Um pouco sobre Equações Diferencias Ordinárias

Este texto sobre equações diferenciais ordinárias, e em particular sobre equações lineares de primeira ordem, visa completar o que se viu em sala de aula, é mais extenso e tem, em um ou outro ponto, uma abordagem ligeiramente diferente. Porém os resultados obtidos são os mesmos

1 Introdução

Ao menos em termos históricos, a importância de equações diferenciais está, antes de tudo, nas aplicações. A pequena lista a seguir deve servir para justificar esta afirmação.

Exemplo 1 [Decaimento radiativo] Considere uma amostra de material radioativo e denote por $m(t)$ a quantidade de material radioativo no instante t. Segundo assegurm os *especialistas* a velocidade com que decai essa quantidade de material radioativo é diretamente proporcional a $m(t)$. Em termos matemáticos isso expressa-se como $\dot{m}(t) = -km(t)$, com k uma constante estritamente positiva.

Exemplo 2 [Lei de esfriamento de Newton] Segundo essa lei a temperatura de um corpo num meio termicamente isolado decresce com velocidade proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente, colocando isso em termos matemáticos, se $T(t)$ é a temperatura do meio ambiente no instante t e $y(t)$ é a desconhecida temperatura no instante t de um corpo colocado nesse meio, então existe uma constante $k > 0$ tal que $\dot{y}(t) = -k(y(t) - T(t))$, ou de uma maneira mais usual no contexto de equações ordinárias, $\dot{y} = -k(y - T(t)) = -ky + kT(t)$.

Exemplo 3 [Equação fundamental da dinâmica] O cidadão conhecido na história como Sir Isaac Newton afirmou que se um ponto material de massa m desloca-se no espaço, sujeito a uma força F que depende do tempo t, da posição $r(t)$ e da velocidade $\dot{r}(t)$, a derivada da quantidade de movimento $Q(t) = m\dot{r}(t)$ é igual à força. Em termos matemáticos, $\frac{d}{dt}Q(t) = F(t, r(t), \dot{r}(t))$, ou seja, lembrando que a massa (na mecânica clássica) é constante, $m\ddot{r}(t) = F(t, r(t), \dot{r}(t))$, ou como é usual escrever $m\ddot{r} = F(t, r, \dot{r})$.

Exemplo 4 [Um modelo demográfico] Procurar modelos para o crescimento populacional é uma das questões mais antigas e atuais de estudos em demografia. Um dos modelos mais comuns é descrito pela chamada *equação logística*. Supõe-se que há uma constante M tal que a taxa de variação da população, $p(t)$ é proporcional a $M - p(t)$, ou seja, existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \mu(M - p(t))$, ou escrevendo a equação na forma normal, $\dot{p} = \mu p(M - p) = -\mu p^2 + M\mu p$.

Exemplo 5 [Um exemplo de finanças] O sistema de juros, juros compostos claro, baseia-se na seguinte consideração, a taxa com que varia o capital devido é constante, digamos $\alpha > 0$. Se $c(t)$ é o capital devido no instante t, tem-se $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \alpha$, isto é, $\dot{c} = \alpha c$.

Exemplo 6 [Um modelo para duas espécies] O modelo que aqui será descrito foi proposto há mais ou menos um século por Lotka e Volterra. Suponha que num planeta (originalmente era uma ilha) muito distante de uma galáxima mais distante ainda existam duas espécies, uma delas, X, cuja população no instante t será denotada por $x(t)$, alimenta-se de uma substância disponível em quantidade ilimitada naquele planeta (entendeu porque preferiu-se usar planeta em vez de ilha?)... Admita também que outra espécie, Y, cuja população no instante t será denotada por $y(t)$ alimenta-se apenas da espécie supramencionada! O modelo proposto por Lotka e Volterra para retratar matematicamente esta situação baseou-se no seguinte

[I] A taxa de crescimento de X é $\alpha - \beta y(t)$, para determinadas constantes α e β estritamente positivas. Isso quer dizer que, se não existir a espécie Y, a taxa de crescimento de X é constante (Malthus agradece), mas quanto maior for a população de Y menor é essa taxa, tornando-se negativa se $y(t)$ for maior do que $\frac{\alpha}{\beta}$.

[II] A taxa de crescimento de Y é, $-\gamma+\delta x(t)$, para convenientes constantes estritamente positivas γ e δ. Isso reflete os seguintes aspectos, se a única espécie que existe no tal planeta for Y isto é uma verdadeira tragédia, pois sem alimento a *taxa de mortalidade* será constante e igual a $\delta > 0$. Essa taxa de mortalidade será cada vez menor à medida que a população de X aumenta (Oba! Comida! Comida!), e torna–se uma *taxa de crescimento populacional positiva* quando $x(t) > \frac{\gamma}{\delta}$.

