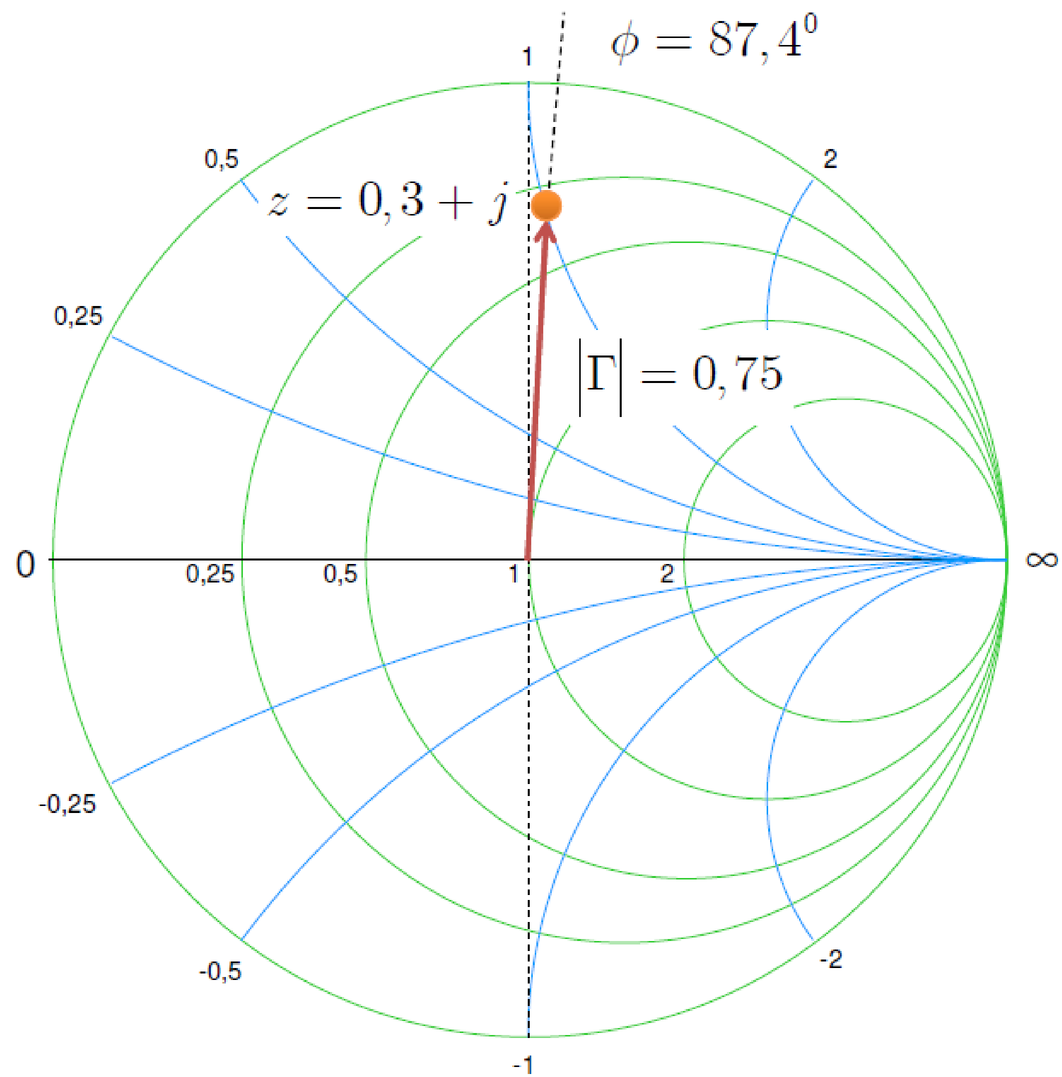


Exercício 1

Localizar na carta de Smith a impedância

$z = 0,3 + j1,0$

Determinar o módulo e fase do coeficiente de reflexão



Módulo

$1 \rightarrow$ 8,4 cm

$\left|\Gamma\right| \rightarrow 6,3$ cm

$\left|\Gamma\right| = 0,75$

$\phi = 87,4^0$

Exercício 2

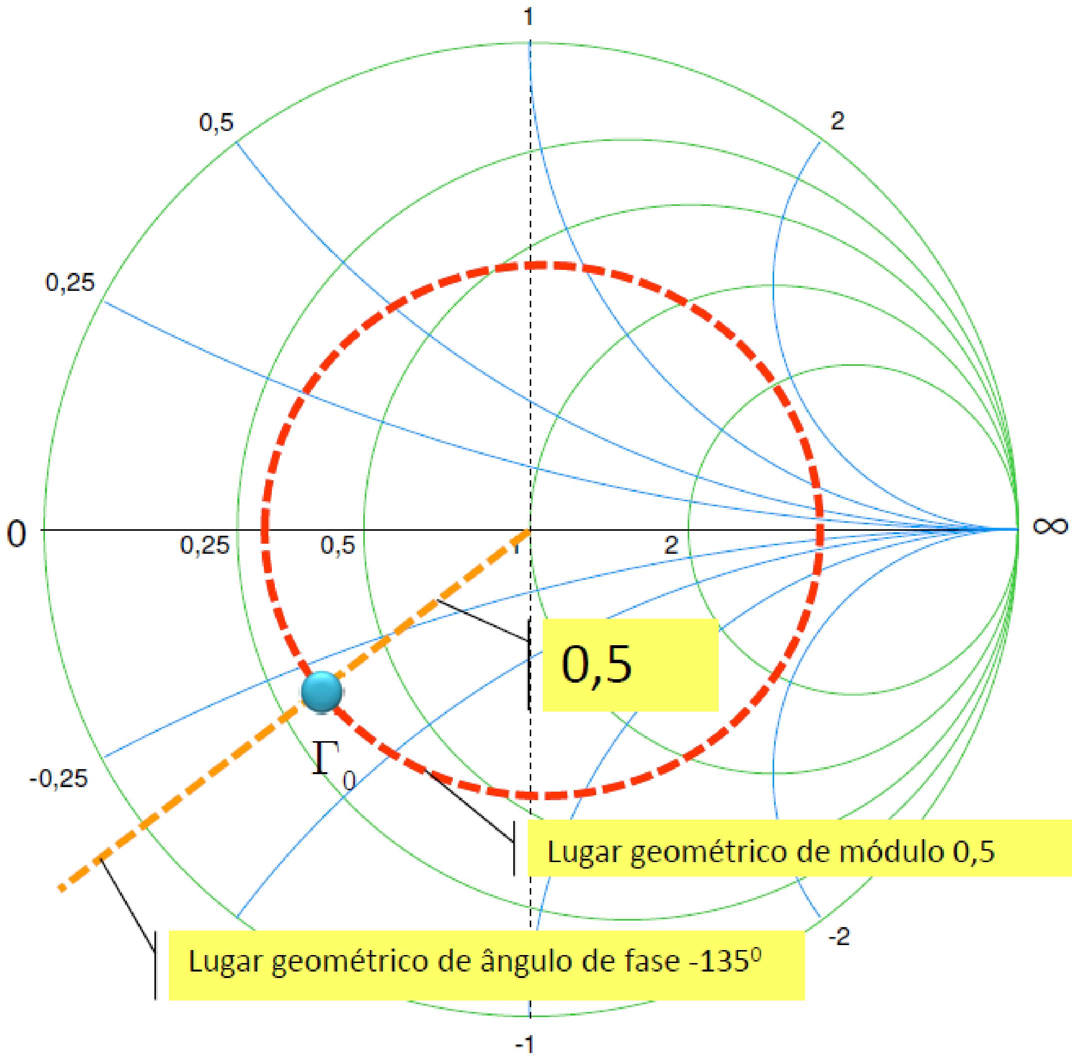
Localizar na carta de Smith o coeficiente de reflexão

