

1ª Lista de Exercícios

Profª Silvia Nagib Elian

1. Calcule o determinante e a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}$, onde a , b e c são escalares e I é a matriz identidade de ordem m .

2. Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

3. Determine o posto das matrizes

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4. Determine a matriz A associada à forma quadrática $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2$.

5. Classifique as seguintes matrizes em positiva definida ou positiva semi definida

a. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6. Calcule o ângulo formado por cada par de vetores do conjunto

$t' = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]$,

$u' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$v' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

7. A forma quadrática $x'Ax$ é chamada positiva definida se a matriz A é positiva definida. Verificar se a forma quadrática $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ é positiva definida.

8. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer.

- a. Prove que $A'A$ é simétrica, $n \times n$.

- b. Mostre que $A'A$ é não negativa definida.

9. Seja A uma matriz $p \times p$, simétrica, positiva definida e sua decomposição espectral $A = IDI'$.

a. Prove que $\Gamma' \Gamma = \Gamma \Gamma' = I_p$.

b. Utilizando (a), mostre que $A = PP$, onde $P = ID^{1/2} \Gamma$ e $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ raízes características de A .

c. Mostre que $A^{-1} = ID^{-1} \Gamma$.

Os resultados dos itens (b) e (c) permitem a obtenção da “raiz quadrada” de uma matriz positiva definida e de sua inversa em função dos vetores característicos e raízes características.

10. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

a. Determine suas raízes e vetores característicos.

b. Determine a decomposição espectral de A .

c. Obtenha A^{-1} através do resultado do exercício anterior.

d. Determine P tal que $A = PP$.

11. Prove que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

12. Seja A matriz simétrica $n \times n$. Prove que existe D , matriz diagonal tal que $x'Ax = y'Dy$.

13. Verifique as seguintes propriedades de matriz transposta quando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

a. $(A')' = A$.

b. $(C')^{-1} = (C^{-1})'$.

c. $(AB)' = B'A'$.

d. Prove (c) para $A_{m \times k}$ e $B_{k \times l}$ gerais.

14. Quando A^{-1} e B^{-1} existem, prove que:

a. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dica: O item (a) pode ser provado notando que $AA^{-1} = I$, $I = I'$ e $(AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$.

O item (b) segue de $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$.

Resultados úteis:

A , matriz $p \times p$, simétrica é positiva definida se e só se

(i) As raízes características de A são todas positivas (> 0).

(ii) $a_{11} > 0$, $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det(A) > 0$.

iii) A , matriz $p \times p$, simétrica e positiva semi definida

$\Leftrightarrow$ as raízes características de A são não negativas (≥ 0) e no mínimo uma delas é igual a 0.

15) Usando uma forma da decomposição espectral, mostre que se uma matriz simétrica possui raízes características estritamente positivas, então ela é positiva definida.

16) Sejam $x' = [5 \ 1 \ 3]$ e $y' = [-1 \ 3 \ 1]$. Determine

a) O comprimento do vetor x .

b) O ângulo entre os vetores x e y .

c) A projeção de y em x .