Em linguagem matemática tem–se

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y(t) \\ \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -\gamma + \delta x(t) \end{cases}$$

ou, eliminando-se denominadores, na forma mais conhecida

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy. \end{cases}$$

Este é um exemplo de sistema de equações diferenciais, ou uma equação diferencial em $\mathbb{R}^2$.

Poder–se–ia aumentar esta lista, mas para os objetivos propostos já chega!

Agora vai–se fazer uma pequena introdução formal ao estudo de equações ordinárias (e.d.o.)

Aqui não se tentará defiir o que é uma e.d.o., falta linguagem e, principalmente, falta um motivo para isso.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f : A \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma *e.d.o. escalar normal de primeira ordem*, será escrita como

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Os exemplos 1, 2, 4 e 5 vistos antes são exemplos de e.d.o. normal de primeira ordem.

Definição 1 *Uma função* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma solução de* (1) *se:*

[a] I *é um intervalo não degenerado contido em* A.

[b] $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, *para todo* $t \in I$.

Observação 1 *Segue da definição 1 que toda solução de e.d.o. é, pelo menos, contínua. Ademais, se f for contínua, então as soluções de* (1) *são de classe $\mathcal{C}^1$.*

Note que o domínio de toda solução de e.d.o. deve ser um intervalo, essa condição será fundamental para questões de unicidade de soluções para problemas de valor inicial em e.d.o.

Exemplo 7 As funções $\varphi_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ j = 1, 2,$ dadas por $\varphi_1(t) = 0$, para todo t, e $\varphi_2(t) = \begin{cases} (\frac{2t}{3})^{\frac{3}{2}},\ t \geq 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases}$, são ambas soluções da e.d.o. $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$.

Questão 1 Prove que φ_2 é solução de $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$.

Questão 2 Prove que $\varphi :] - \infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = \frac{1}{1-t}$ é uma solução de $\dot{x} = x^2$. (Note que aqui $f(t, x) = x^2$ está definida em toda reta, mas φ é uma solução desta e.d.o. que está definida em $] - \infty, 1[$ e tem uma assíntota vertical em $x = 1$, logo não pode ser estendida para uma solução definida em $\mathbb{R}$.)

Estes inocente exercícios terão sua importância em breve.

Exemplo 8 Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e considere $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e a e.d.o. $\dot{x} = f(t)$. Vão-se procurar soluções desta e.d.o. definidas em todo intervalo I.

O teorema fundamental do cálculo mostra que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução desta equação definida no intervalo I se, e apenas se, φ é uma primitiva de f.

Assim, tomando $t_0 \in I$, o conjunto $\mathfrak{S}$ das soluções de $\dot{x} = f(t)$ definidas em I é

$$\left\{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)du + c \right\},\ c \in \mathbb{R}$$

Questão 3 Prove a afirmação anterior.

Isso mostra que a equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t)$ tem infinitas soluções, porém se for feita a exigência adicional de

QUE A SOLUÇÃO DESTA E.D.O. NO PONTO t_0 TENHA O VALOR x_0 O QUE ACONTECE? É SIMPLES DEDUZIR DO QUE SE AFIRMOU ANTES QUE A ÚNICA FUNÇÃO DEFINIDA EM I QUE SATISFAZ ESAS DUAS CONDIÇÕES (RESOLVER A E.D.O. E VALER x_0 EM t_0) É $\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \ t \in I$.

A EXIGÊNCIA ADICIONAL QUE, NESTE CASO, GARANTIU A *unicidade* DA SOLUÇÃO CHAMA-SE **Condição Inicial** E O PROBLEMA "E.D.O.+CONDIÇÃO INICIAL" CHAMA-SE PROBLEMA DE CAUCHY OU PROBLEMA DE VALOR INICIAL, E REPRESENTA–SE ASSIM:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Em geral, considere $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : A \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $t_0 \in A$, chama–se probema de Cauchy, ou problema de valor inicial, à questão de encontrar a(s) solução(ões) da e.d.o. $\dot{x} = f(t, x)$ que no ponto t_0 vale x_0, e representa-se esse problema por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

O exemplo 8 exibe um problema de Cauchy com apenas uma solução definida em I, entretanto o exemplo 7 mostra que o problema $\dot{x} = \sqrt[3]{x}, \ x(0) = 0$ tem pelo menos duas soluções diferentes definidas em $\mathbb{R}$.

Isso mostra que exigir continuidade de f não basta para garantir que o problema (2) tenha solução "única".