$\Gamma_0 = 0,5\angle -135^0$

Módulo

$\left|\Gamma\right| = 1 \rightarrow 8{,}4$ cm

$\left|\Gamma\right| = 0,5 \rightarrow 4,2$ cm



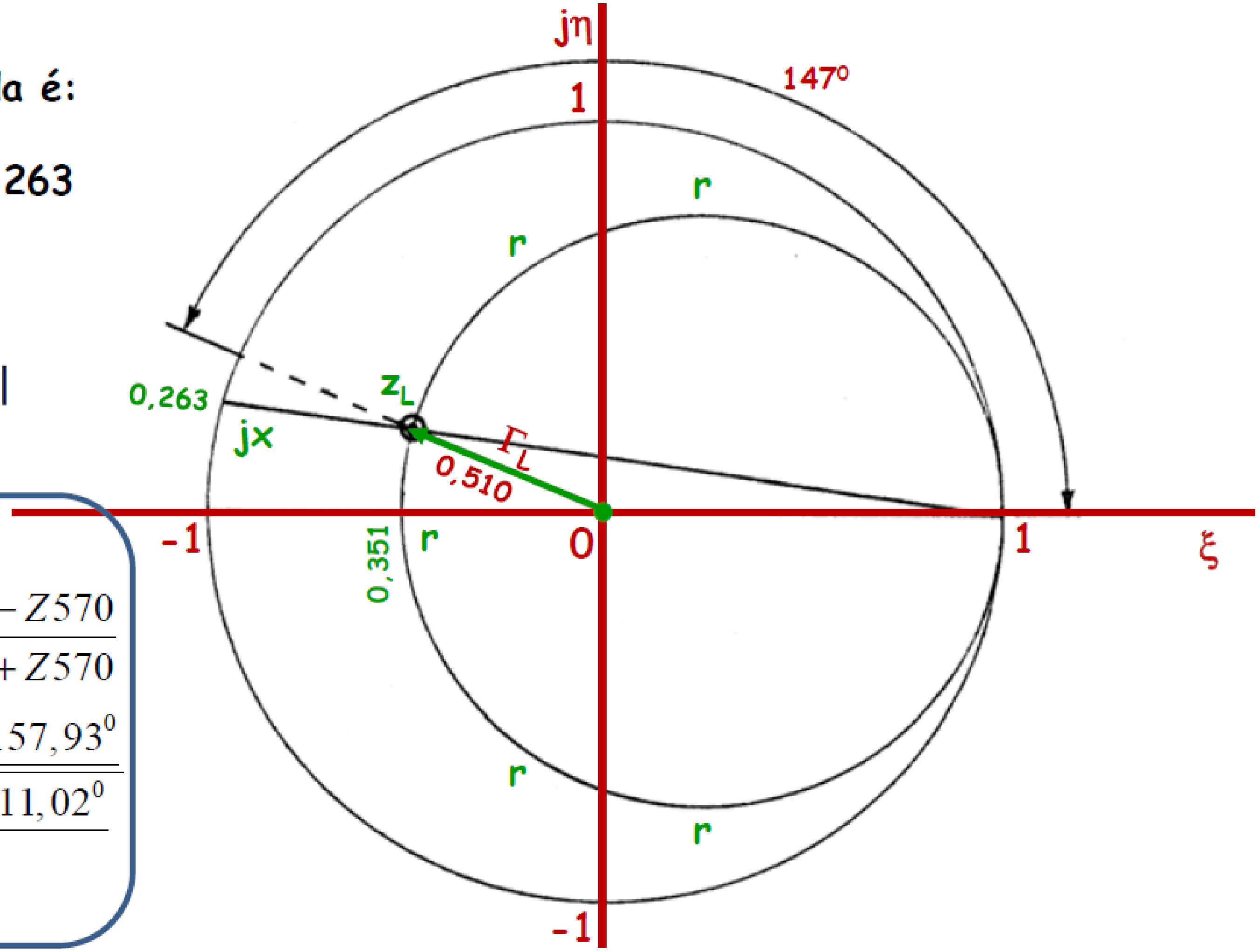
• Determinação do coeficiente de reflexão

Considere-se uma LT com Z_0=570Ω e Z_L=(200+j150)Ω. Pede-se para calcular Γ_L através da carta de Smith.

Solução:
A impedância normalizada é:

$$z_L = Z_L/Z_0 = 0{,}351 + j0{,}263$$

Regra de três:
raio/circulo, mm → 1
raio vetor, mm → $|\Gamma_L|$



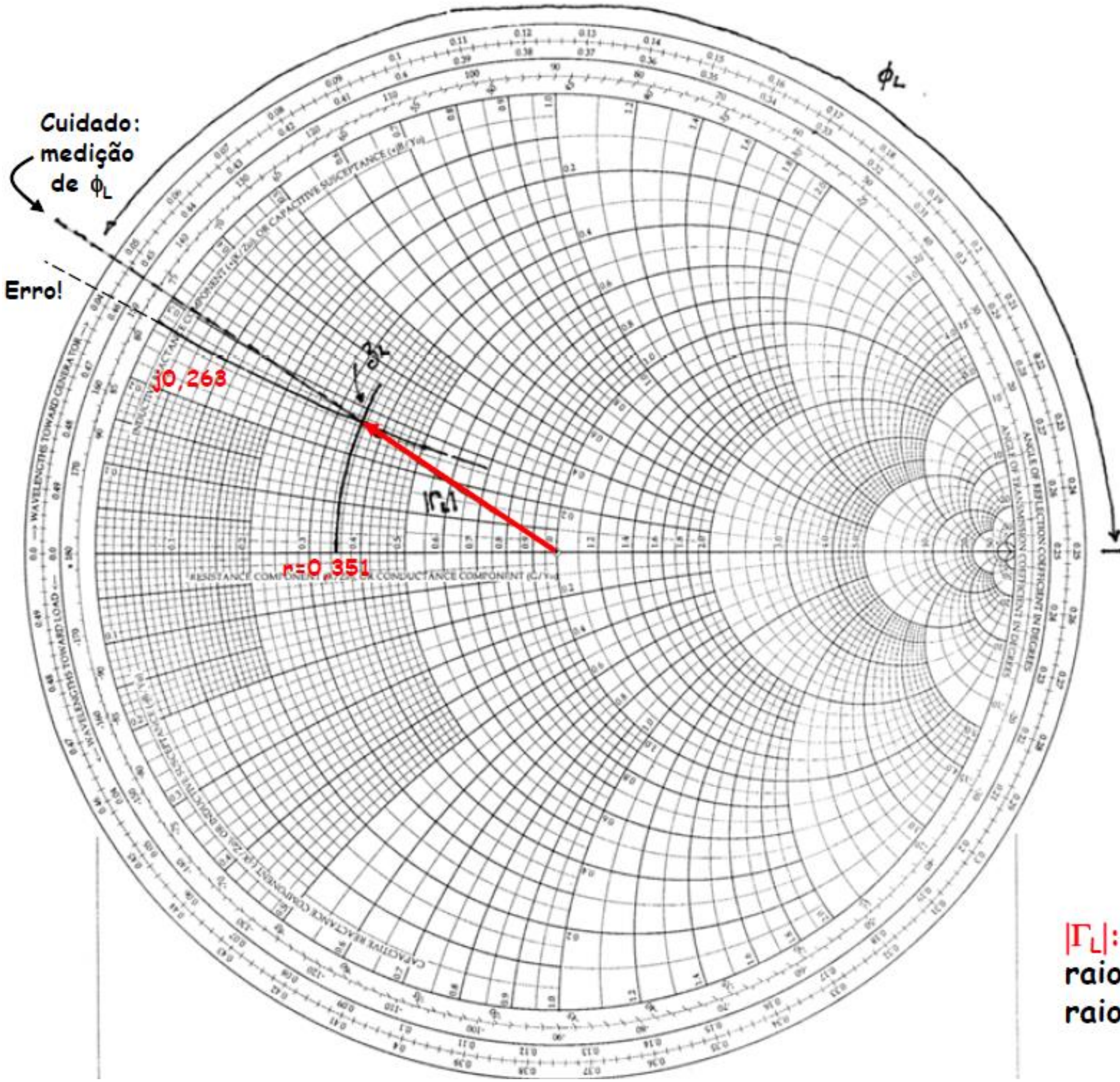
Obs:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{200 + j150 - Z570}{200 + j150 + Z570}$$

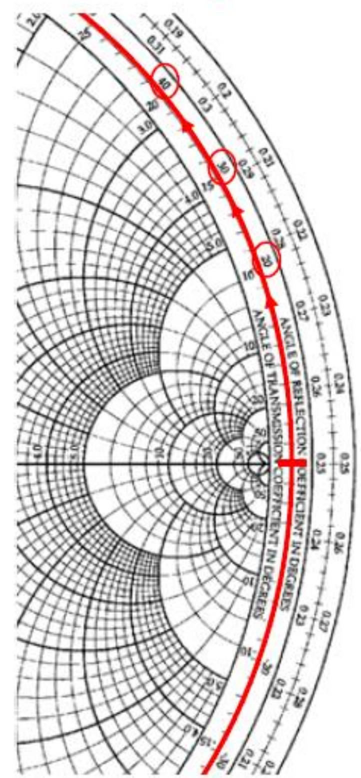
$$= \frac{-370 + j150}{770 + j150} = \frac{394{,}2\underline{|157{,}93^0}}{784{,}5\underline{|11{,}02^0}}$$

$$= 0{,}53\underline{|146{,}91^0}$$

A partir da carta de Smith se obtém (usar regra de três): $\boxed{\Gamma_L = 0{,}51\ \angle 147^0}$



Escala de ângulo: ϕ_L



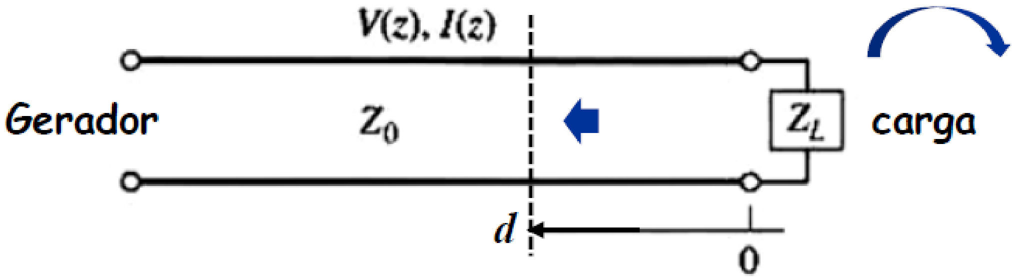
$|\Gamma_L|$: regra de três

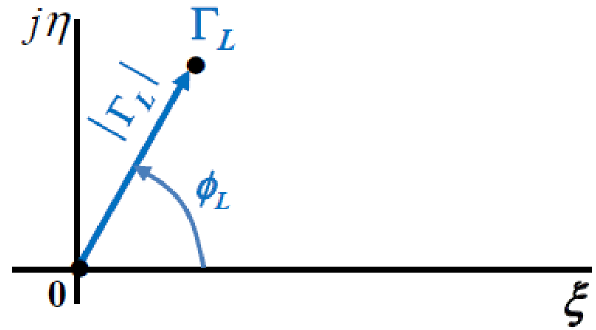
raio/circulo, mm $\rightarrow$ 1

raio vetor, mm $\rightarrow |\Gamma_L|$

• Característica da carta de Smith de impedâncias

viii) Deslocamento na carta de Smith, da carga em direção ao gerador



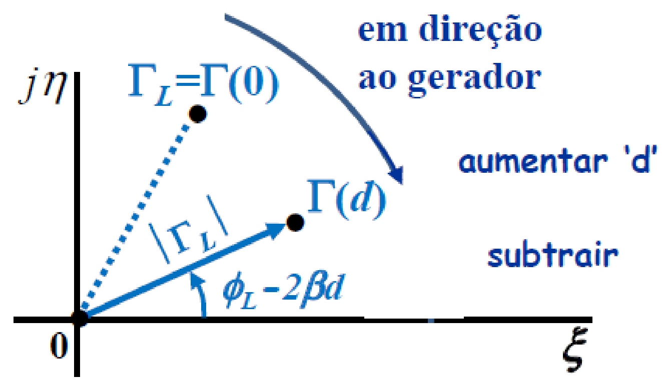


$$\Gamma(d) = |\Gamma_L| e^{j(\phi_L - 2\beta d)}$$

subtrair

Para qualquer ponto 'd' da LT, $|\Gamma(d)|$ permanece constante, desde que não se mude a carga:

$$|\Gamma(d)| = |\Gamma_L|$$



Caminhar na LT, da carga para o gerador, equivale a percorrer a carta de Smith sobre um círculo de raio constante $|\Gamma_L|$, no sentido horário.

ix) Deslocamento de $d = \lambda_g/2$ em direção ao gerador: $2\beta d = 2\dfrac{2\pi}{\lambda_g}\dfrac{\lambda_g}{2} = 2\pi$

é equivalente a uma volta completa na carta de Smith.

"Caminhando" na carta de Smith

O ângulo de fase é

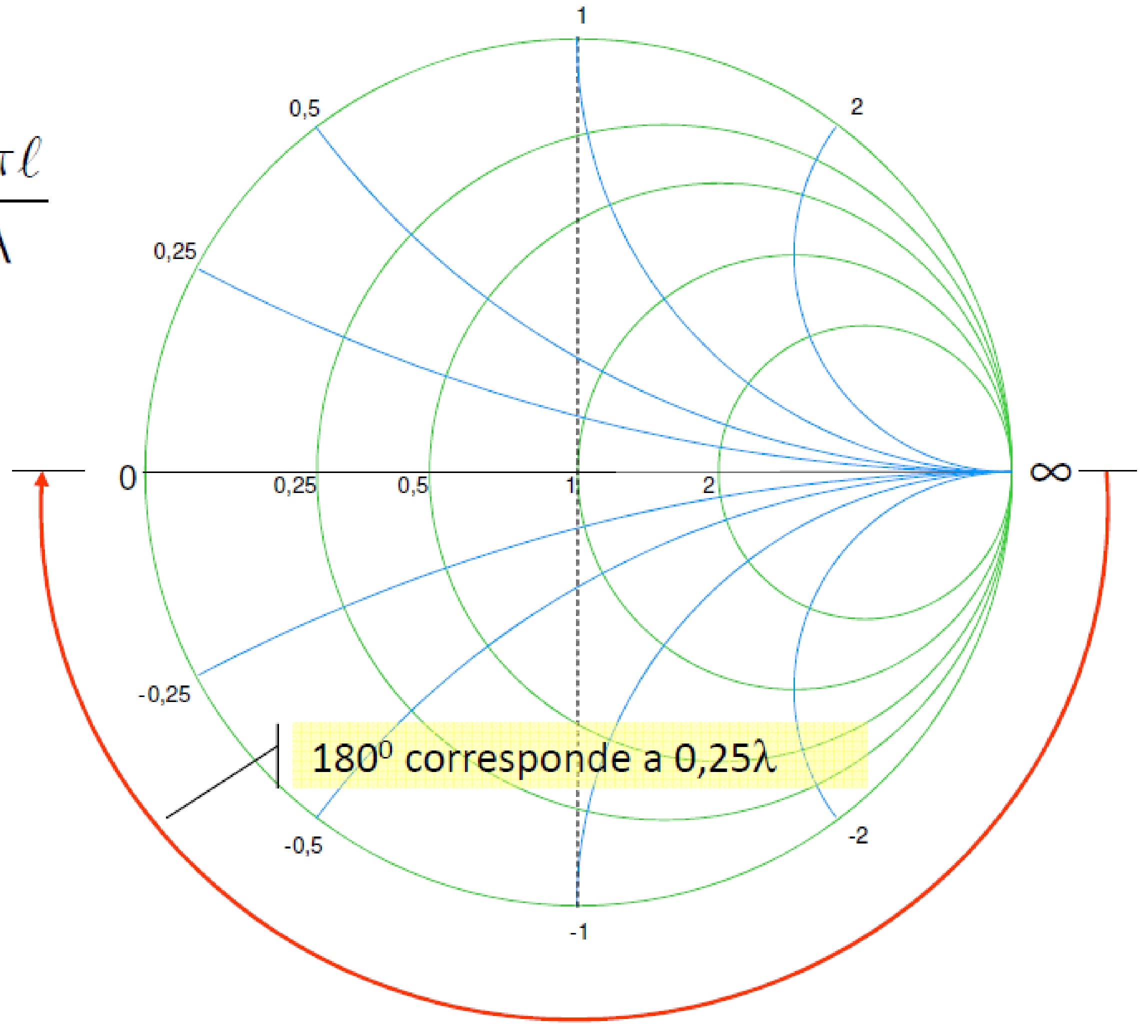
$$2k_I\ell = 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\ell = \frac{4\pi\ell}{\lambda}$$

Se

$$\ell = \frac{\lambda}{2}$$

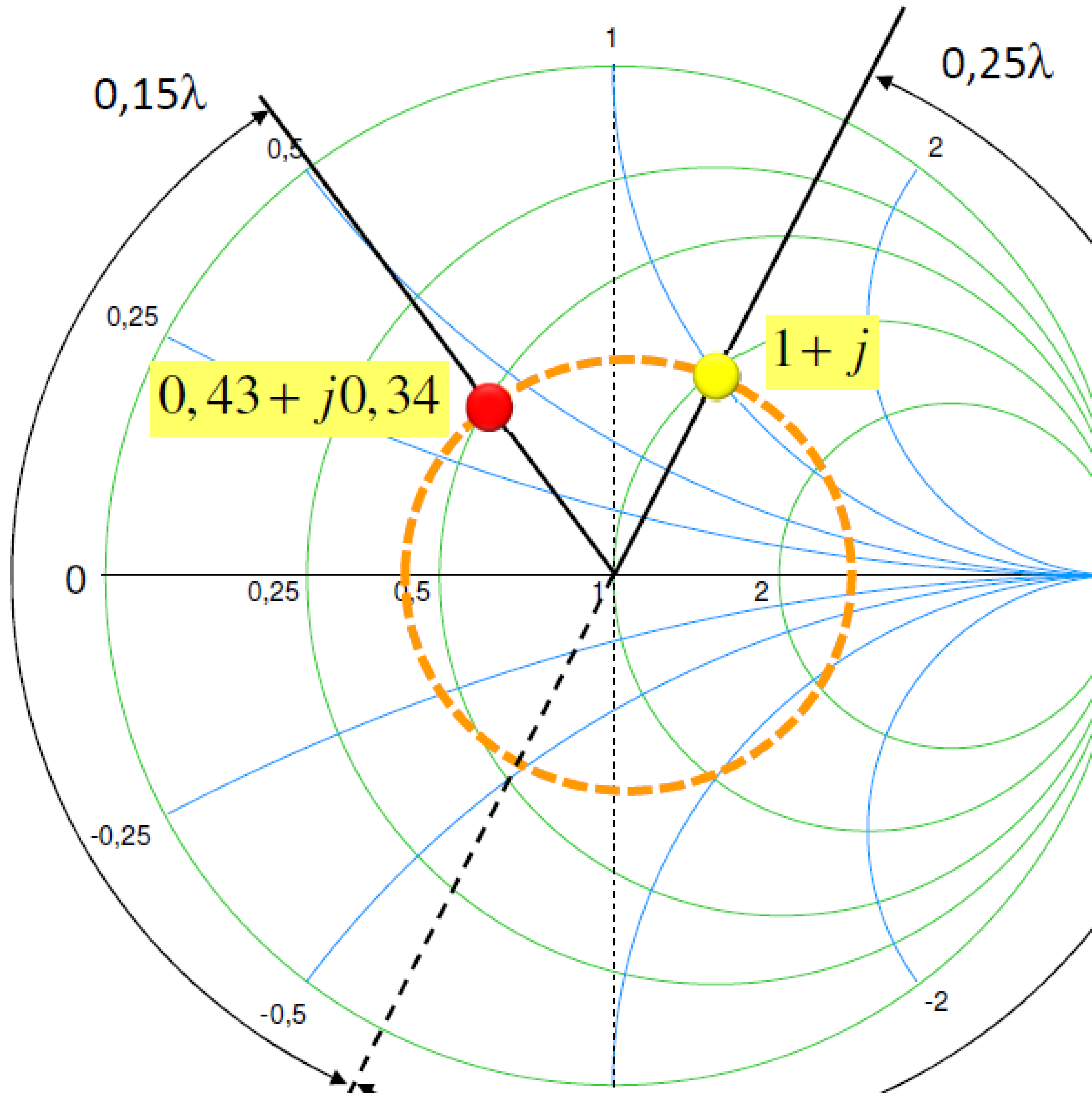
O ângulo correspondente é 2π

1 volta na carta corresponde a $\lambda/2$



Exercício 3

- Determinar a impedância distante $0,4\lambda$ da impedância de carga $z=1+j$
- Alocar a impedância z na carta
- Caminhar 0,4λ na carta
- Traçar uma reta da coordenada correspondente até o centro da carta
- A impedância procurada é a intersecção dos 2 lugares geométricos



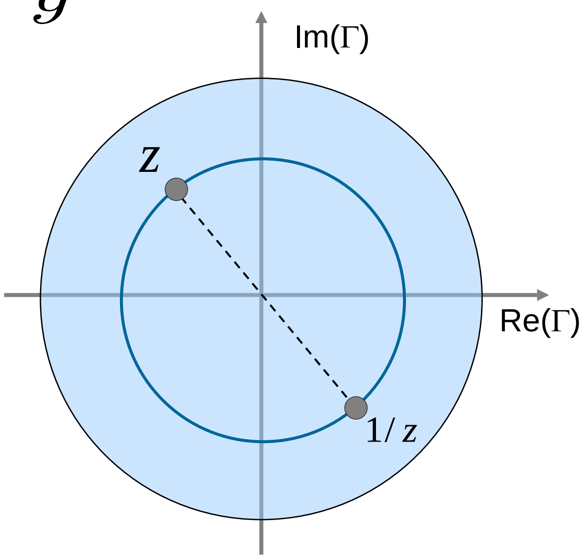
Admitância na Carta de Smith

Admitância característica: $$Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

A impedância normalizada é dada por: $$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

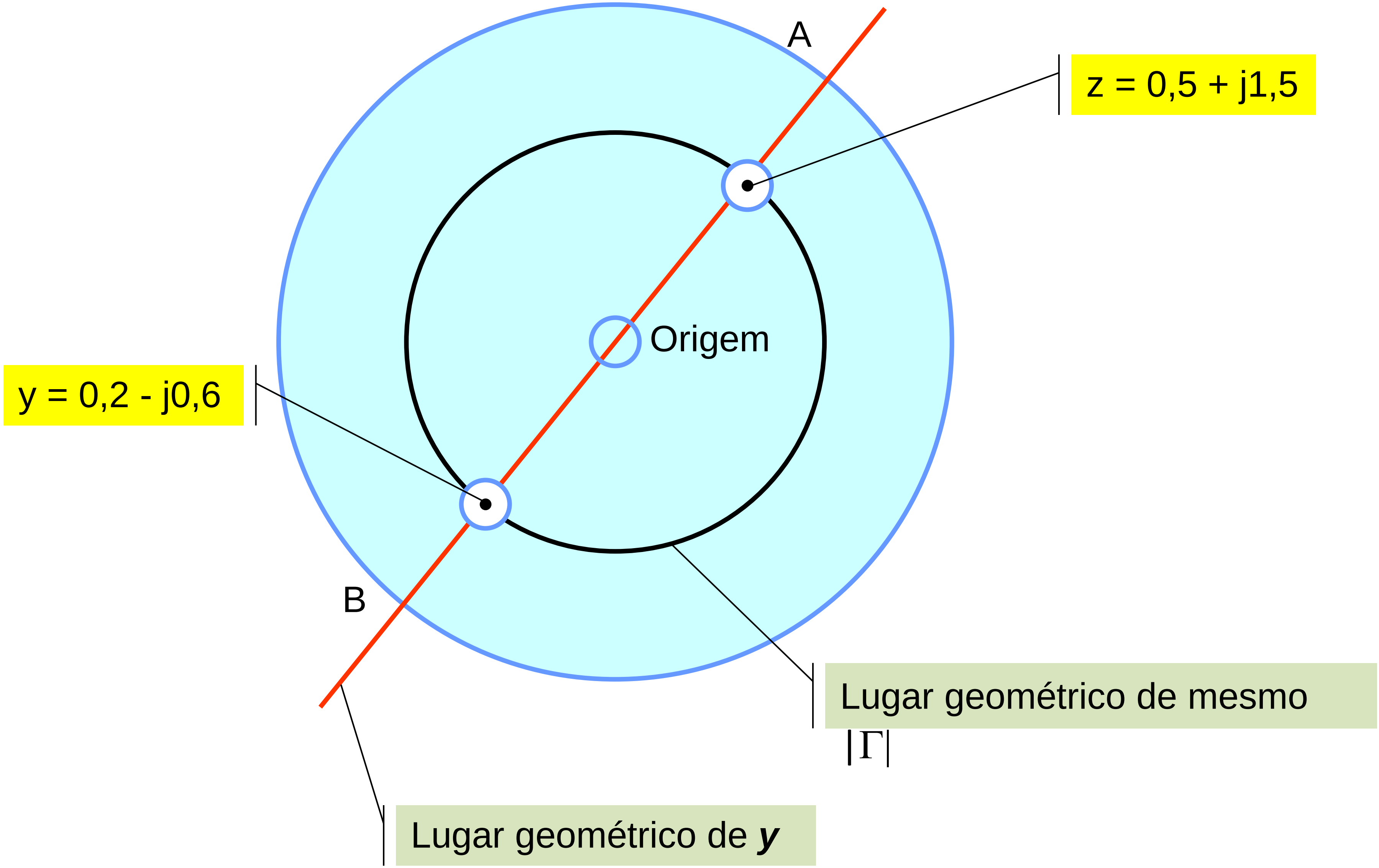
Substituindo Γ por -Γ

$$z = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \equiv y$$



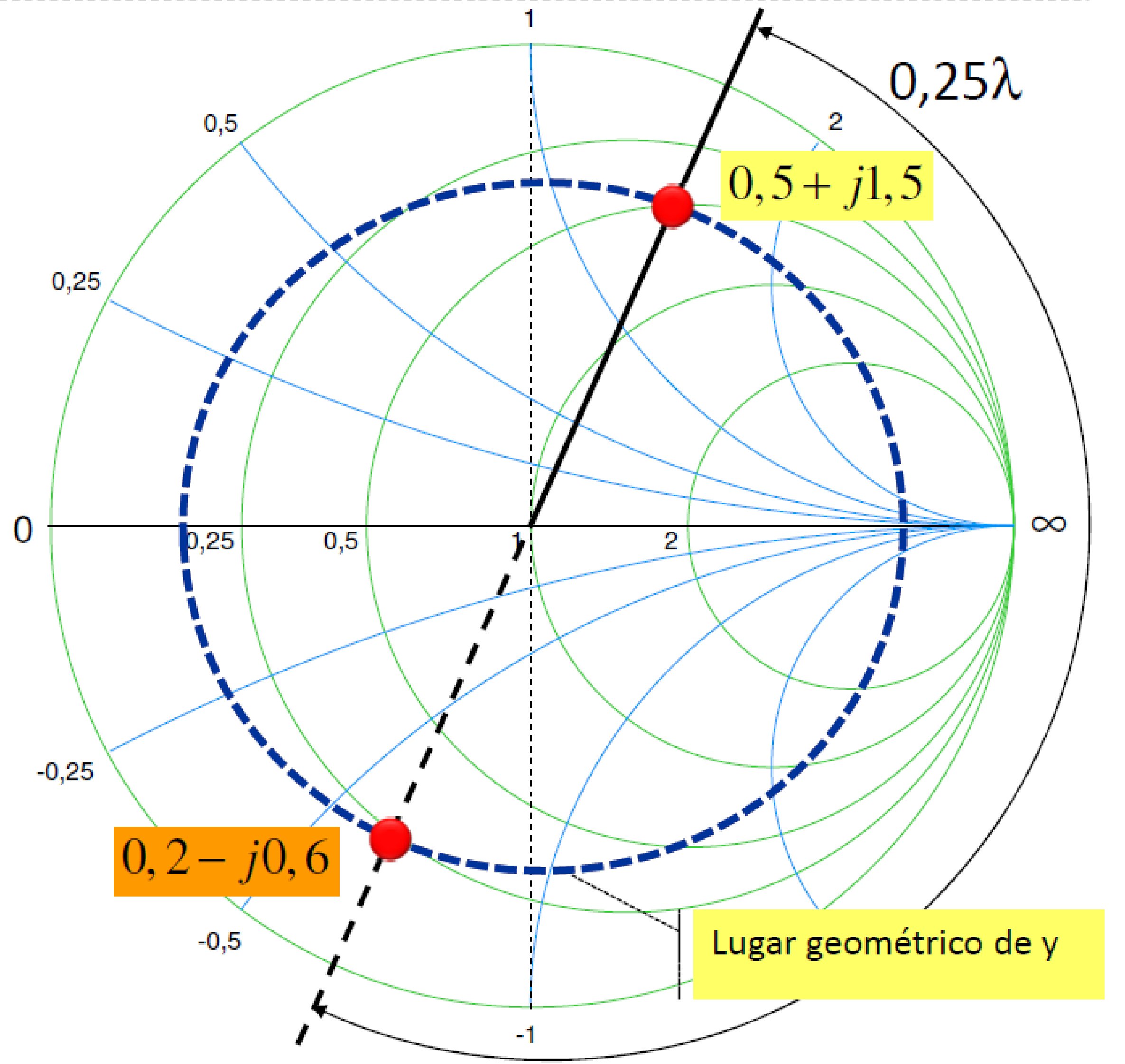
Substituir Γ por -Γ equivale a trocar ***z*** por (***1/z***)
Localizar Γ (ou ***z***) da maneira usual
Determinar (-ς) por rebatimento
Traçar um círculo passando por Γ
O número complexo obtido é ***y = (1/z)***

Admitância na Carta de Smith: exemplo



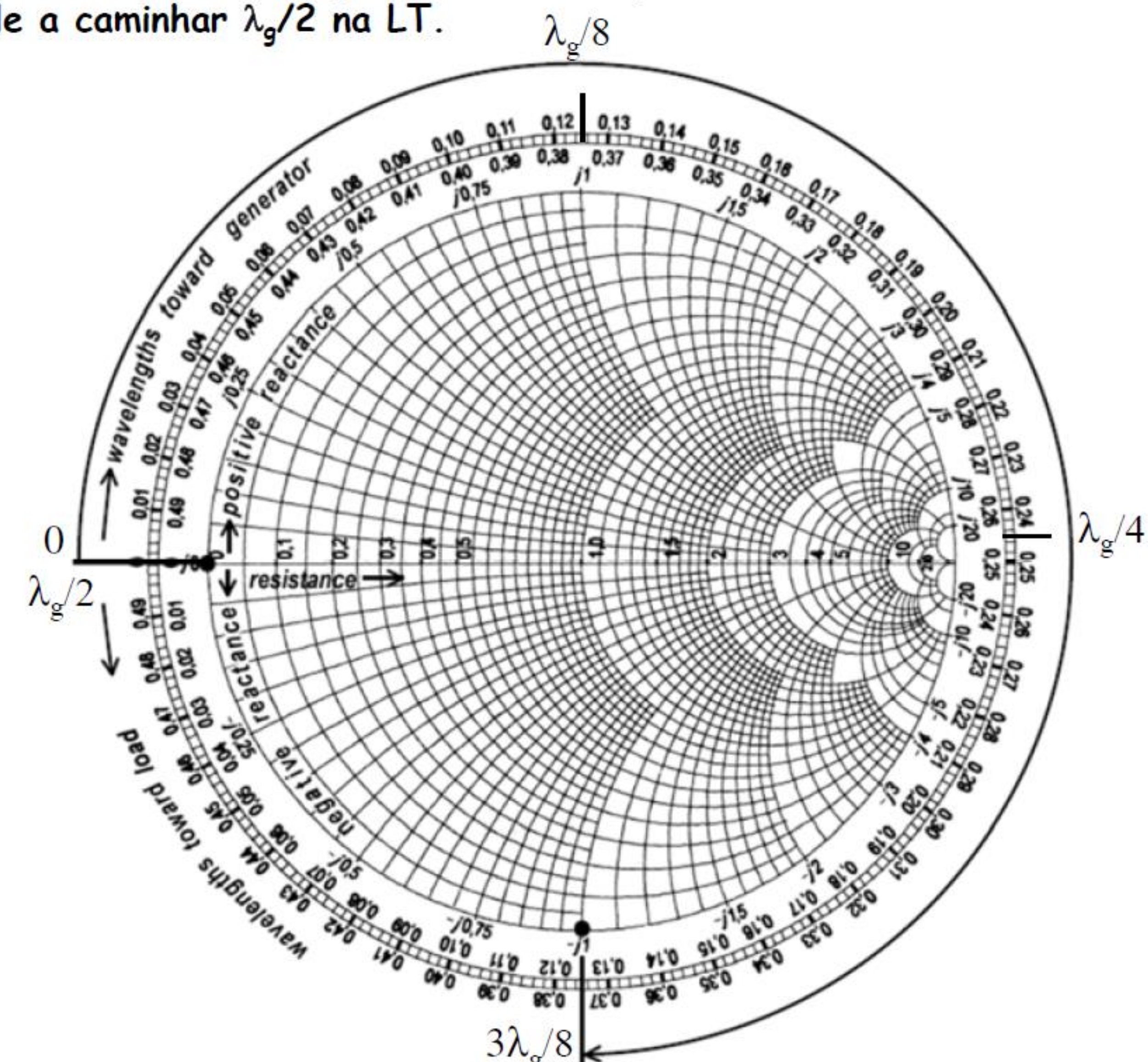
Exercício 4

- Determinar a admitância correspondente à impedância normalizada *z=0,5+j1,5*
- Alocar a impedância *z* na carta
- Traçar um círculo centrado na carta e passando por *z*
- Caminhar 0,25λ na carta
- A admitância procurada é a intersecção dos 2 lugares geométricos



• Característica da carta de Smith de impedâncias

x) Normalmente, a carta é graduada em comprimento de onda. Uma volta completa equivale a caminhar $\lambda_g/2$ na LT.



Relação de Onda Estacionária SWR

É uma medida de refletividade em um ponto da linha e define-se em um ponto qualquer como:

$$\mathrm{SWR} = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \; . \qquad (22$$

Este parâmetro é facilmente mensurável por sondagem ao longo da linha.

Casos Especiais

$\Rightarrow$ *Linha de $l = m\lambda/2$ com $m = 1,2,3...$(ou Repetidor de Impedância):*

Para este caso $\tan(\beta l) = 0$ e portanto

$$Z_{in} = Z_L$$

$\Rightarrow$*Linha de $l = m\lambda/4$ com $m = 1,3,5...$ (ou Transformador de Impedância)*

Nesse caso temos $\tan(\beta l) = \tan(\pi/2) = \infty$ e por isso:

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \qquad (23)$$

ROE na Carta de Smith-1

Impedância: $$Z\ \ z\ = Z_o \frac{1+\left|\Gamma_o\right| e^{j\ 2k_I z - \theta_R}}{1-\left|\Gamma_o\right| e^{-j\ 2k_I z - \theta_R}}$$

O máximo de tensão da onda estacionária ocorre para

$$\cos\ \ 2k_I \ell_{\max} - \varphi_r \ = 1\ ,\quad n = 0,1,2\ldots \qquad \ell_{\max} = \frac{n\pi + \phi_r / 2}{k_I}$$

$$\left|V(-\ell)\right|_{\max} \equiv V_{\max} = \left|V^+\right|\ 1 + \left|\Gamma_0\right|$$

$$Z\ \ \ell_{\max}\ = Z_0 \frac{1+\left|\Gamma_o\right|}{1-\left|\Gamma_o\right|}$$ ou $$Z\ \ \ell_{\max}\ = Z_0 ROE$$

Este valor é real e, no mínimo, igual a Z_0

ROE na Carta de Smith-2

Impedância: $$Z\ \ z \ = Z_0 \frac{1+\left|\Gamma_0\right| e^{j\ 2k_I z - \theta_R}}{1-\left|\Gamma_0\right| e^{-j\ 2k_I z - \theta_R}}$$

O mínimo de tensão da onda estacionária ocorre para

$$\cos\ 2k_I \ell - \varphi_r \ = -1\ ' \qquad n = 0,1,2\ldots \quad \ell_{\min} = \frac{2n+1\ \pi\ /\ 2 + \phi_r\ /\ 2}{k_I}$$

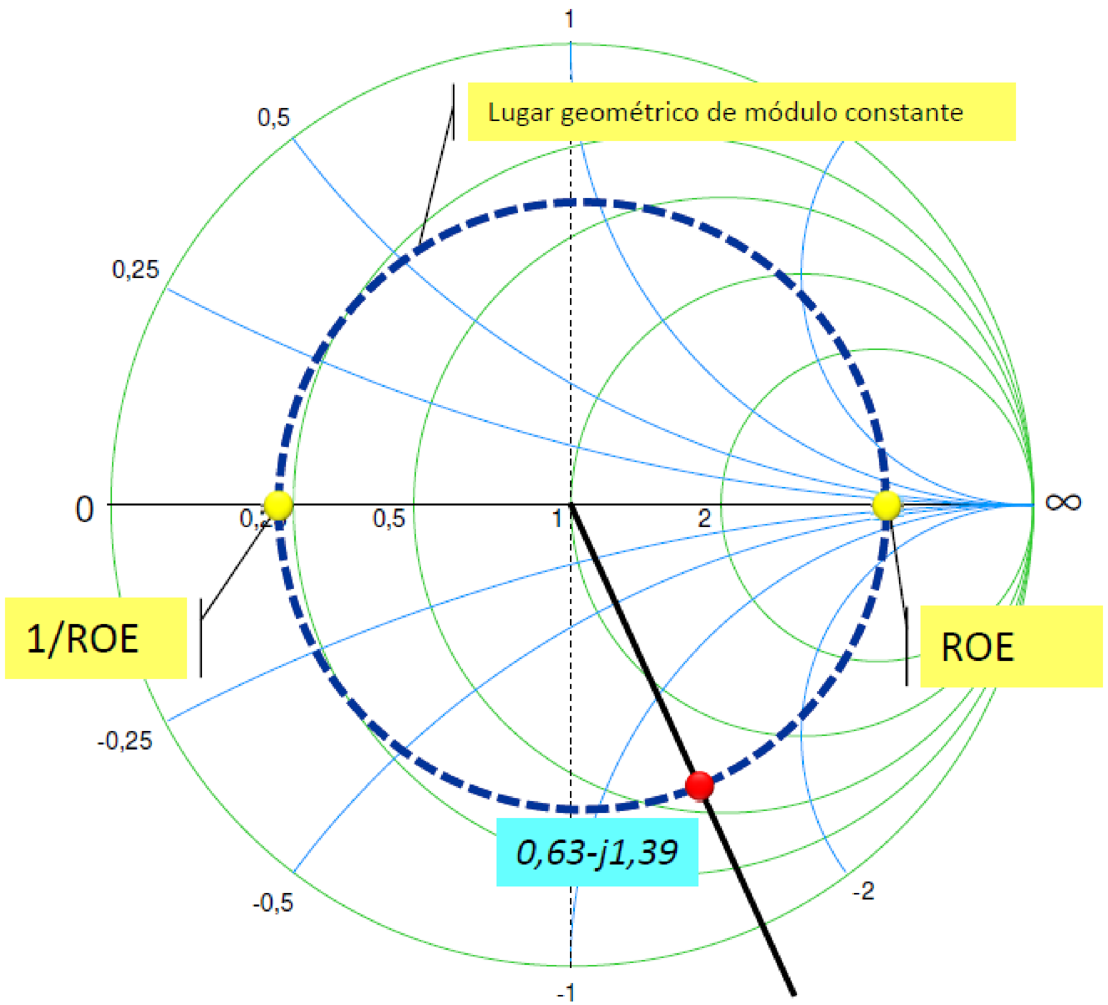
$$\left|V(-\ell)\right|_{\min} \equiv V_{\min} = \left|V^+\right|\ 1 - \left|\Gamma_0\right|$$

$$Z\ \ \ell_{\min} \ = Z_0 \frac{1-\left|\Gamma_0\right|}{1+\left|\Gamma_0\right|}$$ ou $$Z\ \ \ell_{\min} \ = \frac{Z_0}{ROE}$$

Este valor é real e, no máximo, igual a Z_0

Exercício 5

- A impedância na entrada de uma linha é Z_e=45-j100 ohms
- A impedância característica é Z_0=72 ohms
- Qual é o valor da ROE na linha?



z_e=0,63-j1,39

ROE=4,9

Exemplo: medição do coeficiente de onda estacionária

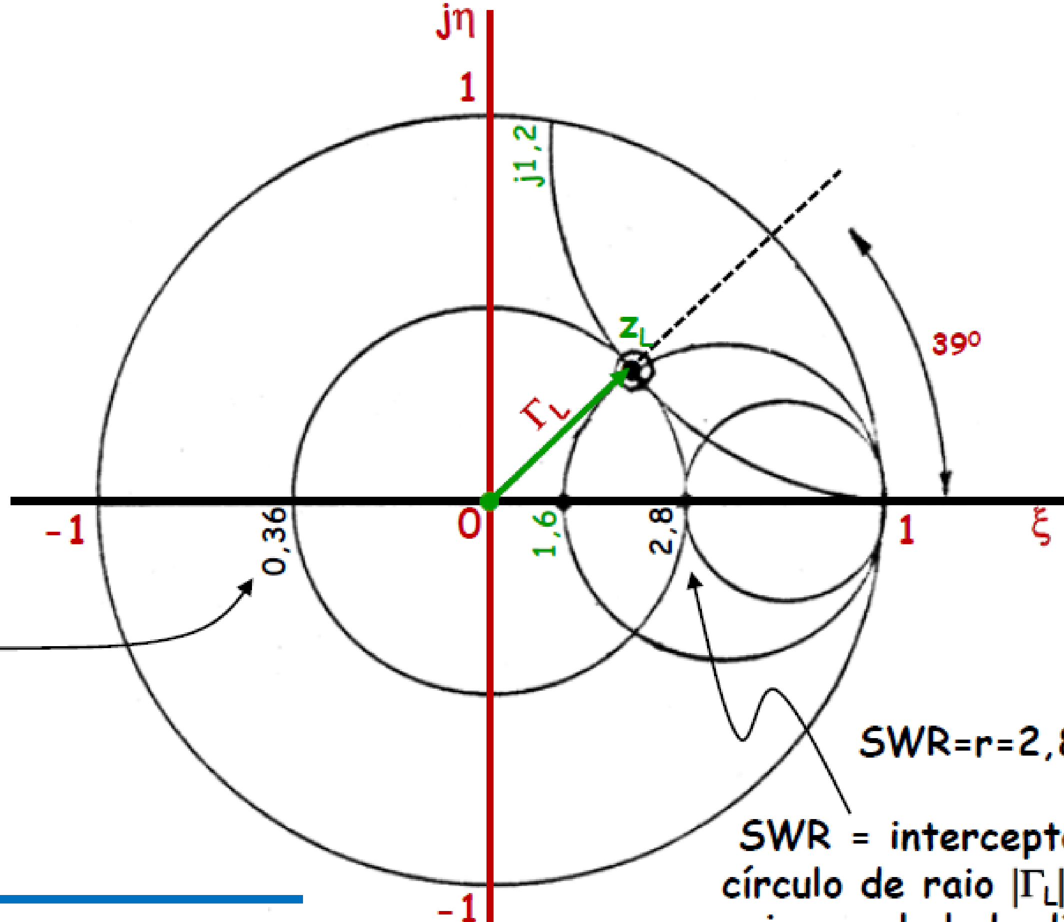
Considerando-se uma LT com Z_0=50Ω e Z_L=(80+j60)Ω, medir Γ_L e o SWR.

Solução:

Carga normalizada:

$z_L = Z_L/Z_0 = 1{,}6 + j1{,}2$

Pela carta, $\Gamma_L = 0{,}47/39^0$



SWR = 1/r=1/0,36=2,8

SWR = intercepto do círculo de raio $|\Gamma_L|$ com o eixo real, lado esquerdo.

SWR = intercepto do círculo de raio $|\Gamma_L|$ com o eixo real, lado direito.

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0{,}475\underline{|39^0} \quad SWR = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} = 2{,}764$$

Exemplo:

Seja uma LT com SWR=4, Z_0=100Ω, distância entre a carga e o primeiro mínimo de tensão igual a 6,8cm, f=500MHz e v_p=2c/3. Determinar o valor de Z_L.

Solução:

O comprimento de onda é $\lambda = \frac{2}{3} \times 3 \times 10^8 \quad \frac{1}{5 \times 10^8} = 40 \text{ cm}$

e a distância normalizada é $\frac{d_{mín}}{\lambda} = \frac{6,8}{40} = 0,17$

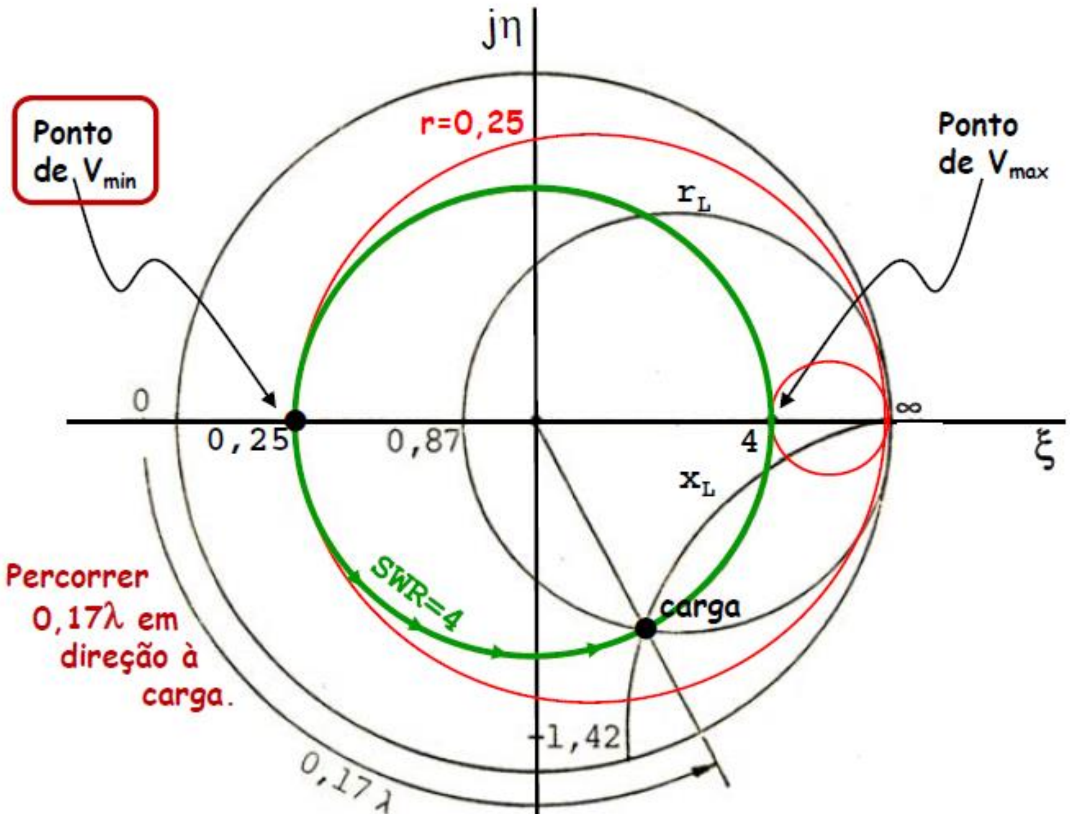
Partindo-se da carga, deve-se percorrer d_{min}=0,17λ em direção ao gerador, sobre o círculo de SWR constante, até chegar ao ponto de V_{min}. Ainda,

$$z_{V\min} = z(d_{\min}) = \frac{1}{SWR} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Portanto, a carga está a 0,17λ, partindo-se do ponto de mínimo e em direção à carga, sobre o círculo de SWR constante.

Portanto, a carga está a 0,17λ, partindo-se do ponto de mínimo e em direção à carga, sobre o círculo de SWR constante. A partir da carta de Smith, obtém-se:

$$z_L = 0,87 - i1,42$$



Portanto,

$$Z_L = Z_0 z_L \rightarrow Z_L = (87 - i142) \text{ ohms}$$

Exercícios para casa

1. Usar a carta de Smith para encontrar a impedância de entrada Z_{in} vista pela entrada de uma LT com $Z_0=50\ \Omega$, $\ell=0{,}3\lambda$ e carga $Z_L=(50+j100)\ \Omega$.

Smith chart App for nerds (limited edition):